01,07

# Дислокационная нелинейность и нелинейные волновые процессы в поликристаллах с дислокациями

© В.Е. Назаров

Институт прикладной физики РАН,
Нижний Новгород, Россия

E-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

(Поступила в Редакцию 16 февраля 2016 г.)

На основе модификации линейной части дислокационной теории поглощения Гранато–Люкке получено уравнение состояния поликристаллических твердых тел с диссипативной и реактивной нелинейностью и проведено теоретическое исследование нелинейных эффектов взаимодействия и самовоздействия продольных упругих волн в таких средах.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 15-05-05145а).

## 1. Введение

Механические (упругие и неупругие, линейные и нелинейные) свойства поликристаллических твердых тел (в частности, металлов) во многом определяются дислокациями — одномерными дефектами их кристаллической решетки [1–6]. Движение дислокаций в поле динамических напряжений и их взаимодействие с точечными дефектами (вакансиями, межузельными и примесными атомами) приводят к внутреннему трению, что является причиной дислокационного поглощения упругих колебаний и волн в поликристаллах [7–17]. Для объяснения явления внутреннего трения металлов Гранато и Люкке (на основе струнной модели дислокации Келера [7]) создали дислокационную теорию поглощения [8–13]. Эта теория состоит из двух частей — линейной и нелинейной — и определяет соответственно линейные (амплитудно-независимые) и нелинейные (амплитудно-зависимые) потери и дефект модуля упругости. Линейные потери (и дефект модуля) имеют место при малых динамических напряжениях, недостаточных для отрыва сегментов дислокаций от примесных атомов; они связаны с торможением движущихся дислокаций в вязкой среде и проявляются на высоких частотах (ВЧ) в области их резонансных частот, в диапазоне десятков и сотен мегагерц. Нелинейные потери (и дефект модуля также) имеют место при больших напряжениях в области относительно низких частот (НЧ); они связаны с отрывом сегментов дислокаций от примесных атомов и с различным их поведением на стадиях нагрузки и разгрузки. Это определяет гистерезисный характер уравнения состояния поликристаллов, т.е. нелинейную зависимость напряжение–деформация. В дислокационной теории Гранато–Люкке гистерезисные эффекты амплитудно-зависимого внутреннего трения (АЗВТ) от частоты не зависят, однако, как показывают эксперименты, с ростом частоты деформирования гистерезисная нелинейность поликристаллических твердых тел уменьшается [18].

Дислокационная теория Гранато–Люкке вполне удовлетворительно описывает амплитудно-независимые эффекты внутреннего трения и качественно объясняет результаты измерений гистерезисных эффектов АЗВТ во многих достаточно чистых металлах. Для металлов же с относительно большой концентрацией примесей результаты измерений эффектов АЗВТ часто не соответствуют теории, при этом могут наблюдаться различные амплитудные зависимости гистерезисных эффектов для одного и того же металла [19–21]. Так, например, в меди наблюдались линейная [19], квадратичная [20] и экспоненциальная [21] зависимости нелинейных потерь от амплитуды деформации, что связано с большой чувствительностью АЗВТ к малому изменению концентрации примесей и плотности дислокаций. Кроме того, в некоторых поликристаллических металлах и горных породах (отожженная медь, цинк, свинец, гранит, магнезит, мрамор, песчаник, известняк и т.д.) наблюдаются также и другие чрезвычайно сильные нелинейные эффекты, в частности затухание и фазовая задержка несущей слабой ВЧ-волны под действием сильной НЧ-волны и самовоздействие интенсивной ВЧ-волны. Такие эффекты не описываются теорией Гранато–Люкке и обусловлены не гистерезисной, а диссипативной (неупругой) и реактивной (упругой) нелинейностью [18]. Нелинейные свойства поликристаллов более чувствительны к их дислокационной структуре, чем линейные, поэтому исследования нелинейных волновых процессов в таких средах способствуют изучению динамики дислокаций и созданию моделей их движения под действием динамических напряжений, что необходимо для развития теории прочности и пластичности — одного из актуальных направлений физики твердого тела [1–6].

В настоящей работе на основе модификации линейной части дислокационной теории Гранато–Люкке получено уравнение состояния поликристаллических твердых тел с дислокационной диссипативной и реактивной нелинейностью и проведено теоретическое исследование нелинейных волновых процессов в таких средах. При получении уравнения состояния поликристалла мы не будем учитывать линейную диссипацию однородного твердого тела и его решеточную (квадратичную) нелинейность, описываемую пятиконстантной теорией упругости [22].

## 2. Уравнение состояния поликристалла с дислокационной диссипативной и реактивной нелинейностью

Для описания амплитудно-фазовых эффектов взаимодействия упругих волн, а именно затухания и фазовой задержки несущей слабых ультразвуковых импульсов под действием сильной НЧ-волны, не связанных с гистерезисной нелинейностью, модифицируем линейную часть дислокационной теории Гранато–Люкке и получим нелинейное уравнение состояния поликристалла с дислокациями. Для этого смещение $\xi = \xi(y, t)$ дислокации длины $l$ под действием переменного сдвигового напряжения $\tau$ будем описывать уравнением поперечных колебаний струны [7–13], содержащим малые нелинейные слагаемые (инерционное $A\eta|\xi/b|^{n-r}|\xi_t/C_\perp|^r\xi_{tt}$ и диссипативное $B\mu|\xi/b|^{m-q}|\xi_t/C_\perp|^q\xi_t$):

$$A\left[1+\eta|\xi/b|^{n-r}|\xi_t/C_\perp|^r\right]\xi_{tt} + B\left[1+\mu|\xi/b|^{m-q}|\xi_t/C_\perp|^q\right]\xi_t - C\xi_{yy} = b\tau, \quad (1)$$

где $A = \pi\rho b^2$ — масса единицы длины дислокации, $B$ — линейный коэффициент трения, $C = 2Gb^2/\pi(1-\nu)$ — эффективное натяжение, $G$, $\nu$, $\rho$ и $C_\perp = (G/\rho)^{1/2}$ — модуль сдвига, коэффициент Пуассона, плотность и скорость сдвиговой волны для монокристалла, $b$ — модуль вектора Бюргерса, $\mu$, $\eta$ и $m$, $q$, $n$, $r$ — соответственно безразмерные параметры и показатели степени диссипативной и реактивной нелинейности, $m \geq q \geq 0$, $n \geq r \geq 0$, $|\mu|\left|\xi/b\right|^{m-q}\left|\xi_t/C_\perp\right|^q \ll 1$, $|\eta|\left|\xi/b\right|^{n-r}\left|\xi_t/C_\perp\right|^r \ll 1$, $y$ — координата вдоль линии дислокации, $\xi(0,t) = \xi(l,t) = 0$. Для металлов длина дислокаций и коэффициент трения $B$ находятся в пределах $10^{-6}$–$10^{-3}$ cm и $5\cdot10^{-5}$–$5\cdot10^{-3}$ dyn $\cdot$ (s/cm$^2$) соответственно [8–14].

Функциональная структура введенных в уравнение (1) нелинейных слагаемых $A\eta|\xi/b|^{n-r}|\xi_t/C_\perp|^r\xi_{tt}$ и $B\mu|\xi/b|^{m-q}|\xi_t/C_\perp|^q\xi_t$ задается в соответствии с экспериментально наблюдаемыми степенными зависимостями коэффициента затухания и фазовой задержки несущей слабой ВЧ-волны под действием мощной НЧ-волны от ее амплитуды и частоты, при этом параметры нелинейности $\mu$, $\eta$ и показатели $m$, $q$, $n$, $r$ для каждого поликристаллического твердого тела определяются из сравнения аналитических расчетов с результатами эксперимента. Наличие таких слагаемых в уравнении движения дислокации приведет соответственно к ВЧ-реактивной и диссипативной нелинейности уравнения состояния поликристалла, причем последние не будут вносить вклад в НЧ-эффекты АЗВТ, обусловленные гистерезисной нелинейностью. Для многих поликристаллических твердых тел (цинк, свинец, гранит, магнезит, мрамор, песчаник, известняк) нелинейные эффекты затухания и фазовой задержки несущей слабой ВЧ-волны под действием мощной НЧ-волны накачки не зависят от ее частоты, так что для них $r = 0$, $q = 0$, однако в общем случае $r \neq 0$, $q \neq 0$. Так, например, для отожженной меди $r \cong 1/2$, $q \cong 1/2$. Более разнообразно ведут себя показатели степени диссипативной нелинейности поликристаллов: для отожженной меди (в зависимости от температуры отжига) $m = 1, 3/2, 2$ [23], для неотожженного цинка $m = 3/2$, для отожженного $m = 2$ [24], для свинца $m = 1$ [25], для мрамора $m = 2$ [26], для гранита [26] и магнезита [27] $m = 1$. Аналогично ведут себя показатели степени реактивной нелинейности: для гранита $n = 1$ [28], для мрамора $n = 3/2$ [29], для магнезита $n = 1$ [27].

Для получения уравнения состояния поликристалла определим его сдвиговую деформацию $\gamma(\tau)$ под действием сдвигового напряжения $\tau$ [8]

$$\gamma(\tau) = (\tau/G) + \gamma_{\text{dis}}(\tau), \quad (2)$$

где

$$\gamma_{\text{dis}}(\tau) = b\int_0^\infty\int_0^l \xi(y,t)N(l)\,dy\,dl$$

— сдвиговая дислокационная деформация, связанная со смещением $\xi(y,t)$ дислокаций, $N = N(l)$ — функция распределения сегментов дислокаций по длинам $l$,

$$\int_0^\infty lN(l)dl = \Lambda$$

— плотность дислокаций. Как показано далее, функция распределения $N = N(l)$ определяет зависимость нелинейных эффектов от частот взаимодействующих волн.

Решение уравнения (1) будем искать методом возмущений, полагая при этом, что колебания дислокации на основной моде являются доминирующими [8,10,12,13]

$$\xi(y,t) = [\xi_0(t) + \xi_1(t)]\sin\frac{\pi y}{l}, \quad |\xi_1(t)| \ll |\xi_0(t)|. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (1), находим

$$\xi_0(t) = \frac{8b}{\pi\lambda A}\int_{-\infty}^{t}\tau(t_1)\exp\left[\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right]\sin\left[\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right]dt_1, \quad (4)$$

$$\xi_1(t) = -\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{t}\left(\delta d_0 D_0(t_1)\frac{d\xi_0(t_1)}{dt_1} + gG_0(t_1)\frac{d^2\xi_0(t_1)}{dt_1^2}\right) \times \exp\left[\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right]\sin\left[\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right]dt_1, \quad (5)$$

где

$$\delta = \frac{4\mu}{\sqrt{\pi}b^{m-q}C_\perp^q}\frac{\Gamma[(m+3)/2]}{\Gamma[(m+4)/2]},$$

$$g = \frac{4\eta}{\sqrt{\pi}b^{n-r}C_\perp^r}\frac{\Gamma[(n+3)/2]}{\Gamma[(n+4)/2]},$$

$$D_0(t_1) = \left|\xi_0(t_1)\right|^{m-q}\left|\frac{d\xi_0(t_1)}{dt_1}\right|^q,$$

$$G_0 = \left|\xi_0(t_1)\right|^{n-r}\left|\frac{d\xi_0(t_1)}{dt_1}\right|^r, \quad \lambda^2 = 4\Omega^2 - d_0^2,$$

$$\Omega = (\pi/l)(C/A)^{1/2} = [2/(1-\nu)]^{1/2}(C_\perp/l)$$

— резонансная частота основной моды колебания дислокации длины $l$, $d_0 = B/A$ — параметр демпфирования.

Для меди резонансная частота $\Omega$ дислокации длиной $l = 10^{-3}$ cm является достаточно высокой и составляет $3.9 \cdot 10^8$ Hz [8,10]. Однако, если при отрыве от примесных атомов под действием мощной НЧ-волны длина дислокации увеличивается в $10^3$ раз, то резонансная частота дислокации уменьшается во столько же раз и находится в диапазоне сотен килогерц.

Подставляя (3) в (2), получим (при плавной функции распределения $N = N(l)$ и небольшой плотности дислокаций, когда $(C_\perp/\omega)^2 l_\omega^2 N(l_\omega) \ll 1$, $\omega$ — частота деформирования, $l_\omega = [2/(1-\nu)]^{1/2}(C_\perp/\omega)$ — длина дислокации с резонансной частотой, равной $\omega$) уравнение состояния $\tau = \tau(\gamma)$ поликристалла с дислокационной диссипативной и реактивной нелинейностью для сдвиговых напряжений и деформаций

$$\tau(\gamma) = G\Bigg\{\gamma - \frac{16C_\perp^2}{\pi^3}\int_0^\infty\int_{-\infty}^t \gamma(t_1)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right) \times \sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\,\frac{lN(l)dl}{\lambda} + \frac{16C_\perp^2}{\pi^3} \times \int_0^\infty\int_{-\infty}^t\left(\delta d_0 D_\gamma(t_1)\frac{d\upsilon(t_1)}{dt_1} + gG_\gamma(t_1)\frac{d^2\upsilon(t_1)}{dt_1^2}\right) \times \exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\frac{lN(l)dl}{\lambda^2}\Bigg\}, \tag{6}$$

где

$$\begin{pmatrix} D_\gamma(t_1) \\ G_\gamma(t_1)\end{pmatrix} = \left(\frac{4C_\perp^2}{\pi^2\lambda b}\right)^{\binom{m}{n}} \left|2\upsilon(t_1)\right|^{\binom{m-q}{n-r}} \left|\frac{d\upsilon(t_1)}{dt_1}\right|^{\binom{q}{r}}, \tag{7}$$

$$\upsilon(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1}\gamma(t_2)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_2-t_1)\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right)dt_2. \tag{8}$$

Переходя в выражении для $\gamma_{\text{dis}}(\tau)$ от сдвиговых напряжений $\tau$ и деформаций $\gamma$ к продольным напряжениям $\sigma$ и деформациям $\varepsilon$ [8,10], получим аналогично (6) уравнение состояния $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ для продольных напряжений и деформаций

$$\sigma(\varepsilon) = E\Bigg\{\varepsilon - \frac{16TC_0^2}{\pi^3}\int_0^\infty\int_{-\infty}^t \varepsilon(t_1)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right) \times \sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\,\frac{lN(l)dl}{\lambda} + \frac{16TC_0^2}{\pi^3} \times \int_0^\infty\int_{-\infty}^t\left(\delta d_0 D_\varepsilon(t_1)\frac{de(t_1)}{dt_1} + gG_\varepsilon(t_1)\frac{d^2e(t_1)}{dt_1^2}\right) \times \exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\,\frac{lN(l)dl}{\lambda^2}\Bigg\}, \tag{9}$$

где

$$\begin{pmatrix} D_\varepsilon(t_1) \\ G_\varepsilon(t_1)\end{pmatrix} = \left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2\lambda b}\right)^{\binom{m}{n}} \left|2e(t_1)\right|^{\binom{m-q}{n-r}} \left|\frac{de(t_1)}{dt_1}\right|^{\binom{q}{r}}, \tag{10}$$

$$e(t_1) = \int_{-\infty}^{t_1}\varepsilon(t_2)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_2-t_1)\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t_1-t_2)\right)dt_2. \tag{11}$$

Здесь $E$ — модуль упругости для монокристалла, $C_0 = \sqrt{E/\rho}$ — скорость продольной волны, $R$ — множитель, учитывающий ориентацию направления распространения продольной волны по отношению к плоскостям и направлению скольжения в поликристалле, $T$ — ориентационный фактор, учитывающий распределение дислокаций по всем системам скольжения [8,10] (для изотропных поликристаллов $R = 2/\pi^2$, $T \approx 4 \cdot 10^{-2}$ [8,10,13]).

Заметим, что уравнение состояния наиболее полно описывает упругие и неупругие свойства среды, поскольку именно уравнение состояния позволяет в полной мере исследовать волновые процессы, протекающие при распространении и взаимодействии в среде упругих волн.

В НЧ-приближении ($\omega \ll \Omega$, $\Omega^2/d_0$) находим

$$\begin{pmatrix} D_\varepsilon(t) \\ G_\varepsilon(t)\end{pmatrix} = \left(\frac{2RC_0^2}{\pi^2 b\Omega^2}\right)^{\binom{m}{n}} \left|2\varepsilon(t)\right|^{\binom{m-q}{n-r}} \left|\varepsilon_t(t)\right|^{\binom{q}{r}},$$

при этом уравнение состояния (9) имеет простой вид, в котором (при

$$\frac{\delta d_0^2\omega^{q-r}}{g\Omega^2}\left(\frac{2RC_0^2\varepsilon_0}{\pi^2 b\Omega^2}\right)^{m-n} \ll 1,$$

$\varepsilon_0$ — амплитуда деформации) диссипативная и реактивная нелинейности разделены и входят аддитивно

$$\sigma(\varepsilon) = E\Bigg[\left(1 - \frac{8TC_0^2}{\pi^3}\int_0^\infty\frac{lN(l)dl}{\Omega^2}\right)\varepsilon + \left(\frac{8TC_0^2}{\pi^3}\int_0^\infty\frac{lN(l)dl}{\Omega^4}\right)d_0\varepsilon_t + \frac{4TC_0^2}{\pi^3}\left(\frac{2RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^m \times \int_0^\infty\frac{lN(l)dl}{\Omega^{2m+4}}\,\delta d_0|2\varepsilon|^{m-q}|\varepsilon_t|^q\varepsilon_t + \frac{4TC_0^2}{\pi^3}\left(\frac{2RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^n \times \int_0^\infty\frac{lN(l)dl}{\Omega^{2n+4}}\,g|2\varepsilon|^{n-r}|\varepsilon_t|^r\varepsilon_{tt}\Bigg]. \tag{12}$$

Из этого уравнения отчетливо видны различия проявлений диссипативной ($\propto \delta d_0|2\varepsilon|^{m-q}|\varepsilon_t|^q\varepsilon_t$) и реактивной

($\propto g|2\varepsilon|^{n-r}|\varepsilon_t|^r\varepsilon_{tt}$) нелинейностей, структура которых повторяет структуру соответствующих нелинейных слагаемых в уравнении движения дислокации: диссипативная нелинейность приводит к зависимости коэффициента поглощения, а реактивная — к зависимости модуля упругости от амплитуды деформации. Из уравнения (12) также следует, что в НЧ-диапазоне диссипативная и реактивная нелинейности малы и не влияют на эффекты АЗВТ, обусловленные гистерезисной нелинейностью поликристалла.

Подставляя уравнение состояния (9) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon)$, где $U = U(x, t)$ — смещение [22], получим волновое уравнение для продольных волн деформации $\varepsilon(x, t) = \partial U(x, t)/\partial x$, определяющее волновые процессы в поликристаллических твердых телах, обладающих ВЧ-дислокационной диссипативной и реактивной нелинейностью:

$$\varepsilon_{tt} - C_0^2\varepsilon_{xx} = -\frac{16TC_0^4}{\pi^3}\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^t \varepsilon_{xx}(t_1)\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)$$

$$\times\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\,\frac{lN(l)dl}{\lambda} + \frac{16TC_0^4}{\pi^3}$$

$$\times\int\limits_0^\infty\int\limits_{-\infty}^t\left(\delta d_0\left[D_\varepsilon(t_1)\,\frac{de(t_1)}{dt_1}\right]_{xx} + g\left[G_\varepsilon(t_1)\,\frac{d^2e(t_1)}{dt_1^2}\right]_{xx}\right)$$

$$\times\exp\left(\frac{d_0}{2}(t_1-t)\right)\sin\left(\frac{\lambda}{2}(t-t_1)\right)dt_1\,\frac{lN(l)dl}{\lambda^2}. \qquad (13)$$

Слагаемые в правой части этого уравнения определяют соответственно линейные диссипацию и дисперсию слабых упругих волн в поликристаллах и нелинейные процессы, возникающие при распространении и взаимодействии в них интенсивных упругих волн.

## 3. Затухание и фазовая задержка несущей ультразвукового импульса под действием низкочастотной волны в резонаторе

Исследуем сначала нелинейные эффекты, возникающие при распространении слабого ВЧ-импульса в поле мощной резонансной (стоячей) НЧ-волны накачки в стержне, когда для последней стержень является резонатором, а для ВЧ-импульса — фактически безграничной средой. Для резонатора с жесткой ($x = 0$) и мягкой ($x = L$) границами выражение для деформации НЧ-волны имеет вид

$$\varepsilon_1(x, t) = \varepsilon_m\cos K_px\sin\{[\Omega_p - \Delta\Omega_p(\varepsilon_m)]t + \theta\},$$

где $\varepsilon_m$ — амплитуда волны, $K_pL = \pi(2p-1)/2$, $L$ — длина стержня, $p$ — номер продольной моды, $\Omega_p = C_0K_p$, $\Delta\Omega_p(\varepsilon_m)$ — нелинейная расстройка резонансной частоты резонатора от линейного резонанса, $\Delta\Omega(\varepsilon_m) \ll \Omega_p/p$, $\theta = \mathrm{const}$. Граничное условие для слабой ВЧ-волны зададим в виде

$$\varepsilon(x = 0, t) = a_0\cos\omega t.$$

Полагая в (13) $\varepsilon(x, t) = \varepsilon_1(x, t) + \varepsilon_2(x, t)$, $|\varepsilon_1(x, t)| \gg |\varepsilon_2(x, t)|$, $|\varepsilon_{1t}(x, t)| \gg |\varepsilon_{2t}(x, t)|$, $\varepsilon_2(x, t) = a(x) \times \exp\{j[(\omega t - kx) - \varphi(x)]\}/2 + \text{c.c.}$, $\Omega_p \ll \omega$, $K_p \ll k = \omega/C_0$, $a_x(x) \ll ka(x)$, $\varphi_x(x) \ll k\varphi(x)$ и выделяя в нем слагаемые на частоте $\omega$, получим уравнения для амплитуды $a(x)$ и фазы $\varphi(x)$ ВЧ-импульса

$$\frac{1}{a(x)}\,\frac{da(x)}{dx} = -\frac{4TC_0}{\pi^3}\,d_0\omega^2\int\limits_0^\infty\frac{lN(l)dl}{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + d_0^2\omega^2\right]}$$

$$-\mu P\varepsilon_m^m\left|\cos K_px\right|^m\Omega_p^qd_0\omega^2$$

$$\times\int\limits_0^\infty\frac{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 - d_0^2\omega^2\right]lN(l)dl}{\left[\left(\Omega_p^2-\Omega^2\right)^2 + d_0^2\Omega_p^2\right]^{m/2}\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + d_0^2\omega^2\right]^2}$$

$$-2\eta Q\varepsilon_m^n\left|\cos K_px\right|^n\Omega_p^rd_0\omega^4$$

$$\times\int\limits_0^\infty\frac{\left(\Omega^2-\omega^2\right)lN(l)dl}{\left[\left(\Omega_p^2-\Omega^2\right)^2 + d_0^2\Omega_p^2\right]^{n/2}\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + d_0^2\omega^2\right]^2}, \qquad (14)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{4TC_0}{\pi^3}\,\omega\int\limits_0^\infty\frac{\left(\Omega^2-\omega^2\right)lN(l)dl}{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + d_0^2\omega^2\right]}$$

$$-2\mu P\varepsilon_m^m\left|\cos K_px\right|^m\Omega_p^qd_0^2\omega^3$$

$$\times\int\limits_0^\infty\frac{\left(\Omega^2-\omega^2\right)lN(l)dl}{\left[\left(\Omega_p^2-\Omega^2\right)^2 + d_0^2\Omega_p^2\right]^{m/2}\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + d_0^2\omega^2\right]^2}$$

$$+\eta Q\varepsilon_m^n\left|\cos K_px\right|^n\Omega_p^r\omega^3$$

$$\times\int\limits_0^\infty\frac{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 - d_0^2\omega^2\right]lN(l)dl}{\left[\left(\Omega_p^2-\Omega^2\right)^2 + d_0^2\Omega_p^2\right]^{n/2}\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + d_0^2\omega^2\right]^2}, \qquad (15)$$

где

$$P = \frac{8TC_0}{\pi^{9/2}}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2b^2}\right)^m\left(\frac{b}{C_\perp}\right)^q\frac{\Gamma[(m+3)/2]}{\Gamma(m+4)/2}$$

$$\times(q+1)B[(m-q+1)/2,\,(q+1)/2],$$

$$Q = \frac{8TC_0}{\pi^{9/2}}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2b^2}\right)^n\left(\frac{b}{C_\perp}\right)^r\frac{\Gamma[(n+3)/2]}{\Gamma(n+4)/2}$$

$$\times B[(n-r+1)/2,\,(r+1)/2],$$

$\Gamma[x]$ и $B[x, y]$ — гамма- и бета-функции, а функция $N = N(l)$ определяет распределение дислокаций по длинам $l$ после отрыва их сегментов от примесных атомов (под действием мощной НЧ-волны накачки).

Из уравнений (14), (15) находим нелинейные коэффициент затухания $\chi(\varepsilon_m)=\ln[a_0/a(x=L)]$ и фазовую задержку несущей $\Delta T_1(\varepsilon_m)$ слабого ВЧ-импульса под действием мощной НЧ-волны в резонаторе

$$\chi(\varepsilon_m)=\frac{\mu P\Gamma[(m+1)/2]}{\sqrt{\pi}\Gamma[(m+2)/2]}\,\varepsilon_m^m\Omega_p^qLd_0\omega^2$$
$$\times\int\limits_0^\infty\frac{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2-d_0^2\omega^2\right]lN(l)dl}{\left[\left(\Omega_p^2-\Omega^2\right)^2+d_0^2\Omega_p^2\right]^{m/2}\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2+d_0^2\omega^2\right]^2}$$
$$+\frac{2\eta Q\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi}\Gamma[(n+2)/2]}\,\varepsilon_m^n\Omega_p^rLd_0\omega^4$$
$$\times\int\limits_0^\infty\frac{\left(\Omega^2-\omega^2\right)lN(l)dl}{\left[\left(\Omega_p^2-\Omega^2\right)^2+d_0^2\Omega_p^2\right]^{n/2}\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2+d_0^2\omega^2\right]^2},\tag{16}$$

$$\Delta T_1(\varepsilon_m)=-\frac{2\mu P\Gamma[(m+1)/2]}{\sqrt{\pi}\Gamma[(m+2)/2]}\,\varepsilon_m^m\Omega_p^qLd_0^2\omega^2$$
$$\times\int\limits_0^\infty\frac{\left(\Omega^2-\omega^2\right)lN(l)dl}{\left[\left(\Omega_p^2-\Omega^2\right)^2+d_0^2\Omega_p^2\right]^{m/2}\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2+d_0^2\omega^2\right]^2}$$
$$+\frac{\eta Q\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi}\Gamma[(n+2)/2]}\,\varepsilon_m^n\Omega_p^rL\omega^2$$
$$\times\int\limits_0^\infty\frac{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2-d_0^2\omega^2\right]lN(l)dl}{\left[\left(\Omega_p^2-\Omega^2\right)^2+d_0^2\Omega_p^2\right]^{n/2}\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2+d_0^2\omega^2\right]^2}.\tag{17}$$

Из этих уравнений видно, что, вообще говоря, и диссипативная, и реактивная нелинейность приводят к изменениям амплитуды и фазы ВЧ-импульса под действием НЧ-волны накачки. В относительно низкочастотном диапазоне при $m<n$ каждая из этих нелинейностей отвечает только за „свой“ эффект: диссипативная — за „затухание звука на звуке“, а реактивная — за фазовую задержку несущей:

$$\chi(\varepsilon_m)=\frac{\mu P\Gamma[(m+1)/2]}{\sqrt{\pi}\Gamma[(m+2)/2]}\,\varepsilon_m^m\Omega_p^qLd_0\omega^2$$
$$\times\int\limits_0^\infty\frac{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2-d_0^2\omega^2\right]lN(l)dl}{\left[\left(\Omega_p^2-\Omega^2\right)^2+d_0^2\Omega_p^2\right]^{m/2}\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2+d_0^2\omega^2\right]^2},\tag{18}$$

$$\Delta T_1(\varepsilon_m)=\frac{\eta Q\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi}\Gamma[(n+2)/2]}\,\varepsilon_m^n\Omega_p^rL\omega^2$$
$$\times\int\limits_0^\infty\frac{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2-d_0^2\omega^2\right]lN(l)dl}{\left[\left(\Omega_p^2-\Omega^2\right)^2+d_0^2\Omega_p^2\right]^{n/2}\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2+d_0^2\omega^2\right]^2}.\tag{19}$$

Из этих выражений следует, что при одинаковых длинах дислокаций $l=l_0$, $N(l)=(\Lambda/l_0)\delta(l-l_0)$, $\Omega_0=[2/(1-\nu)]^{1/2}(C_\perp/l_0)$ знаки $\chi(\varepsilon_m)$ и $\Delta T_1(\varepsilon_m)$ зависят от частоты $\omega$: в диапазонах $0\le\omega\le\Omega_1=\{-d_0+[d_0^2+4\Omega_0^2]^{1/2}\}/2$ и $\omega>\Omega_2=\{d_0+[d_0^2+4\Omega_0^2]^{1/2}\}/2$ имеем $\chi(\varepsilon_m)\ge0$, $\Delta T_1(\varepsilon_m)\ge0$, а в диапазоне $\Omega_1<\omega<\Omega_2$ — $\chi(\varepsilon_m)<0$, $\Delta T_1(\varepsilon_m)<0$, т.е. в поликристаллах, вообще говоря, может наблюдаться не только затухание, но и „усиление звука на звуке“. Из выражения (18) также видно, что на низких частотах ($\omega\ll\Omega^*=\Omega_0^2/d_0$) $\chi(\varepsilon_m)$, $\Delta T_1(\varepsilon_m)\sim\omega^2$, а на высоких ($\omega\gg\Omega_2$) — $\chi(\varepsilon_m)$, $\Delta T_1(\varepsilon_m)\sim\omega^{-2}$. В диапазоне „промежуточных“ частот будут наблюдаться „промежуточные“ зависимости $\chi(\varepsilon_m)$ и $\Delta T_1(\varepsilon_m)$ от $\omega$; их конкретный вид определяется функцией распределения дислокаций по длинам $N=N(l)$ и параметром демпфирования $d_0$.

В НЧ-диапазоне ($\omega\ll\Omega$, $d_0\omega\ll\Omega^2$) из выражений (18), (19) получаем

$$\chi(\varepsilon_m)=\frac{\mu P\Gamma[(m+1)/2]}{\sqrt{\pi}\Gamma[(m+2)/2]}\,\varepsilon_m^m\Omega_p^qLd_0\omega^2\int\limits_0^\infty\frac{lN(l)dl}{\Omega^{2m+4}},\tag{20}$$

$$\Delta T_1(\varepsilon_m)=\frac{\eta Q\Gamma[(n+1)/2]}{\sqrt{\pi}\Gamma[(n+2)/2]}\,\varepsilon_m^n\Omega_p^rL\omega^2\int\limits_0^\infty\frac{lN(l)dl}{\Omega^{2n+4}}.\tag{21}$$

Таким образом, из сравнения амплитудно-частотных зависимостей выражений для $\chi=\chi(\varepsilon_m)$ и $\Delta T_1=\Delta T_1(\varepsilon_m)$ с результатами соответствующих экспериментов можно определить показатели степени и параметры диссипативной и реактивной нелинейности и параметр демпфирования, а по ним — эффективные характеристики дислокационной структуры поликристалла (распределение дислокаций по длинам и их плотность). Нелинейные эффекты затухания и фазовой задержки несущей слабой ВЧ-волны под действием сильной НЧ-волны наблюдались в поликристаллических металлах (отожженная медь [23], цинк [24], свинец [25]) и горных породах (гранит [26,28], мрамор [26,29], магнезит [27]).

## 4. Самовоздействие интенсивной высокочастотной волны

Исследуем теперь амплитудно-фазовые эффекты, возникающие при самовоздействии в поликристалле интенсивной ВЧ-волны. В этом случае, в отличие от эффектов влияния мощной НЧ-волны на распространение слабого ультразвукового импульса, функция распределения $N=N(l)$ будет определяться не дислокационной сеткой, а примесными атомами. Это связано с тем, что с ростом частоты упругой волны гистерезисная нелинейность, обусловленная отрывом дислокаций от примесных атомов, уменьшается [18]; следовательно, на ультразвуковых частотах отрыва сегментов дислокаций от примесных атомов не происходит, поэтому распределение $N = N(l)$ сегментов дислокаций по длинам $l$ определяется примесными атомами, при этом, согласно распределению Келера [7–10,12], $N(l) = (\Lambda/l_0^2)\exp(-l/l_0)$, $l_0$ — средняя длина сегмента дислокации.

Подставляя в (13) $\varepsilon(x,t) = a(x)\cos[(\omega t - kx) - \varphi(x)] + \tilde{\varepsilon}(x,t)$, $a(x=0) = a_0$ и считая, что $a_x(x) \ll ka(x)$, $\varphi_x(x) \ll k\varphi(x)$, $|\tilde{\varepsilon}(x,t)| \ll a(x)$, после несложных вычислений получаем уравнения для амплитуды $a(x)$ и фазы $\varphi(x)$ ВЧ-волны

$$\frac{1}{a(x)}\,\frac{da(x)}{dx} = -\frac{4TC_0}{\pi^3}\,\omega Z(\omega) - \mu H a^m(x) d_0 \omega^{q+2} \times \int_0^\infty \frac{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 - d_0^2\omega^2\right] lN(l)dl}{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + d_0^2\omega^2\right]^{(m+4)/2}} - \eta F a^n(x) d_0 \omega^{r+4} \int_0^\infty \frac{(\Omega^2-\omega^2) lN(l)dl}{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 - d_0^2\omega^2\right]^{(n+4)/2}}, \quad (22)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{4TC_0}{\pi^3}\,\omega W(\omega) - 2\mu H a^m(x) d_0^2 \omega^{q+3} \times \int_0^\infty \frac{(\Omega^2-\omega^2) lN(l)dl}{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + d_0^2\omega^2\right]^{(m+4)/2}} + 2\eta F a^n(x) \omega^{r+3} \int_0^\infty \frac{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 - d_0^2\omega^2\right] lN(l)dl}{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + d_0^2\omega^2\right]^{(n+4)/2}}, \quad (23)$$

где

$$Z(\omega) = \omega d_0 \int_0^\infty \frac{lN(l)dl}{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + \omega^2 d_0^2\right]},$$

$$W(\omega) = \int_0^\infty \frac{(\Omega^2-\omega^2) lN(l)dl}{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + \omega^2 d_0^2\right]},$$

$$H = \frac{8TC_0}{\pi^{9/2}}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b^2}\right)^m \left(\frac{b}{C_\perp}\right)^q \frac{\Gamma[(m+3)/2]}{\Gamma[(m+4)/2]} \times B[(m-q+1)/2, (q+3)/2],$$

$$F = \frac{8TC_0}{\pi^{9/2}}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b^2}\right)^n \left(\frac{b}{C_\perp}\right)^r \frac{\Gamma[(n+3)/2]}{\Gamma[(n+4)/2]} \times B[(n-r+3)/2, (r+1)/2].$$

Первые слагаемые в правых частях уравнений (22), (23), так же как и в (14), (15), отвечают за линейные затухание и изменение фазовой скорости ВЧ-волны, а вторые и третьи описывают изменения ее амплитуды и фазы за счет диссипативной и реактивной нелинейности соответственно. В относительно низкочастотном диапазоне и при $m < n$ каждая из этих нелинейностей отвечает также только за „свой“ эффект: диссипативная — за нелинейное ограничение амплитуды волны (или самопросветление среды), а реактивная — за изменение фазовой скорости волны (т.е. ее фазовой задержки):

$$\frac{1}{a(x)}\,\frac{da(x)}{dx} = -\frac{4TC_0}{\pi^3}\,\omega Z(\omega) - \mu H a^m(x) d_0 \omega^{q+2} \times \int_0^\infty \frac{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 - d_0^2\omega^2\right] lN(l)dl}{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + d_0^2\omega^2\right]^{(m+4)/2}}, \quad (24)$$

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{4TC_0}{\pi^3}\,\omega W(\omega) + 2\eta F a^n(x) \omega^{r+3} \times \int_0^\infty \frac{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 - d_0^2\omega^2\right] lN(l)dl}{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 - d_0^2\omega^2\right]^{(n+4)/2}}. \quad (25)$$

Из уравнений (24), (25) находим выражения для амплитуды $a(L)$ и нелинейной задержки несущей $\Delta T_2(L)$ импульса на длине $L$

$$a(L) = \frac{a_0 \exp[-A_1(\omega)L]}{\left[1 + \frac{B_1(\omega)\left[1 - \exp[-mA_1(\omega)L]\right]}{A_1(\omega)}\, a_0^m\right]^{1/m}}, \quad (26)$$

$$\Delta T_2(L) = B_2(\omega) \int_0^L a^n(x)dx, \quad (27)$$

где

$$A_1(\omega) = \frac{4TC_0}{\pi^3}\,\omega Z(\omega) > 0,$$

$$B_1(\omega) = \mu H d_0 \omega^{q+2} \int_0^\infty \frac{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 - d_0^2\omega^2\right] lN(l)dl}{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + d_0^2\omega^2\right]^{(m+4)/2}},$$

$$B_2(\omega) = 2\eta F \omega^{r+2} \int_0^\infty \frac{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 - d_0^2\omega^2\right] lN(l)dl}{\left[\left(\Omega^2-\omega^2\right)^2 + d_0^2\omega^2\right]^{(n+4)/2}}.$$

При

$$\left|\frac{B_1(\omega)}{A_1(\omega)}\left[1 - \exp[-mA_1(\omega)L]\right] a_0^m\right| \ll 1$$

из выражений (26), (27) имеем

$$a(L) \cong a_0 \exp[-A_1(\omega)L] \times \left[1 - \frac{B_1(\omega)\left[1 - \exp[-mA_1(\omega)L]\right]}{mA_1(\omega)}\, a_0^m\right],$$

$$\Delta T_2(L) \cong a_0^n B_2(\omega)\left[1 - \frac{nB_1(\omega)}{mA_1(\omega)} \times \left(1 - \frac{n}{n+m}\,\frac{1 - \exp[-(n+m)A_1(\omega)L]}{1 - \exp[-nA_1(\omega)L]}\right) a_0^m\right] \times \frac{1 - \exp[-nA_1(\omega)L]}{nA_1(\omega)},$$

а при выполнении дополнительных условий $\exp[-mA_1(\omega)L] \ll 1$, $\exp[-nA_1(\omega)L] \ll 1$ получаем

$$a(L) \cong a_0 \exp[-A_1(\omega)L]\left[1 - \frac{B_1(\omega)}{mA_1(\omega)}\, a_0^m\right], \tag{28}$$

$$\Delta T_2(L) \cong \frac{a_0^n B_2(\omega)}{nA_1(\omega)}\left[1 - \frac{nB_1(\omega)}{(n+m)A_1(\omega)}\, a_0^m\right]. \tag{29}$$

При сравнении амплитудно-частотных зависимостей выражений (26)−(29) с результатами соответствующих экспериментов можно также определить параметры дислокационной нелинейности и эффективные характеристики дислокационной структуры поликристалла. Эффекты самовоздействия интенсивных ВЧ-волн наблюдались в цинке [24], свинце [25], магнезите [27] и мраморе [29].

## 5. Генерация третьей гармоники интенсивной высокочастотной волны

Кроме эффектов самовоздействия первичной интенсивной ВЧ-волны в поликристаллах возможны и эффекты генерации вторичных волн на частотах высших (нечетных) гармоник $\omega_{3s} = 3s\omega$, $s = 1, 2, 3, \ldots$, что также можно использовать для изучения их дислокационной нелинейности. Генерация высших гармоник в металлах с дислокациями исследовалась в [13,30–32]. В этих работах для описания генерации второй и третьей гармоник учитывались квадратичная и кубичная упругие нелинейности, связанные с геометрической нелинейностью изменения длины дислокационной струны при ее изгибе под действием статического и переменного напряжений. Здесь же в рамках волнового уравнения (13) будет рассмотрена генерация третьей гармоники при распространении интенсивной продольной ВЧ-волны в поликристалле с дислокационными диссипативной и реактивной нелинейностями (поскольку уравнение (13) обладает нечетной нелинейностью, его решение при гармоническом граничном условии $\varepsilon(x=0,t) = a_0 \cos\omega t$ будет содержать только нечетные гармоники). Отметим, что в отличие от рассмотренных выше процессов взаимодействия и самовоздействия НЧ- и ВЧ-упругих волн для генерации высших гармоник большую роль может играть дисперсия фазовой скорости в нелинейной среде: дисперсия фазовой скорости приводит к расфазировке взаимодействующих первичной и вторичных волн, что снижает эффективность генерации высших гармоник.

Решение уравнения (13) будем искать методом возмущений. Подставляя в (13) $\varepsilon(x,t) = \varepsilon_1(x,t) + \varepsilon_3(x,t)$, $\varepsilon_1(x,t) = a(x)\cos[(\omega t - kx) - \varphi(x)]$, $\varepsilon_3(x,t) = c(x) \times \cos\{3[(\omega t - kx) - \varphi(x)]\} + h(x)\sin\{3[(\omega t - kx) - \varphi(x)]\}$ и полагая, что $c(x) \ll a(x)$, $h(x) \ll a(x)$, $c_x(x) \ll 3kc(x)$, $h_x(x) \ll 3kh(x)$, получаем уравнения для амплитуд $c(x)$ и $h(x)$ cos- и sin-компонент вторичной волны $\varepsilon_3(x,t)$

$$\begin{aligned}\frac{dc(x)}{dx} - 3h(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} &= -\frac{12TC_0}{\pi^3}\,\omega[W(3\omega)h(x) \\ &+ Z(3\omega)c(x)] + \frac{12TC_0}{\pi^4}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^n \\ &\times \frac{(n-4r)B[(n-r+3)/2,\,(r+1)/2]}{(n+4)2^r} \\ &\times g\omega^{r+3}Y_n(\omega)a^{n+1}(x) - \frac{12TC_0}{\pi^4}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^m \\ &\times \frac{(3m-4q)B[(m-q+1)/2,\,(q+3)/2]}{(m+4)2^q} \\ &\times \delta d_0\omega^{q+2}X_m(\omega)a^{m+1}(x),\end{aligned} \tag{30}$$

$$\begin{aligned}\frac{dh(x)}{dx} + 3c(x)\frac{d\varphi(x)}{dx} &= \frac{12TC_0}{\pi^3}\,\omega[W(3\omega)c(x) \\ &- Z(3\omega)h(x)] - \frac{12TC_0}{\pi^4}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^n \\ &\times \frac{(n-4r)B[(n-r+3)/2,\,(r+1)/2]}{(n+4)2^r} \\ &\times g\omega^{r+3}X_n(\omega)a^{n+1}(x) - \frac{12TC_0}{\pi^4}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^m \\ &\times \frac{(3m-4q)B[(m-q+1)/2,\,(q+3)/2]}{(m+4)2^q} \\ &\times \delta d_0\omega^{q+2}Y_m(\omega)a^{m+1}(x),\end{aligned} \tag{31}$$

где

$$W(3\omega) = \int_0^\infty \frac{(\Omega^2 - 9\omega^2)lN(l)dl}{\left[(\Omega^2 - 9\omega^2)^2 + 9\omega^2 d_0^2\right]},$$

$$Z(3\omega) = 3\omega d_0 \int_0^\infty \frac{lN(l)dl}{\left[(\Omega^2 - 9\omega^2)^2 + 9\omega^2 d_0^2\right]},$$

$$\begin{aligned}X_n(\omega) &= \\ &= \int_0^\infty \frac{(\Omega^2-\omega^2)(\Omega^2-9\omega^2)\left[(\Omega^2-\omega^2)^2 - 3\omega^2 d_0^2\right] - 3\omega^2 d_0^2\left[3(\Omega^2-\omega^2)^2 - \omega^2 d_0^2\right]}{\left[(\Omega^2-\omega^2)^2 + \omega^2 d_0^2\right]^{(n+4)/2}\left[(\Omega^2-9\omega^2)^2 + 9\omega^2 d_0^2\right]} \\ &\times lN(l)dl,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Y_m(\omega) &= \omega d_0 \\ &\times \int_0^\infty \frac{3(\Omega^2-\omega^2)\left[(\Omega^2-\omega^2)^2 - 3\omega^2 d_0^2\right] + (\Omega^2-9\omega^2)\left[3(\Omega^2-\omega^2)^2 - \omega^2 d_0^2\right]}{\left[(\Omega^2-\omega^2)^2 + \omega^2 d_0^2\right]^{(m+4)/2}\left[(\Omega^2-9\omega^2)^2 + 9\omega^2 d_0^2\right]} \\ &\times lN(l)dl,\end{aligned}$$

а амплитуда $a(x)$ и фаза $\varphi(x)$ первичной волны определяются уравнениями (22), (23). Из (30), (31) получаем уравнение для комплексной амплитуды $c(x) + jh(h)$ вторичной волны $\varepsilon_3(x,t)$

$$\frac{d[c(x)+jh(x)]}{dx} + 3[c(x)+jh(x)]$$
$$\times \left[ j\,\frac{d\varphi(x)}{dx} + \frac{4TC_0}{\pi^3}\,\omega[Z(3\omega) - jW(3\omega)] \right] = -j\,\frac{12TC_0}{\pi^4}$$
$$\times \left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^n \frac{(n-4r)B[(n-r+3)/2,\,(r+1)/2]}{2^r(n+4)}$$
$$\times g\omega^{r+3}[X_n(\omega) + jY_n(\omega)]a^{n+1}(x) - \frac{12TC_0}{\pi^4}$$
$$\times \left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^m \frac{(3m-4q)B[(m-q+1)/2,\,(q+3)/2]}{2^q(m+4)}$$
$$\times \delta d_0\omega^{q+2}[X_m(\omega) + jY_m(\omega)]a^{m+1}(x). \tag{32}$$

Решение уравнения (32) имеет вид

$$c(x) + jh(x) = C(x)$$
$$\times \exp\left[ -3\left( j\varphi(x) + \frac{4TC_0}{\pi^3}\,\omega[Z(3\omega) - jW(3\omega)]x \right)\right], \tag{33}$$

где

$$C(x) = -j\,\frac{12TC_0}{\pi^4}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^n$$
$$\times \frac{(n-4r)B[(n-r+3)/2,\,(r+1)/2]}{2^r(n+4)}\,g\omega^{r+3}[X_n(\omega)$$
$$+ jY_n(\omega)]\int\limits_0^x a^{n+1}(x_1)\exp\left[ 3\left( j\varphi(x_1) + \frac{4TC_0}{\pi^3}\,\omega[Z(3\omega)\right.\right.$$
$$\left.\left. - jW(3\omega)]x_1 \right)\right] dx_1 - \frac{12TC_0}{\pi^4}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^m$$
$$\times \frac{(3m-4q)B[(m-q+1)/2,\,(q+3)/2]}{2^q(m+4)}$$
$$\times \delta d_0\omega^{q+2}[X_m(\omega) + jY_m(\omega)]\int\limits_0^x a^{m+1}(x_1)$$
$$\times \exp\left[ 3\left( j\varphi(x_1) + \frac{4TC_0}{\pi^3}\omega[Z(3\omega) - jW(3\omega)]x_1 \right)\right] dx_1. \tag{34}$$

Вообще говоря, решение (33) является достаточно сложным для анализа; комплексная амплитуда $c(x) + jh(x)$ волны $\varepsilon_3(x,t)$ определяется суперпозицией волн, генерируемых за счет реактивной и диссипативной нелинейностей. В связи с этим рассмотрим поведение амплитуды деформации $\sqrt{c^2(x) + h^2(x)}$ волны $\varepsilon_3(x,t)$ на достаточно малых расстояниях $x$, когда эффекты самовоздействия для первичной волны $\varepsilon_1(x,t)$ не проявляются и $a(x) \cong a_0\exp[-A_1(\omega)x]$, $\varphi(x) \cong \frac{4TC_0}{\pi^3}\,\omega W(\omega)x$. Мы также учтем то обстоятельство, что при плавной функции распределения $N(l) = (\Lambda/l_0^2)\exp(-l/l_0)$ дислокационная дисперсия упругих волн мала, поэтому $\frac{12TC_0}{\pi^3}\omega|W(\omega) - W(3\omega)|x \ll 1$. В результате получим

$$\sqrt{c^2(x) + h^2(x)} = |C(x)|\exp\left[ -\frac{12TC_0}{\pi^3}\,\omega Z(3\omega)x \right], \tag{35}$$

где

$$C(x) = j\,\frac{12TC_0}{\pi^4}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^n$$
$$\times \frac{(n-4r)B[((n-r+3)/2,\,(r+1)/2)]}{2^r(n+4)}$$
$$\times g\omega^{r+3}[X_n(\omega) + jY_n(\omega)]a_0^{n+1}$$
$$\times \frac{1 - \exp\left[\frac{4TC_0}{\pi^3}\omega[3Z(3\omega) - (n+1)Z(\omega)]x\right]}{\frac{4TC_0}{\pi^3}\omega[3Z(3\omega) - (n+1)Z(\omega)]}$$
$$+ \frac{12TC_0}{\pi^4}\left(\frac{4RC_0^2}{\pi^2 b}\right)^m$$
$$\times \frac{(3m-4q)B[(m-q+1)/2,\,(q+3)/2]}{2^q(m+4)}$$
$$\times \delta d_0\omega^{q+2}[X_m(\omega) + jY_m(\omega)]a_0^{m+1}$$
$$\times \frac{1 - \exp\left[\frac{4TC_0}{\pi^3}\omega[3Z(3\omega) - (m+1)Z(\omega)]x\right]}{\frac{4TC_0}{\pi^3}\omega[3Z(3\omega) - (m+1)Z(\omega)]}. \tag{36}$$

Из выражения (36) видно, что зависимости амплитуд вторичных волн, генерируемых за счет реактивной и диссипативной нелинейности, от амплитуды $a_0$ и частоты $\omega$ первичной волны, вообще говоря, различны: $\sqrt{c^2(x) + h^2(x)}|_{\text{react}} \propto ga_0^{n+1}\omega^{r+3}[X_n^2(\omega) + Y_n^2(\omega)]^{1/2}$, $\sqrt{c^2(x) + h^2(x)}\big|_{\text{diss}} \propto \delta d_0 a_0^{m+1}\omega^{q+2}[X_m^2(\omega) + Y_m^2(\omega)]^{1/2}$.

В заключение этого раздела приведем оценки для параметров $\eta$ и $\mu$ реактивной и диссипативной нелинейностей поликристалла при $m = n = 1$, $q = r = 0$, $b = 3\cdot 10^{-8}$ cm, $l_0 = 10^{-4}$ cm, $\Lambda = 10^6$ cm$^{-2}$, $C_\perp = 3\cdot 10^5$ cm/s, $C_0 = 3.5\cdot 10^5$ cm/s, $d_0 = 5\cdot 10^9$ Hz, $\nu = 0.3$, $R = 2/\pi^2$, $T = 4\cdot 10^{-2}$. Полагая, что при распространении в поликристалле первичной волны с частотой $\omega = 2\pi f$, $f = 5$ MHz и начальной амплитудой деформации $a_0 = 10^{-5}$, волна на частоте третьей гармоники генерируется только на реактивной ($\mu = 0$) или только на диссипативной ($\eta = 0$) нелинейности и на расстоянии $L = 5$ cm ее амплитуда составляет $\sqrt{c^2(x) + h^2(x)} = 10^{-8}$, получим $\eta \cong 5\cdot 10^{-1}$, $\mu \cong 5\cdot 10^{-3}$.

## 6. Заключение

В работе на основе модификации линейной части дислокационной теории Гранато–Люкке получено уравнение состояния поликристаллических твердых тел с дислокационной диссипативной и реактивной нелинейностью. В рамках этого уравнения проведено теоретическое исследование взаимодействия и самовоздействия продольных НЧ- и ВЧ-упругих волн и получены выражения для изменений амплитуды и фазы слабого ВЧ-импульса под действием мощной НЧ-волны накачки; амплитуды и фазовой задержки несущей интенсивной гармонической ВЧ-волны; амплитуды третьей гармоники интенсивной гармонической ВЧ-волны.

Описанные нелинейные эффекты (затухание и фазовая задержка несущей слабой ВЧ-волны под действием сильной НЧ-волны, самовоздействие интенсивной ВЧ-волны) наблюдаются в экспериментах для многих поликристаллических горных пород и некоторых металлов, причем в каждом таком материале эти эффекты являются довольно сильными и, как правило, проявляют различные амплитудно-частотные закономерности. Так, например, в зависимости от температуры отжига поликристаллической меди и частоты ВЧ-волны уменьшение ее амплитуды под действием мощной НЧ-волны ($\varepsilon_m \approx 10^{-5}$) составляет от 2 до 10 (и даже более) раз, а относительная фазовая задержка достигает величины 1%. Следует, однако, заметить, что подобные значения нелинейных затухания и фазовой задержки слабой ВЧ-волны (при прочих равных условиях) наблюдаются далеко не во всех материалах, а в некоторых из них (например, стекле, неотожженной меди, алюминии, стали, молибдене, никеле, олове, титане и т.д.) такие эффекты не наблюдаются вообще. Кроме того, если ту же отожженную медь подвергнуть пластической деформации изгиба или кручения, то интенсивность нелинейных эффектов в этом металле сильно уменьшается. Все это свидетельствует о том, что диссипативная и реактивная нелинейность является чувствительной структурной характеристикой многих поликристаллических твердых тел, что можно использовать для эффективной акустической диагностики их дислокационной структуры.

## Список литературы


[1] Х.Г. Ван Бюрен. Дефекты в кристаллах. ИИЛ, М. (1962). 584 с.
[2] Ж. Фридель. Дислокации. Пер. с англ. Мир, М. (1967). 644 с.
[3] Дж. Хирт, И. Лоте. Теория дислокаций. Атомиздат, М. (1972). 600 с.
[4] Р. Хоникомб. Пластическая деформация металлов. Мир, М. (1972). 408 с.
[5] И.И. Новиков. Дефекты кристаллического строения металлов. Металлургия, М. (1983). 232 с.
[6] Т. Судзуки, Х. Есинага, С. Такеути. Динамика дислокаций и пластичность. Мир, М. (1989). 296 с.
[7] J.S.Koehler. In: Imperfections in nearly perfect crystals. John Wiley and Sons, N.Y. (1952). P. 197.
[8] A. Granato, K. Lucke. J. Appl. Phys. **27**, *5*, 583 (1956).
[9] Д. Ниблетт, Дж. Уилкс. УФН **80**, *1*, 125 (1963).
[10] Ультразвуковые методы исследования дислокаций. Сб. статей / Пер. с англ. и нем. под ред. Л.Г. Меркулова. ИИЛ, М. (1963). 376 с.
[11] Внутреннее трение и дефекты в металлах / Пер. с англ. и нем. под ред. В.С. Постникова. Металлургия, М. (1965). 420 с.
[12] Физическая акустика / Под ред. У. Мезона. Т. 4. Ч. А. Применения физической акустики в квантовой физике и физике твердого тела. Мир, М. (1969). 375 с.
[13] Р. Труэлл, Ч. Эльбаум, Б. Чик. Ультразвуковые методы в физике твердого тела. Мир, М. (1972). 308 с.
[14] В.С. Постников. Внутреннее трение в металлах. Металлургия, М. (1974). 352 с.
[15] М.А. Криштал, С.А. Головин. Внутреннее трение и структура металлов. Металлургия, М. (1976). 376 с.
[16] С.П. Никаноров, Б.К. Кардашев. Упругость и дислокационная неупругость кристаллов. Наука, М. (1985). 250 с.
[17] В.П. Левин, В.Б. Проскурин. Дислокационная неупругость в металлах. Наука, М. (1993). 272 с.
[18] V.E. Nazarov, A.V. Radostin. Nonlinear acoustic waves in micro-inhomogeneous solids. John Wiley and Sons. (2015). 251 p.
[19] A.S. Novick. Phys. Rev. **80**, *2*, 249 (1950).
[20] S. Takahachi. J. Phys. Soc. Jpn. **11**, *12*, 1253 (1956).
[21] D.N. Beshers. J. Appl. Phys. **30**, *2*, 252 (1959).
[22] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теория упругости. Наука, М. (1987). 248 с.
[23] С.В. Зименков, В.Е. Назаров. ФММ **73**, *3*, 62 (1992).
[24] В.Е. Назаров. ФММ **92**, *6*, 71 (2001).
[25] В.Е. Назаров. ФММ **88**, *4*, 82 (1999).
[26] С.В. Зименков, В.Е. Назаров. Физика Земли *1*, 13 (1993).
[27] V.E. Nazarov, A.B. Kolpakov. Ultrasonics **54**, *2*, 471 (2014).
[28] V.E. Nazarov, A.B. Kolpakov, A.V. Radostin. Acoust. Phys. **56**, *4*, 453 (2010).
[29] В.Е. Назаров, А.Б. Колпаков, А.В. Радостин. Физ. мезомеханика **13**, *2*, 41 (2010).
[30] T. Suzuki, A. Hikata, C. Elbaum. J. Appl. Phys. **35**, *9*, 2761 (1964).
[31] A. Hikata, B.B. Chick, C. Elbaum. J. Appl. Phys. **36**, *1*, 229 (1965).
[32] A. Hikata, C. Elbaum. Phys. Rev. **144**, *2*, 469 (1966).