

Краткие сообщения

01

Пространственный потенциал слабо сжатого эллиптического диска

© Б.П. Кондратьев

Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга,
 Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
 119234 Москва, Россия
 Главная (Пулковская) Астрономическая обсерватория РАН,
 196140 Санкт-Петербург, Россия
 e-mail: work@boris-kondratyev.ru

(Поступило в Редакцию 17 марта 2015 г. В окончательной редакции 9 декабря 2015 г.)

Поставлена и решена задача о разложении пространственного потенциала однородного гравитирующего (или заряженного статическим электрическим зарядом) эллиптического диска в ряд по степеням эксцентриситета e с точностью до e^2 включительно. Разработан оригинальный метод, позволяющий получить требуемый результат наложением на круговой диск возмущающего слоя. Найден потенциал этого слоя. Первый член разложения потенциала при e в нулевой степени совпадает с потенциалом однородного круглого диска, а коэффициент при e в первой степени оказывается равным нулю. Основным член в разложении потенциала при e^2 получен в аналитическом конечном виде. Найденное выражение представляет потенциал во всем пространстве, включая и внутреннюю область диска.

1. Введение

Нахождение потенциалов однородных и неоднородных дисков стандартным способом с помощью интеграла

$$\varphi(\mathbf{x}) = G \iint_S \frac{\sigma dS}{\sqrt{(x_1-x'_1)^2 + (x_2-x'_2)^2 + (x_3-x'_3)^2}} \quad (1)$$

наталкивается на серьезные математические трудности, поэтому для решения таких задач в монографиях [1] и [2] были разработаны новые методы. Здесь упомянем два из них. Первый метод опирается на представление внешних потенциалов тел (не только дисков) через эквигравитирующие стержни, а другой основан на нахождении потенциала эллиптических дисков через эквигравитирующие этим диском неоднородные трехосные софокусные эллипсоиды или двухосные сфероиды. Именно вторым методом в [2] впервые был получен пространственный потенциал однородного эллиптического диска. Этот потенциал выражается через стандартные полные эллиптические интегралы первого и третьего рода и имеет вид

$$\begin{aligned} \varphi_{\text{disk}}(\mathbf{x}) = & \frac{4G\sigma R_1 R_2}{\sqrt{\lambda - \nu}} \left\{ \left(1 - \frac{x_1^2}{R_1^2 + \nu} - \frac{x_2^2}{R_2^2 + \nu} - \frac{x_3^2}{\nu} \right) K(k) \right. \\ & + \frac{x_1^2}{R_1^2 + \nu} \Pi \left[-\frac{R_1^2 + \nu}{\lambda - \nu}, k \right] + \frac{x_2^2}{R_2^2 + \nu} \Pi \left[-\frac{R_2^2 + \nu}{\lambda - \nu}, k \right] \\ & \left. + \frac{x_3^2}{\nu} \Pi \left[-\frac{\nu}{\lambda - \nu}, k \right] \right\}, \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$k = \sqrt{\frac{\mu - \nu}{\lambda - \nu}} \leq 1 \quad (3)$$

— модуль эллиптических интегралов, (λ, μ, ν) — эллипсоидальные, а x_1, x_2, x_3 — декартовы координаты пробной точки, $R_1 \geq R_2$ — главные полуоси эллиптического диска, σ — поверхностная плотность гравитирующего вещества или электрического заряда на диске. Подчеркнем, что (2) представляет потенциал диска во всем пространстве, включая внутренние точки.

В предельном случае $R_1 = R_2 = R$ эллиптический диск превращается в однородный круговой диск. Тогда третья эллипсоидальная координата превращается в постоянную $\nu = -R_1^2$, а выражение потенциала (2) сложным образом трансформируется в пространственный потенциал круглого диска. Трудности указанного предельного перехода возникают из-за появления в (2) расходящихся членов. Однако эти расходимости уничтожают друг друга, так как вместо четырех критических членов мы имеем [2]

$$\begin{aligned} & \frac{r^2}{R^2 + \nu} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} \left(\frac{-\frac{R^2 + \nu}{R^2 + \lambda} \sin^2 \theta}{1 + \frac{R^2 + \nu}{R^2 + \lambda} \sin^2 \theta} \right) \\ & = -\frac{r^2}{R^2 + \lambda} \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 \theta d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}} = -\frac{r^2}{R^2 + \lambda} \frac{K(k) - E(k)}{k^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

В результате указанного предельного перехода с учетом формулы (4) из (2) действительно следует потенциал однородного круглого диска

$$\begin{aligned} \varphi_0(r, x_3) = & \frac{4G\sigma R^2}{\sqrt{\lambda + R^2}} \left\{ \left(1 + \frac{x_3^2}{R^2} \right) K(k) \right. \\ & \left. - r^2 \frac{K(k) - E(k)}{\mu + R^2} - \frac{x_3^2}{R^2} \Pi \left[\frac{R^2}{\lambda + R^2}, k \right] \right\}, \end{aligned}$$

$$k = \sqrt{\frac{\mu + R^2}{\lambda + R^2}} \leq 1,$$

$$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(r^2 + x_3^2 - R^2 \pm \sqrt{(r^2 + x_3^2 - R^2)^2 + 4R^2 x_3^2} \right), \quad (5)$$

совпадающий с тем выражением, которое ранее было найдено в [1,2] не только указанным, но и двумя принципиально другими методами.

Подчеркнем, что выражение (2) представляет потенциал однородного эллиптического диска во всем пространстве, включая его внутренние точки. Ввиду его сложности большой практический интерес представляет задача разложения потенциала однородного эллиптического диска (2) в ряд по степеням эксцентриситета e :

$$\varphi_{\text{disk}}(\mathbf{x}) = 4G\sigma R_1^2 (\varphi_0 + C_1 e + C_2 e^2 + \dots), \quad (6)$$

где первый член φ_0 представляет нормированный потенциал однородного круглого диска (5), а другие члены ряда остаются пока неизвестными. На новизну данной задачи указывает то, что ряд (6) принципиально отличается от разложения по сферическим функциям (или от ряда Лапласа [3,4]), который мы получали ранее для потенциала тора [5–7].

Но прямое разложение потенциала эллиптического диска (2) в ряд по степеням наталкивается на значительные трудности. Даже если ограничиться разложением потенциала (2) в ряд с точностью только до e^2 включительно, и тогда начинать надо со сложного разложения в ряд эллипсоидальных координат пробной точки. Такая работа по прямому разложению выражения (2) нами была проведена (в частности, именно этим методом было доказано, что $C_1 = 0$), но из-за громоздкости самого подхода мы не будем здесь его излагать. Однако находится другой, более простой и наглядный метод получения требуемых результатов. К этому методу мы и обратимся.

2. Постановка задачи и ее решение

Рассмотрим однородный с поверхностной плотностью σ круглый диск радиусом R . При малой деформации этого диска в эллиптический диск полуоси последнего представим в виде

$$a_1 = R(1 + \varepsilon); \quad a_2 = \frac{R}{1 + \varepsilon}, \quad (7)$$

где ε — малый параметр деформации (рис. 1). Масса диска при деформации (7) сохраняется $M = \pi a_1 a_2 = \pi R^2$. Параметр ε связан с эксцентриситетом e эллипса соотношением

$$e = \frac{\sqrt{a_1^2 - a_2^2}}{a_1} \approx 2\sqrt{\varepsilon}, \quad (8)$$

так что

$$\varepsilon \approx \frac{e^2}{4}. \quad (9)$$

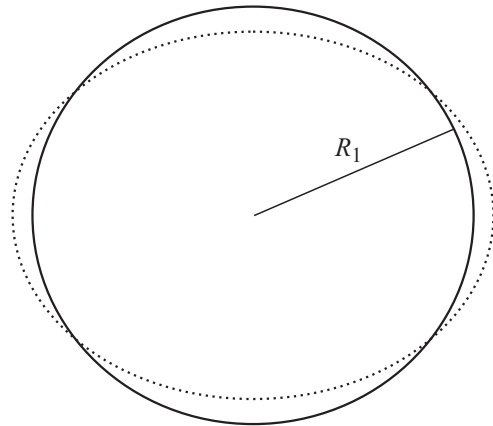


Рис. 1. Круглый (сплошная линия) и слабо сжатый эллиптический (точки) диск.

Деформация (7) представляет собой наложение на круг радиуса R плоского тонкого слоя переменной (положительной и отрицательной) толщины $d\tau$. В полярных координатах толщина этого возмущающего слоя равна

$$d\tau = \varepsilon R \cos 2\theta, \quad (10)$$

так что уравнение границы диска суть

$$f(\theta) = R(1 + \varepsilon \cos 2\theta). \quad (11)$$

Масса элементарного сектора слоя внутри угла $d\theta$ есть

$$dM = \sigma d\tau R d\theta = \varepsilon R^2 \sigma \cos 2\theta d\theta, \quad (12)$$

а вклад в потенциал от указанного сектора на пробную точку (r, θ', x_3) будет равен

$$d\varphi_{\text{layer}} = \frac{GdM}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \theta') + x_3^2}}. \quad (13)$$

Интегрируя по всем элементарным секторам, находим потенциал всего возмущающего слоя на заданную пробную точку

$$\varphi_{\text{layer}} = \varepsilon G R^2 \sigma \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta d\theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos(\theta - \theta') + x_3^2}}. \quad (14)$$

Однако интеграл (14) напрямую взять не удастся и будем действовать обходным методом. Введем новую переменную интегрирования

$$y = \theta - \theta', \quad (15)$$

после чего интеграл (14) примет вид

$$\varphi_{\text{layer}} = \varepsilon G R^2 \sigma \int_{-\theta'}^{2\pi - \theta'} \frac{\cos[2(y + \theta')] dy}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos y + x_3^2}}. \quad (16)$$

Теперь заметим, что

$$\cos[2(y + \theta')] = \cos 2\theta' \cos 2y - \sin 2\theta' \sin 2y. \quad (17)$$

Подставим выражение (17) под знак интеграла в (16), тогда появляются два новых интеграла. В первом из них в силу периодичности подынтегральной функции пределы интегрирования можно сместить

$$\int_{-\theta'}^{2\pi-\theta'} \frac{\cos 2y dy}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos y + x_3^2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2y dy}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos y + x_3^2}}. \quad (18)$$

Еще более сильное упрощение имеем во втором интеграле

$$\int_{-\theta'}^{2\pi-\theta'} \frac{\sin 2y dy}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos y + x_3^2}} = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2y dy}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos y + x_3^2}} = 0. \quad (19)$$

С учетом двух последних равенств интеграл (16) заметно упрощается

$$\varphi_{\text{layer}} = \varepsilon GR^2 \sigma \cos 2\theta' \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2y dy}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2rR \cos y + x_3^2}}. \quad (20)$$

Этот интеграл (20) уже может быть вычислен в конечном виде. После многих расчетов находим

$$\varphi_{\text{layer}} = e^2 \frac{4GR^2 \sigma a^2}{3b^2 \sqrt{a+b}} \cos 2\theta \times \left\{ \left(1 - \frac{b^2}{4a^2}\right) K(k) - \left(1 + \frac{b}{a}\right) E(k) \right\}, \quad (21)$$

где штрих у θ опущен и обозначено

$$a = R^2 + r^2 + x_3^2, \quad b = 2rR; \quad k = \sqrt{\frac{2b}{a+b}} \leq 1; \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (22)$$

Выражение (21) представляет пространственный потенциал возмущающего слоя. Так как в нем присутствует множитель $\cos 2\theta$, этот потенциал исчезает в точках четырех ортогональных диску плоскостей, проходящих через направления

$$\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}. \quad (23)$$

Складывая теперь потенциал слоя (21) с потенциалом круглого диска из (5), получим пространственный

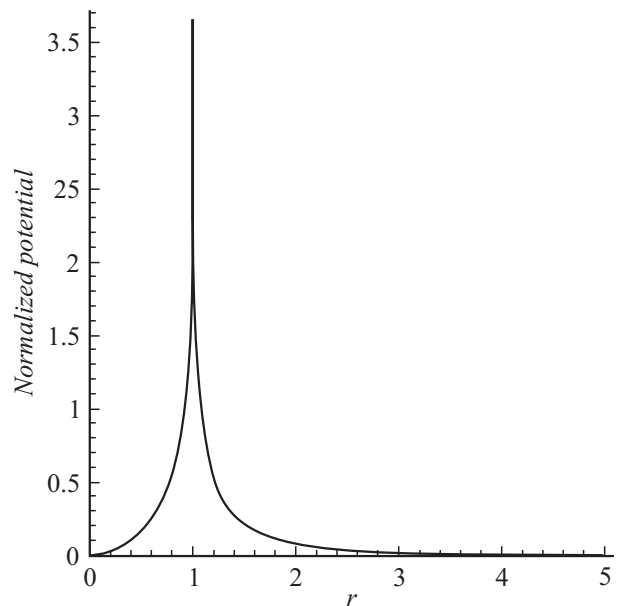


Рис. 2. Нормированный на $G\sigma R e^2$ потенциал возмущающего слоя в главной плоскости диска как функция $\frac{r}{R}$.

потенциал однородного слабо сжатого эллиптического диска

$$\varphi_{\text{disk}}(r, \theta, x_3) = \varphi_0(r, x_3) + \varphi_{\text{layer}}(r, \theta, x_3) \quad (24)$$

или

$$\frac{\varphi_{\text{disk}}\left(\frac{r}{R}, \frac{x_3}{R}, \theta\right)}{G\sigma r} = \frac{4}{\sqrt{\lambda+1}} \left\{ (1+x_3^2)K(k) - r^2 \frac{K(k) - E(k)}{\mu+1} - x_3^2 \Pi\left[\frac{1}{\lambda+1}, k\right] \right\} + e^2 \frac{4a^2}{3b^2 \sqrt{a+b}} \times \cos 2\theta \left\{ \left(1 - \frac{b^2}{4a^2}\right) K(k) - \left(1 + \frac{b}{a}\right) E(k) \right\}. \quad (25)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$k = \sqrt{\frac{\mu+1}{\lambda+1}} \leq 1,$$

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right) = \frac{1}{2} \left(r^2 + x_3^2 - 1 \pm \sqrt{(r^2 + x_3^2 - 1)^2 + 4x_3^2} \right),$$

$$a = 1 + r^2 + x_3^2, \quad b = 2r, \quad k_1 = \sqrt{\frac{2b}{a+b}} \leq 1, \quad r \equiv \frac{r}{R}, \quad x_3 \equiv \frac{x_3}{R}. \quad (26)$$

Подчеркнем, что потенциал (25) представлен в конечном виде, причем дополнительный член содержит полные эллиптические интегралы только первого и второго рода.

3. Обсуждение

Существенно, что потенциал (25) определен в любой точке пространства, включая и точки внутри самого

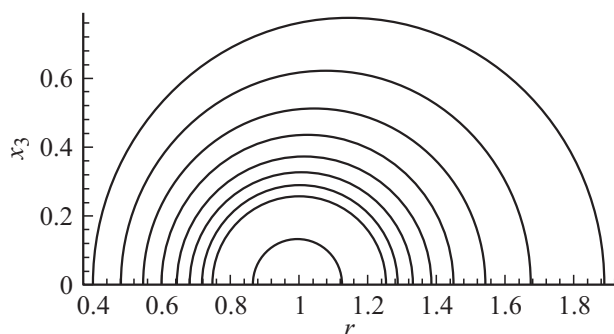


Рис. 3. Эквипотенциали возмущающего слоя в меридиональной плоскости диска для значений $\frac{\varphi_{\text{layer}}}{G\sigma R e^2 \cos 2\theta}$ от 0.1 (внешняя кривая) до 0.75 на внутренней кривой.

диска. На границе диска (11) потенциал расходится. Ориентацию пробной точки относительно главных осей эллипса задает множитель $\cos 2\theta$. Как отмечалось, при $\theta = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$ вклад от возмущающего слоя исчезает. В частности, в главной плоскости диска ($x_3 = 0$) потенциал слоя обнуляется по полупрямым, заданным направлениями (23). Подчеркнем, что указанная модуляция потенциала слоя прямо следует из наших формул и, кроме того, подтверждается прямым численным расчетом интегралов (14) и (20).

Обратим внимание, что потенциал возмущающего слоя (21) на оси симметрии Ox (при $r = 0$) равен нулю. На границе же самого слоя потенциал в согласии с теорией обращается в бесконечность (рис. 2).

На рис. 3 представлено семейство эквипотенциалей в меридиональной плоскости диска, которое было рассчитано по формуле (21). Заметна асимметрия кривых относительно точки $\frac{r}{R} = 1$.

Таким образом, потенциал слабо сжатого эллиптического диска получен в конечном аналитическом виде, что решает поставленную задачу.

Список литературы

- [1] Кондратьев Б.П. Теория потенциала и фигуры равновесия. М., Ижевск: РХД, 2003. 624 с.
- [2] Кондратьев Б.П. Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007. 512 с.
- [3] Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 270 с.
- [4] Дубошин Г.Н. Теория притяжения. М.: Физматгиз, 1961. 288 с.
- [5] Kondratyev B.P., Dubrovskii A.C., Trubitsyna N.G., Mukhametshina E.Sh. Laplace series expansion of the potential of a homogeneous circular torus. JtePh, 2010. Vol. 54. P. 176–181.
- [6] Kondratyev B.P. On the radius of convergence of the laplace series for the „Internal“ potential of a gravitating torus. JtePh, 2010. Vol. 55. P. 1812–1813.
- [7] Kondratyev B.P., Trubitsyna N.G. Laplace series expansion of the internal potential of a homogeneous circular torus. JtePh, 2010. Vol. 55. P. 22–25.