01

Аналитическое определение зависимости концентрации одинаково заряженных моночастиц от времени

© *А.А. Быков, И.Н. Завьялов*

Московский физико-технический институт
(государственный университет),
Долгопрудный, Московская обл.
E-mail: Aleks-Bykov@yandex.ru

Поступило в Редакцию 12 апреля 2016 г.

На основе уравнений механики сплошной среды для течения одинаково заряженных частиц одинаковой массы выведена в общем виде зависимость их концентрации от времени. Показано, что концентрация зависит только от заряда отдельных частиц и их массы, а также времени движения, электрические поля от внешних источников на объем, занимаемый ими, не влияют. Полученные результаты применимы в случаях, когда можно пренебречь магнитными полями и электрическое поле считать квазистационарным.

На данный момент ведутся работы по изучению движения капель масла в околоземном пространстве. Такие задачи возникли в связи с необходимостью разработки капельно-холодильных излучателей [1–4] для охлаждения космических аппаратов. Одной из основных проблем таких систем является воздействие космического излучения на капли, в результате чего они приобретают нескомпенсированный заряд и начинают разлетаться. В Российской Федерации над решением данной проблемы работают научные коллективы Исследовательского центра им. М.В. Келдыша и Московского физико-технического института. Актуальным является получение какого-либо упрощающего аналитического соотношения для расчета таких систем частиц, что позволило бы уменьшить размерность задачи и ускорить численное моделирование.

Особенностью наблюдавшихся систем является то, что скорость каждой частицы (капли) мало отличается от их средней скорости движения в каждой точке пространства. Так как происходит расширение в пустоту, то механическим влиянием на их движение каких-либо стенок можно пренебречь. Это приводит к тому, что в рассматриваемой среде можно не рассматривать понятия давления и вязкости, так как они связаны с хаотическим движением частиц.

Рассмотрим движение группы заряженных частиц одной массы m и с зарядом e. Будем считать, что в каждой точке их концентрация равна n, а скорости очень мало отличаются друг от друга и равны U. Также пренебрежем внешними и собственными магнитными полями. Тогда для движения можно записать уравнение неразрывности и уравнения движения жидкой частицы:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathrm{div}(n\mathbf{U}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d}{dt}\,\mathbf{U} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}, \nabla)\mathbf{U} = \frac{e}{m}\,\nabla\varphi, \tag{2}$$

где φ — потенциал электрического поля. Система уравнений (2) является аналогом уравнений Навье–Стокса, из которых удалены члены, содержащие давление и вязкость.

Для замыкания системы уравнений можно использовать уравнение Максвелла для электростатического поля:

$$\Delta\varphi = \frac{ne}{\varepsilon_0}. \tag{3}$$

После некоторых преобразований уравнение неразрывности (1) приводится к следующему виду:

$$\frac{d\ln(n)}{dt} = \frac{\partial \ln(n)}{\partial t} + (U, \nabla)\ln(n) = -(\nabla, \mathbf{U}). \tag{4}$$

Последнее уравнение можно формально продиффенцировать по времени

$$\frac{d^2\ln(n)}{dt^2} = -\frac{d}{dt}(\nabla, \mathbf{U}) = -\left(\nabla, \frac{d}{dt}\,\mathbf{U}\right) = -\left(\nabla, \frac{e}{m}\,\nabla\varphi\right) = -\frac{e}{m}\,\Delta\varphi.$$

Если использовать выражение для лапласиана (3), то получается следующая зависимость:

$$\frac{d^2\ln(n)}{dt^2} = -\frac{e}{m}\,\Delta\varphi = -\frac{e^2 n}{m\varepsilon_0}. \tag{5}$$

Следует обратить внимание, что вторая производная по времени, стоящая в левой части выражения (5), является субстанциональной, т. е. связана с конкретной группой движущихся частиц. Полученное уравнение — дифференциальное уравнение второго порядка, и для его решения необходимо знать начальные концентрацию n_0 и скорость ее измерения dn_0/dt. При первом интегрировании получается следующее равенство:

$$\left(\frac{d\ln(n)}{dt}\right)^2 + \frac{2e^2}{m\varepsilon_0}n = \left(\frac{1}{n_0}\frac{dn_0}{dt}\right)^2 + \frac{2e^2}{m\varepsilon_0}n_0 = C_0. \tag{6}$$

Для удобства была введена константа C_0, которая полностью определяется начальными параметрами задачи. В дальнейшем необходимо проинтегрировать следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dn}{n\sqrt{C_0 - \frac{2e^2}{m\varepsilon_0}n}} = -dt. \tag{7}$$

В нем в правой части выбран знак минус, так как частицы должны отталкиваться друг от друга и разлетаться, т. е. концентрация убывает со временем. Оно интегрируется аналитически (см. [5], формула 11.12.19.6)

$$(t - t_0) = -\frac{1}{\sqrt{C_0}}\ln\left|\frac{\sqrt{C_0 - \frac{2e^2}{m\varepsilon_0}n} - \sqrt{C_0}}{\sqrt{C_0 - \frac{2e^2}{m\varepsilon_0}n} + \sqrt{C_0}}\,\frac{\sqrt{C_0 - \frac{2e^2}{m\varepsilon_0}n} + \sqrt{C_0}}{\sqrt{C_0 - \frac{2e^2}{m\varepsilon_0}n} - \sqrt{C_0}}\right|. \tag{8}$$

С помощью математических преобразований из последнего выражения выражается непосредственно зависимость концентрации от времени:

$$n = \frac{\varepsilon_0 m}{e^2}\left(1 - \left(\frac{1 - \frac{\sqrt{C_0 - \frac{2e^2}{m\varepsilon_0}n_0} - \sqrt{C_0}}{\sqrt{C_0 - \frac{2e^2}{m\varepsilon_0}n_0} + \sqrt{C_0}}\exp\left(-\sqrt{C_0}(t - t_0)\right)}{1 + \frac{\sqrt{C_0 - \frac{2e^2}{m\varepsilon_0}n_0} - \sqrt{C_0}}{\sqrt{C_0 - \frac{2e^2}{m\varepsilon_0}n_0} + \sqrt{C_0}}\exp\left(-\sqrt{C_0}(t - t_0)\right)}\right)^2\right), \tag{9}$$

где C_0 определяется из выражения (6). Полученное уравнение (5) показывает, что при движении группы частиц внешние электрические поля не влияют на занимаемый ими объем, который зависит только от их суммарного нескомпенсированного заряда. Внешние поля могут повлиять только на их геометрическую форму. Фактически этот результат повторяет теорему Ирншоу о равновесии системы точечных электрических зарядов [6] и невозможности их удержать внешним электрическим полем. На практике это означает, что для транспортировки пучка заряженных частиц электрическим полем необходимо увеличивать их скорость для того, чтобы сечение пучка уменьшалось или оставалось прежним в процессе полета, или в начальный момент времени сообщить им значительную скорость, чтобы время полета было минимальным и объем, занимаемый частицами, увеличился в наименьшей степени.

Формулы (8) и (9) позволяют аналитически определить зависимость концентрации заряженных частиц от времени при условии, что известны некоторые особенности их движения для определения постоянных в самой формуле. Полученное решение может быть полезно для расчета не только капельно-холодильных излучателей, но и некоторых видов вакуумных приборов, в которых присутствуют пучки заряженных частиц. Также оно может быть полезным при верификации численных расчетов движения заряженных сред методами механики сплошной среды и методами молекулярной динамики [7].

Список литературы

[1] *Mattick A.T., Hertzberg A.* // J. Energy. 1981. Vol. 5. N 6. P. 387–393.
[2] *Bruckner A.P., Mattick A.T.* // Acta Astronautica. 1984. Vol. 11. N 7–8. P. 519–526.
[3] *Joslyn T.B.* Charging effects on fluid stream droplets for momentum exchange between spacecraft. A dissertation submitted to the Graduate Faculty of the University of Colorado. Department of Mechanical and Aerospace Engineering. 2009.
[4] *Конюхов Г.В., Коротеев А.А.* // Труды МАИ. 2006. № 25. С. 3–15.
[5] *Прудников А.П., Бычков Ю.А., Маричев О.И.* Интегралы и ряды. М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1981.
[6] *Сивухин Д.В.* Общий курс физики: Учеб. пособие: Для вузов. В. 5 т. Т. 3. Электричество. 5-е изд., стер. М.: Физматлит, 2009. 656 с. С. 44.
[7] *Haile J.M.* Molecular dynamics simulation. Wiley, 1992.