

03

О структуре поля скорости стационарного течения вблизи границы раздела однородной жидкости и пористой среды Бринкмана

© К.Б. Циберкин

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990 Пермь, Россия
e-mail: kbtsiberkin@psu.ru

(Поступило в редакцию 26 мая 2015 г. В окончательной редакции 13 января 2016 г.)

В приближении пограничного слоя исследована структура течения однородной жидкости у границы раздела с пористой средой, насыщенной той же жидкостью. Пористая среда описана моделью Бринкмана. Получены автомодельные уравнения движения в форме уравнения Блазиуса и их численные решения. Найдено выражение для силы, действующей со стороны потока на пористую среду.

Введение

Задачи о взаимодействии смежных потоков жидкости имеют широкий спектр технологических, экологических, геофизических и биологических приложений [1,2], и обширную историю изучения, начиная с неустойчивостей Кельвина–Гельмгольца, Рэлея–Тейлора, волнах на границах раздела [3,4] и др. Аналогичные задачи формулируются для течений в пористой среде [5]. Существенные результаты в описании взаимодействия смежных течений получены в рамках приближения пограничного слоя на границе раздела [6–9].

В развитии тематики о системах с границами раздела существенный интерес представляет изучение взаимодействия стационарного потока однородной жидкости с фильтрационным течением при сопутствующем тепло- и массопереносе через границу жидкости и пористой среды [10]. Для описания таких систем наряду с разными моделями фильтрации применяется большое число вариантов граничных условий [11–14], и известно, что расчеты стационарных потоков в рамках различных подходов могут быть согласованы между собой варьированием эмпирических параметров [10]. В работах [10–14] исследуются процессы переноса в плоскопараллельном течении. Взаимодействие внешнего течения с потоком в пористой среде может быть описано также и в приближении пограничного слоя, основной особенностью которого является ненулевое значение компоненты скорости, нормальной к границе раздела [15]. Однако простейшая модель фильтрации (закон Дарси) не допускает формирования вязкого пограничного слоя в течении, и позволяет адекватно описать только процессы теплопередачи и диффузии растворенной примеси [2,16–19]. С другой стороны, в модели Бринкмана [2,20] вязкий пограничный слой возможен [11,19]. В рамках этого подхода ранее изучены, в частности, температурные пограничные слои в смежных пористых средах с различными параметрами [21]. Настоящая работа исследует структуру поля скорости в вязком пограничном слое в пористой среде Бринкмана на границе с внешним течением.

Постановка задачи

Рассматривается двумерное течение жидкости, смежной с пористой средой, насыщенной той же жидкостью, в отсутствие внешних сил (рис. 1). Внешнее течение, имеющее вдали от границы раздела скорость U_∞ , увлекает жидкость, содержащуюся в пористой среде, благодаря вязкому трению на границе. Характерная скорость фильтрационного потока при этом равна

$$U_{p,\infty} = \frac{Da}{\varphi} U_\infty, \quad Da = \frac{K}{L^2},$$

где Da — безразмерное число Дарси, φ , K — пористость и абсолютная проницаемость среды соответственно, L — характерный линейный размер задачи, нижний индекс p здесь и далее отмечает величины, относящиеся к пористой среде.

Полная система уравнений гидродинамики описываемой задачи включает уравнения Навье–Стокса для внешнего течения и уравнения Бринкмана для пористой среды [2,20] и имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla P + \nu \Delta \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + (\mathbf{v}_p \nabla) \mathbf{v}_p &= -\frac{1}{\rho} \nabla P_p + \nu_{\text{eff}} \Delta (\varphi \mathbf{v}_p) - \frac{\nu}{K} \varphi \mathbf{v}_p, \\ \operatorname{div} \mathbf{v}_p &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\mathbf{v} = \{u, v\}$ — скорость течения жидкости, P — давление, ρ , ν — плотность и кинематическая вязкость жидкости соответственно. Уравнение Бринкмана отличается от уравнения Навье–Стокса наличием слагаемого, описывающего вязкую силу сопротивления пористого скелета, которая определяется законом Дарси. При этом вводится величина ν_{eff} — эффективная кинематическая вязкость в пористой среде, которая описывает диффузию импульса с учетом микроскопической структуры среды. Для нее в соответствии с работами [12,13] принято значение $\nu_{\text{eff}} = \nu/\varphi$. Инерционные слагаемые в пористой среде

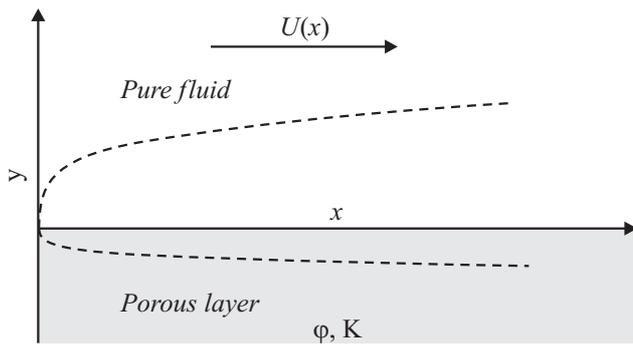


Рис. 1. Конфигурация рассматриваемой системы.

пренебрежимо малы для большинства случаев [2,22], однако в настоящей работе они не исключаются. Это связано с потенциальной необходимостью их учета при описании сред с высокими значениями пористости $\phi \sim 1$ и проницаемости [2].

Система (1) дополняется условиями на границе раздела $y = 0$ [12,13]

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \phi \mathbf{v}_p, \\ P - 2\rho\nu \frac{\partial v}{\partial y} &= P_p = 2\rho\nu_{\text{eff}} \phi \frac{\partial v_p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\nu_{\text{eff}}}{\nu} \phi \frac{\partial u_p}{\partial y} &= -\frac{\beta}{K^{1/2}} \phi u_p, \end{aligned} \quad (2)$$

где β — эмпирический параметр, определяемый свойствами пористой матрицы и геометрией пор на микроуровне. Система уравнений замыкается условиями вдали от границы:

$$\begin{aligned} y \rightarrow +\infty: \quad u &\rightarrow U_\infty, \quad v \rightarrow 0, \\ y \rightarrow -\infty: \quad u^{(p)} &\rightarrow \frac{\text{Da}}{\phi} U_\infty, \quad v^{(p)} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Выбор модели Бринкмана для описания течения в пористой среде обусловлен тем, что эта модель успешно описывает среды с высокой пористостью, а также позволяет разрешить профиль скорости в переходной области у границы раздела. Уравнение Бринкмана и граничные условия (2) могут быть получены прямым осреднением уравнений Навье–Стокса на масштабе пор [12,13,23], что обуславливает их высокую физическую достоверность по сравнению с известными эмпирическими условиями для модели Дарси [2,11,14].

Выбор масштабов для входящих в уравнения величин

$$[\mathbf{v}] = U_\infty, \quad [x, y] = L, \quad [t] = \frac{L}{U_\infty}, \quad [P] = \rho U_\infty^2$$

определяет безразмерные уравнения модели

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} &= -\nabla P + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}, \\ \text{div } \mathbf{v} &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_p}{\partial t} + (\mathbf{v}_p \nabla) \mathbf{v}_p &= -\nabla P_p + \frac{1}{\text{Re}} \Delta \mathbf{v}_p - \frac{\phi}{\text{Da, Re}} \mathbf{v}_p, \\ \text{div } \mathbf{v}_p &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

а также условия на границе раздела

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \phi \mathbf{v}_p, \quad P - 2 \frac{\partial v}{\partial y} = P_p - 2 \frac{\partial v_p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_p}{\partial y} &= -\frac{\beta \phi}{\text{Da}^{1/2}} u_p, \end{aligned} \quad (4)$$

и на удалении от нее

$$\begin{aligned} y \rightarrow +\infty: \quad u &\rightarrow 1, \quad v \rightarrow 0, \\ y \rightarrow -\infty: \quad u_p &\rightarrow \frac{\text{Da}}{\phi}, \quad v_p \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Помимо числа Дарси, управляющим параметром задачи является число Рейнольдса $\text{Re} = U_\infty L / \nu$.

Приближение пограничного слоя

Предположение, что основное изменение скорости происходит в пределах тонкой переходной области с характерной шириной δ вблизи границы раздела, позволяет применить к модели (3)–(5) подход Прандтля [15]. С учетом стационарности рассматриваемого течения уравнения в приближении пограничного слоя принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \\ u_p \frac{\partial u_p}{\partial x} + v_p \frac{\partial u_p}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_p}{\partial y^2} - \frac{\phi}{\text{Da, Re}} u_p, \\ \frac{\partial u_p}{\partial x} + \frac{\partial v_p}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь дополнительно учтено, что скорость течения вдали от границы раздела не зависит от продольной координаты. Это позволяет исключить градиент давления из уравнения для внешнего течения. Для течения в пористом слое продольный градиент давления имеет величину порядка Re^{-1} , и им можно пренебречь. Граничные условия (4) в приближении Прандтля незначительно видоизменяются ввиду малости поперечного градиента давления [15]:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \phi \mathbf{v}_p, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v_p}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_p}{\partial y} &= -\frac{\beta \phi}{\text{Da}^{1/2}} u_p. \end{aligned} \quad (7)$$

В условии (5) при $y \rightarrow -\infty$ можно пренебречь также скоростью фильтрационного течения, поскольку она

имеет величину порядка Da . С учетом этого условия принимают окончательный вид

$$\begin{aligned} y \rightarrow +\infty: & \quad u \rightarrow 1, \quad v \rightarrow 0, \\ y \rightarrow -\infty: & \quad u_p \rightarrow 0, \quad v_p \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Дальнейшее исследование и поиск автомодельного решения удобно проводить в терминах функции тока. Задание ее соотношениями (частные производные по координатам x, y обозначены нижними индексами)

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x$$

преобразует задачу (6)–(8) к виду

$$\begin{aligned} \psi_y \psi_{xy} - \psi_x \psi_{yy} &= \frac{1}{Re} \psi_{yyy}, \\ \psi_{p,y} \psi_{p,xy} - \psi_{p,x} \psi_{p,yy} &= \frac{1}{Re} \psi_{p,yyy} - \frac{\varphi}{Da Re} \psi_{p,y}, \end{aligned} \quad (9)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} y = 0: & \quad \psi_y = \varphi \psi_{p,y}, \quad \psi_x = \varphi \psi_{p,x}, \\ \psi_{xy} &= \psi_{p,xy}, \quad \psi_{yy} - \psi_{p,yy} = -\frac{\beta \varphi}{Da^{1/2}} \psi_{p,y}, \\ \psi_y(+\infty) &\rightarrow 1, \quad \psi_{p,y}(-\infty) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Уравнения (9) допускают автомодельное преобразование

$$\xi = Ax^a y, \quad \psi = Bx^b f(\xi),$$

где f — новая неизвестная функция. Поскольку функции тока связаны граничными условиями (10), это преобразование совпадает для обоих уравнений. Однако запись уравнения для пористой среды в автомодельной форме оказывается возможна только в предположении, что проницаемость зависит от x по степенному закону:

$$K = K_0 \left(\frac{x}{L} \right)^c, \quad Da = Da_0 x^c.$$

Применение указанных преобразований к задаче (9), (10) однозначно определяет показатели степени $a = -1/2$, $b = 1/2$ и $c = 1$. Соответственно толщина пограничного слоя в обеих средах оказывается пропорциональной $x^{1/2}$, как и для классической задачи Блазиуса и связанных с ней [6, 15].

При задании автомодельной переменной и функции тока в форме

$$\xi = \left(\frac{\varphi}{Da_0 x} \right)^{1/2} y, \quad \psi = \frac{2}{Re} \left(\frac{\varphi x}{Da_0} \right)^{1/2} f(\xi),$$

уравнения (10) максимально упрощаются:

$$\begin{aligned} f''' + f f'' &= 0, \\ f_p''' + f_p f_p'' - f_p' &= 0, \end{aligned} \quad (11)$$

штрихом обозначено дифференцирование по переменной ξ . Граничные условия переписываются в виде

$$\begin{aligned} \xi = 0: & \quad f = \varphi f_p, \quad f' = \varphi f_p', \\ f'' - f_p'' &= -\beta \varphi^{1/2} f_p', \\ f''' - f_p''' &= \varphi f_p' - \beta \varphi^{1/2} f f_p', \\ f'(+\infty) &\rightarrow \frac{Da_0 Re}{2\varphi}, \quad f_p'(-\infty) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Дополнительное четвертое условие на границе раздела получено из уравнений (11). Оно требуется для замыкания задачи, поскольку условие для ψ_{xy} в автомодельной форме удовлетворяется тождественно. Основным управляющим параметром задачи (11), (12) является произведение числа Дарси и числа Рейнольдса

$$RD = Da_0 Re,$$

которое входит только в граничное условие при $\xi \rightarrow +\infty$. Продольная и поперечная компоненты скорости в терминах f определяются соотношениями

$$u \propto f', \quad v \propto \xi f' - f.$$

Уравнение для течения однородной жидкости во внешнем потоке совпадает с классическим уравнением Блазиуса. Уравнение для пористой среды по структуре также подобно последнему, но содержит дополнительное линейное слагаемое, обусловленное силой трения в среде. Нелинейное слагаемое в данном уравнении является квадратичным, что, наряду с условием для $f_p'(-\infty)$, определяет его пренебрежимо малый вклад в решение ввиду малой скорости фильтрации вдали от границы раздела. Однако в пределах переходной области скорость течения быстро возрастает, и поэтому нелинейное слагаемое становится значимым.

Структура профиля течения

Для уравнений (11) доступен анализ асимптотического поведения решения вдали от границы раздела. Во внешнем течении функция тока и скорость при $\xi \rightarrow +\infty$ экспоненциально стремятся к предельной зависимости:

$$\begin{aligned} f(\xi) &\approx c + a\xi + \phi(\xi), \\ \phi(\xi) &\propto \frac{1}{\xi^2} \exp\left(-\frac{a}{2}\xi^2\right), \end{aligned} \quad (13)$$

тогда как в пористой среде при $\xi \rightarrow -\infty$ течение затухает также экспоненциально, но медленнее, чем во внешнем потоке

$$\begin{aligned} f_p(\xi) &\approx c + \phi_p(\xi), \\ \phi_p(\xi) &\propto \exp(c\xi). \end{aligned} \quad (14)$$

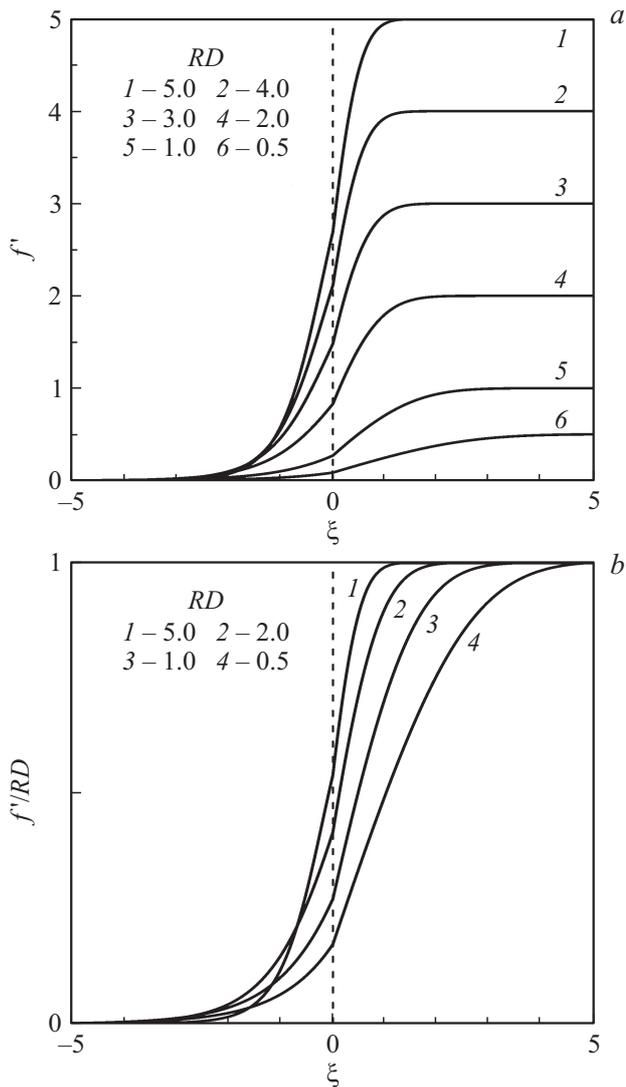


Рис. 2. Профили продольной компоненты скорости в пограничном слое на границе между жидкостью и пористой средой при различных значениях параметра RD (a), нормированные на RD профили продольной компоненты скорости (b), $\varphi = 0.5$, $\beta = 0$.

Использование степенных разложений вблизи границы раздела приводит к переопределенной системе уравнений для коэффициентов разложения, аналитическое исследование которой затруднено. Построение полного решения задачи производилось численно в ходе самоогласованной итерационной процедуры, основанной на решении уравнений (11) методом установления.

На рис. 2,а приведены профили продольной компоненты скорости течения, вычисленные при разных значениях параметра RD . Асимптотика численных решений согласуется с зависимостями (13) и (14), что подтверждает достоверность использованного численного метода. Толщина пограничного слоя δ во внешнем течении оказывается существенно меньше по сравнению с таковой в пористом слое, что также связано с асимптотическим поведением решений.

На рис. 2,б показаны нормированные на RD профили скорости.

На рис. 3 приведены рассчитанные зависимости толщины пограничного слоя в зависимости от параметра RD . Толщина пограничного слоя в однородной жидкости определялась по значению координаты $\xi = \delta$, где $f'(\delta) = 0.99f'(+\infty)$. В пористой среде за границу слоя принята точка $\xi = -\delta_p$, соответствующая значению скорости $f'_p(-\delta_p) = 0.01RD$. Из графиков видно, что δ уменьшается по мере роста управляющего параметра

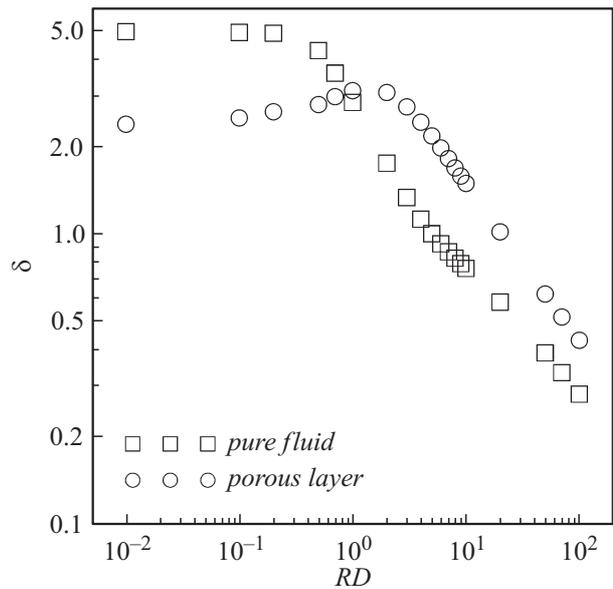


Рис. 3. Толщина пограничного слоя в однородной жидкости и пористой среде в зависимости от параметра RD , $\varphi = 0.5$, $\beta = 0$.

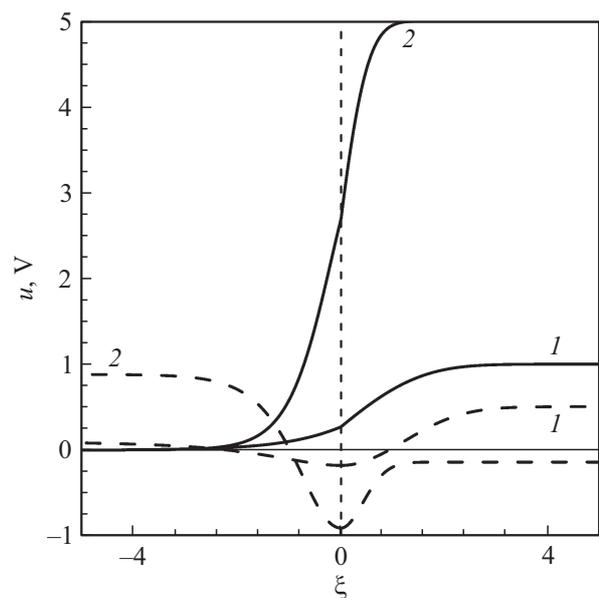


Рис. 4. Сопоставление продольной (сплошные линии) и поперечной (штриховые линии) компоненты скорости при $RD = 1$ (кривые 1), 5 (кривые 2), $\varphi = 0.5$, $\beta = 0$.

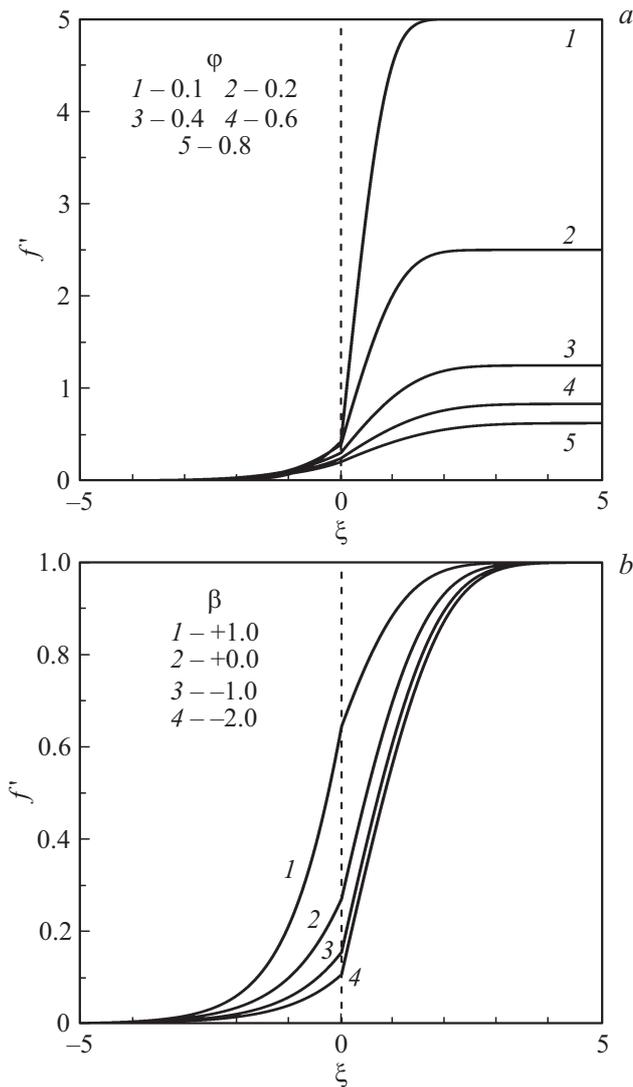


Рис. 5. Профили продольной компоненты скорости в пограничном слое на границе между жидкостью и пористой средой при различной пористости среды φ и $\beta = 0$ (a), при различных значениях параметра β и пористости $\varphi = 0.5$ (b), $RD = 1$.

во внешней жидкости, тогда как в пористой среде зависимость является немонотонной, что обусловлено влиянием граничных условий и входящих в них параметров задачи (пористости и β) на структуру и скорость течения.

Рассчитанная поперечная компонента скорости в непосредственной близости от границы раздела отрицательна (рис. 4), т.е. жидкость из внешнего потока перетекает в пористую среду в пределах тонкой области. Увеличение параметра RD приводит к уменьшению толщины указанной области, пропорциональной δ , и вызывает возрастание вертикальной скорости течения в пределах пористого слоя по сравнению с внешним течением.

Рассмотрено также влияние на структуру профиля скорости пористости (рис. 5, a) и параметра β в гранич-

ных условиях (рис. 5, b). Увеличение пористости приводит к росту толщины пограничного слоя в однородной жидкости. Соответственно этому изменяется и значение скорости течения на границе раздела. Параметр β не влияет непосредственно на толщину пограничного слоя, но играет существенную роль в структуре профиля скорости и формировании силы вязкого трения.

Сила, действующая на пористую среду

Течение оказывает непосредственное воздействие на пористую среду. Сила вязкого трения в рассматриваемой системе складывается из поверхностной силы, связанной с касательными напряжениями на границе раздела, и объемной силы

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_S + \mathbf{F}_V.$$

Поверхностная сила, приходящаяся на единицу ширины потока на отрезке границы длиной L , равна

$$\mathbf{F}_S = \int_0^L [\tau] dx, \quad \tau = \rho v \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0},$$

где $[\tau]$ — скачок касательной компоненты вязких напряжений при переходе через границу раздела, величина скачка определяется последним из условий (2). При переходе к безразмерной функции тока скачок касательных напряжений записывается в виде

$$[\tau] = \frac{2\beta\varphi^2\rho v^2}{K_0^{3/2}} \frac{L^{3/2}}{x^{1/2}} f'_p(0),$$

а соответствующая компонента силы равна

$$\mathbf{F}_S = \frac{4\beta\varphi^2\rho v^2 L^2}{K_0^{3/2}} f'_p(0) \mathbf{e}_x. \tag{15}$$

Следует отметить, что параметр β является определяющим для значения этой силы. При $\beta = 0$ поверхностная составляющая силы вязкого трения отсутствует.

Объемная сила трения определяется как [24]

$$\mathbf{F}_V = \int_0^L dx \int_{-\infty}^0 dy \frac{\varphi\rho v L}{K_0 x} \mathbf{v}_p,$$

что при подстановке функции тока дает

$$\begin{aligned} F_{Vx} &= \frac{2\varphi^2\rho v^2 L^3}{K_0^2} \int_0^L \frac{dx}{x} \int_{-\infty}^0 dy f'_p(\xi), \\ F_{Vy} &= \frac{\varphi^2\rho v^2 L^3}{K_0^2} \int_0^L \frac{dx}{x} \int_{-\infty}^0 dy (\xi f'_p(\xi) - f_p(\xi)). \end{aligned} \tag{16}$$

Сумма (15) и (16) дает выражение для полной силы трения, действующей на пористый слой. Видно, что

объемная компонента не зависит явным образом от эмпирического параметра в граничных условиях, однако зависимость силы от β является существенной, поскольку его изменение приводит к выраженным изменениям структуры профиля скорости и значения компонент скорости течения на границе раздела.

Заключение

Для течения однородной жидкости, взаимодействующего за счет вязкого трения с фильтрационным течением в смежной пористой среде, описываемой моделью Бринкмана, может быть сформулирована автомодельная задача нахождения профиля скорости течения в приближении пограничного слоя. При линейной зависимости проницаемости от продольной координаты функция тока во внешнем течении определяется уравнением Блазиуса, а в пористом слое — его модификацией, в которой учитывается дополнительная сила сопротивления Дарси. Толщина пограничных слоев определяется произведением числа Рейнольдса на число Дарси, которые выступают в задаче как единый управляющий параметр, а также пористостью и эмпирическим параметром в граничных условиях.

На основании решения в приближении пограничного слоя определяется также сила трения, с которой поток действует на пористую среду. Указанная сила состоит из поверхностной компоненты, связанной со скачком касательных напряжений на границе раздела, и объемной компоненты, определяемой силой сопротивления пористого скелета. На основании данного результата может быть разработана новая методика для нахождения параметра β , который в известных работах определяется из сопоставления теоретически рассчитанных и экспериментально измеренных профилей скорости.

Список литературы

- [1] *White F.M.* Viscous Fluid Flow. NY: McGraw-Hill, 2006. 640 p.
- [2] *Nield D.A., Bejan A.* Convection in porous media. NY: Springer, 2013. 778 p.
- [3] *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability. Oxford: Clarendon Press, 1961. 652 p.
- [4] *Любимов Д.В., Любимова Т.П., Черепанов А.А.* Динамика поверхностей раздела в вибрационных полях. М.: Физматлит, 2003. 216 с.
- [5] *Bau H.H.* // Phys. Fluids. 1982. Vol. 25. N 10. P. 1719–1722.
- [6] *Lock R.C.* // Q.J. Mech. Appl. Math. 1951. Vol. 4. N 1. P. 42–63.
- [7] *Boyardjiev Chr., Mitev Pl., Sapundzhiev T.* // Int. J. Multiphas. Flow. 1976. Vol. 3. N 1. P. 51–55.
- [8] *Paster A., Dagan G.* // J. Fluid. Mech. 2007. Vol. 584. P. 455–472.
- [9] *Andersson H.I., Mukhopadhyay S.* // Appl. Math. Comput. 2014. Vol. 242. P. 856–862.
- [10] *Alazmi B., Vafai K.* // Int. J. Heat. Mass. Tran. 2001. Vol. 44. P. 1735–1749.
- [11] *le Bars M., Worster M.G.* // J. Fluid. Mech. 2006. Vol. 550. P. 149–173.
- [12] *Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S.* // Int. J. Heat. Mass. Tran. 1995. Vol. 38. P. 2635–2646.
- [13] *Ochoa-Tapia J.A., Whitaker S.* // Int. J. Heat. Mass. Tran. 1995. Vol. 38. P. 2647–2655.
- [14] *Beavers G.S., Joseph D.D.* // J. Fluid. Mech. 1967. Vol. 30. N 1. P. 197–207.
- [15] *Шлехтинг Г.* Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1969. 744 с.
- [16] *Cheng P., Minkowycz W.J.* // J. Geophys. Res. 1977. Vol. 82. N 14. P. 2040–2044.
- [17] *Gorla R.S.R., Tornabene R.* // Transport. Por. Med. 1988. Vol. 3. P. 95–106.
- [18] *Cheng C.-Y.* // Int. Commun. Heat. Mass. 2006. Vol. 33. P. 1156–1164.
- [19] *An overview of heat transfer phenomena / Ed. by S.M. Kazi.* Rijeka, Croatia: InTech, 2012. 526 p.
- [20] *Brinkman H.C.* // Appl. Sci. Res. A. 1947. Vol. 1. P. 27–34.
- [21] *Gorla R.S.R., Mansour M.A., Gaid Sahar M.* // Transport. Por. Med. 1999. Vol. 36. P. 357–371.
- [22] *Straughan B.* // Proc. R. Soc. Lond. A. Mat. 2001. Vol. 457. P. 87–93.
- [23] *Tilton N., Cortelezzi L.* // J. Fluid. Mech. 2008. Vol. 604. P. 411–445.
- [24] *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.