

01

## О динамике частицы в динамическом бильярде

© В.Д. Винокурова,<sup>1</sup> Н.Н. Розанов,<sup>1,2,3</sup> Э.Г. Федоров<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Государственный оптический институт им. С.И. Вавилова,  
199053 Санкт-Петербург, Россия

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский национальный исследовательский университет  
информационных технологий, механики и оптики,  
197101 Санкт-Петербург, Россия

<sup>3</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,  
194021 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: nnrosanov@mail.ru

(Поступило в Редакцию 9 июля 2015 г.)

Проведен анализ динамики точечной классической частицы при ее упругом отражении от одиночной периодически осциллирующей стенки и в схеме динамического бильярда с отражениями от неподвижной и осциллирующей стенок. В случае одиночной стенки продемонстрирован режим „прилипания“, в котором частица в течение полупериода осцилляций практически локализована на стенке, многократно отражаясь от нее. Показано, что при варьировании параметров задачи в диапазоне, отвечающем изменению числа последовательных отражений от одной и той же стенки, зависимость скорости отраженной частицы от этих параметров включает разрывы производной. Для схемы динамического бильярда представлены устойчивые режимы различных типов с неизменной кинетической энергией частицы и режимы детерминированного хаоса; в последнем случае также существенным является наличие указанных разрывов.

### Введение

Для объяснения ускорения космических частиц Ферми предложил механизм, основанный на отражении таких частиц от хаотически движущихся массивных объектов [1]. В развитие этой идеи Улам провел компьютерное моделирование движения точечной механической частицы между неподвижной и периодически осциллирующей стенками, обнаружив режимы динамического хаоса [2]. В дальнейшем в этом направлении были выполнены многочисленные исследования как имеющие принципиальное значение для обоснования статистической физики, так и уточняющие характер динамики частицы в динамическом бильярде различной физической природы [3–7]. Отметим, что принимаемое в ряде работ вслед за Уламом [2] упрощение, состоящее в приближении движения стенки пилообразным, недостаточно реалистично и не позволяет достоверно описать, например, устойчивость даже простейших видов динамики частицы в бильярде. Так же недостаточно обосновано популярное в литературе пренебрежение отклонениями точки встречи частицы с осциллирующей стенкой [3]. В настоящей работе представлены результаты аналитического и численного анализов динамики частицы в одномерном динамическом бильярде без использования указанных приближений. Особое внимание уделяется „режиму прилипания“, в котором частица несколько раз последовательно сталкивается с одной и той же осциллирующей стенкой, что приводит к новым типам динамики. Краткое изложение части этих результатов содержится в [4].

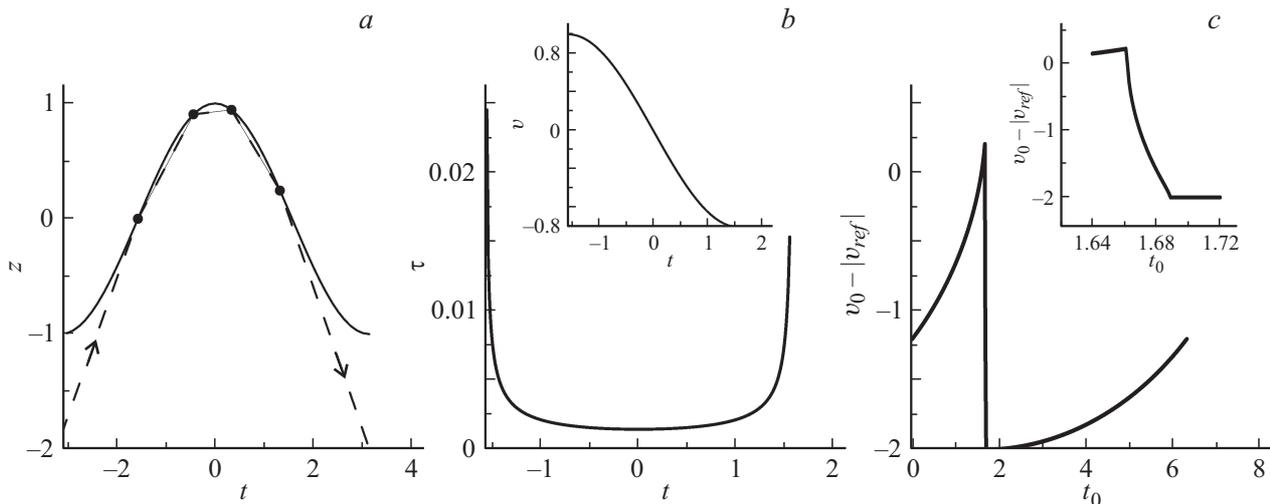
### 1. Отражение частицы от осциллирующей стенки

Рассмотрим сначала отражение частицы от стенки, осциллирующей с определенной частотой  $\Omega$  и амплитудой  $\mu L_0$ , где  $L_0$  — величина размерности длины и  $\mu$  — безразмерный параметр. Тогда координата стенки  $Z_w(t) = \mu L_0 \cos(\Omega t)$ . Далее вводим безразмерное время  $\Omega t \rightarrow t$  и безразмерную координату стенки  $z_w(t) = Z_w(t)/(\mu L_0) = \cos t$ . Для скорости частицы  $V$  также используем безразмерную форму  $v = V/(\mu L_0)$ . После  $n$ -го упругого отражения частицы от стенки в момент времени  $t_n$  скорость частицы будет  $v_{n+1} = -v_n + 2\dot{z}_w(t_n) = -v_n - 2\sin t_n$ , а траектория частицы  $z_p(t) = \cos t_n + v_{n+1} \times (t - t_n)$ . Соответственно уравнение для определения времени следующего столкновения имеет вид

$$\cos t_{n+1} = \cos t_n + v_{n+1} \times (t_{n+1} - t_n). \quad (1)$$

Это уравнение универсально в том смысле, что в него не входят никакие параметры схемы.

При не слишком больших скоростях частицы, падающей на осциллирующую стенку (по сравнению с максимальной скоростью движения стенки), частица может столкнуться со стенкой не один, а несколько раз, прежде чем окончательно удалится от нее. Пример четырех последовательных столкновений частицы от осциллирующей стенки приведен на рис. 1, а. Покажем, что при определенном подборе условий число последовательных столкновений может быть как угодно велико („режим прилипания“). В таком режиме временной интервал между последовательными столкновениями  $\tau_n = t_{n+1} - t_n$  весьма мал. Для него, используя в (1)



**Рис. 1.** *a* — временная зависимость координаты осциллирующей стенки (сплошная линия) и траектория частицы (штриховая линия) в случае четырех последовательных отражений от стенки;  $t_a = -\pi/2$ , начальная скорость частицы  $v_0 = 1.2$ ; стрелки показывают направление движения частицы, которое меняется на противоположное при изменении знака начальной скорости; *b* — зависимость временного интервала между столкновениями  $\tau$  и скорости частицы  $v$  (врезка) от времени;  $t_a = -\pi/2$ ,  $v_0 - v_a = 0.0001$ ; *c* — зависимость разности начальной скорости  $v_0$  и итоговой скорости отраженной частицы на выходе из зоны колебания стенки (после возможного неоднократного в течение полупериода отражения)  $v_{ref}$  от начальной фазы осциллирующего зеркала  $t_0$ ,  $v_0 = 0.212$ . Врезка — подробное изображение области с изломами зависимости.

разложение Тейлора с сохранением кубического по  $\tau_n$  члена, найдем

$$\tau_n = \frac{3 \cos t_n - \sqrt{9 \cos^2 t_n + 24 \sin t_n (v_{n+1} + \sin t_n)}}{2 \sin t_n}. \quad (2)$$

Интервал  $\tau_n$  мал, если мала величина  $v_{n+1} + \sin t_n$ . Поэтому „идеальный“ режим прилипания достигается, когда частица сталкивается с „убегающей“ стенкой в момент времени  $t_a = -\pi/2$  с единичной скоростью  $v_a = 1$ . Тогда число столкновений частицы со стенкой бесконечно велико и частица отлетает от стенки через половину периода осцилляций (в момент  $t = \pi/2$ ) с той же кинетической энергией (скорость отлетания  $v = -v_a = -1$ ). При малых отклонениях скорости налета и момента столкновения от „идеальных“ условий число столкновений становится конечным. На рис. 1, *b* приведена полученная при использовании (2) временная зависимость интервала между столкновениями и скорости частицы в условиях, когда число столкновений составляет 1632.

В зависимости от времени первого столкновения или же начальной фазы осцилляций стенки частица может либо уменьшать, либо увеличивать свою кинетическую энергию в результате столкновений. На рис. 1, *c* показана соответствующая зависимость разности модулей итоговой скорости частицы после отражения от вибрирующей стенки и начальной скорости частицы от фазы осцилляций стенки  $t_0$  в момент времени, когда (безразмерная) координата частицы  $z_{p0} = -1$ . Эта зависимость хотя и непрерывна, но обладает разрывами производной, которые происходят при смене числа последовательных

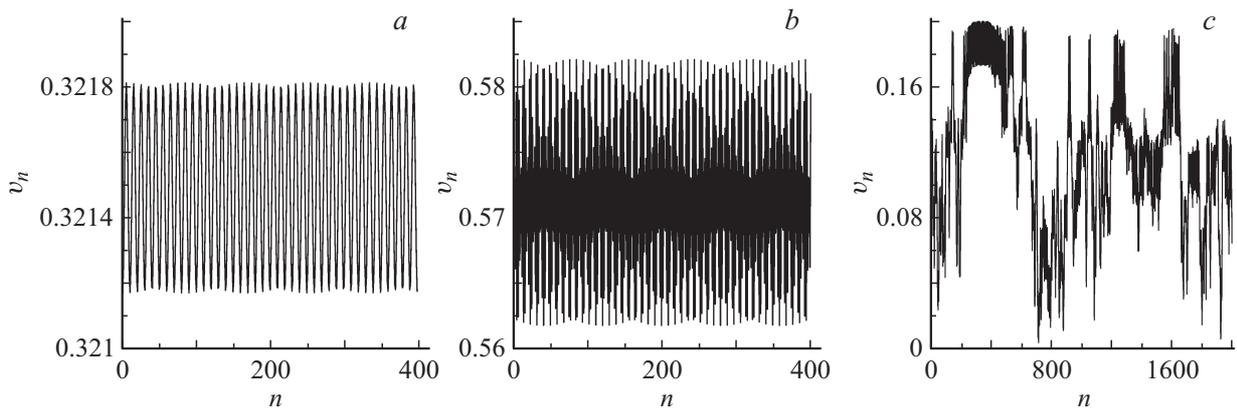
отражений частицы от стенки. Так, на рис. 1, *c* участки с положительной (отрицательной) производной отвечают режимам однократного (двукратного) отражения. Аналогичные разрывы возникают и при варьировании начальной скорости частицы.

## 2. Движение частицы между неподвижной и осциллирующей стенками

Далее рассмотрим движение частицы между неподвижной (расположенной при  $z = 0$ ) и осциллирующей стенками. Теперь уже нельзя перенормировкой устранить параметр  $\mu$ , поэтому безразмерные координаты и скорости получаем делением размерных величин на среднее расстояние между стенками  $L_0$ . Тогда координата осциллирующего зеркала  $z_w(t) = 1 + \mu \cos t$ . Глубину модуляции координаты считаем малой,  $\mu^2 \ll 1$ .

Сначала проверим реализуемость простейших движений с сохранением кинетической энергии частицы при столкновениях со стенками. Пусть для невозмущенного движения первое столкновение происходит при  $t = 0$ , а следующие при  $t = 2\pi N$ ,  $N = 1, 2, \dots$ . Тогда скорость невозмущенного движения частицы  $v_{0N} = z_0/(\pi N) = (1 + \mu)/(\pi N)$ , а динамика малых отклонений скорости  $\delta v_n$  и момента столкновения  $\delta t_n$  определяется рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned} \delta v_{n+1} &\approx \delta v_n + 2\mu \delta t_n, \\ \delta t_{n+1} &= -\frac{2\pi^2 N^2}{1 + \mu} \delta v_n + \left[ 1 - \frac{4\pi^2 N^2 \mu}{1 + \mu} \right] \delta t_n. \end{aligned} \quad (3)$$



**Рис. 2.** Зависимости скорости частицы от номера столкновения в окрестности режима с  $N = 1$  (a),  $M = 1$  (b) и режима динамического хаоса при  $\mu = 0.01$  и  $v_0 = 0.015$  (c).

Собственные значения матрицы преобразования (3)  $\lambda$  находятся из квадратного уравнения

$$(1 - \lambda)(1 - \lambda - a) + a = 0, \quad a = \frac{4\pi^2 N^2 \mu}{1 + \mu},$$

$$\lambda_{1,2} = 1 - \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - a}, \quad \lambda_1 \times \lambda_2 = 1. \quad (4)$$

Режим с отражениями от стенки в ее крайнем „левом“ положении (координата  $z_w = 1 - |\mu|$ ) соответствует  $\mu < 0$ . Тогда  $a < 0$ , корни вещественны и наибольший корень превышает единицу. Это отвечает апериодической неустойчивости данного режима отражения. В режимах отражения от стенки в „правом“ положении,  $z_w = 1 + |\mu|$ , можно считать  $\mu > 0$  и  $a > 0$ . При  $0 < a < 4$  подкоренное выражение в (4) отрицательно, корни  $\lambda_{1,2} = \exp(\pm i\nu)$ ,  $\text{tg } \nu = \sqrt{4a - a^2}/(2 - a)$ ,  $|\lambda_{1,2}|^2 = 1$ . В этом случае динамика отклонений скорости частицы от равновесного значения следующая:  $\delta v_n = w \cos(\nu n + \varphi)$ , где  $w$  и  $\varphi$  произвольны. Это означает нейтральную устойчивость режимов отражения от осциллирующей стенки в моменты ее максимального удаления. Если же  $a > 4$ , то оба корня вещественны и отрицательный корень меньше  $-1$ . Тогда реализуется колебательная неустойчивость. Граница устойчивости отвечает  $a_{cr} = 4$ , или  $\mu_{cr} = 1/(\pi^2 N^2 - 1)$ . При  $N = 1$   $\mu_{cr} = 0.113$ , при  $N = 2$   $\mu_{cr} = 0.026$ .

Численное моделирование подтверждает приведенные выводы. Так, рис. 2, a демонстрирует нейтральную устойчивость режима с  $N = 1$  при  $\mu = 0.01$ , когда начальная скорость частицы немного отличается от „невозмущенного“ значения. Действительно, неустойчивыми оказываются режимы с отражением от осциллирующего зеркала в моменты, отвечающие  $z_w = 1 - |\mu|$ . Но возможными оказываются не только подобные режимы. Например, при большей скорости  $v_{0M} = 1/[\pi(M - 1/2)]$ ,  $M = 1, 2, \dots$  устойчивыми могут быть режимы с чередованием отражения частицы от осциллирующей стенки в моменты ее наибольшего и наименьшего удаления

(рис. 2, b). Исследование таких режимов, аналогичное приведенному выше, показывает, что эти режимы устойчивы при  $\mu < \mu_{cr} = 2/\pi^2$ .

При меньших скоростях частицы типичен режим динамического хаоса [8], пример которого приведен на рис. 2, c. Для характеристики хаоса удобно использовать вычисление показателя Ляпунова, фурье-преобразование зависимости скорости частицы от времени (временной спектр), а также фазовый портрет процесса. Для исследования этих характеристик процесса движения частицы между вибрирующей и неподвижной стенками рассмотрим фазовое пространство  $(h, v)$  координат  $(h = z - L_0(1 - \mu))$  и скоростей частицы, в котором дискретная фазовая траектория (фазовый портрет) процесса представляет кривую, проходящую через точки  $(h_n, v_n)$ , где  $h_n$  — положение (ордината) частицы в границах вибрации стенки в момент  $n$ -го соударения,  $0 \leq h_n \leq 2L_0\mu$ ,  $v_n$  — скорость частицы перед  $n$ -ом соударением.

На рис. 3 приведены результаты установления показателя Ляпунова, определяемого как [3]

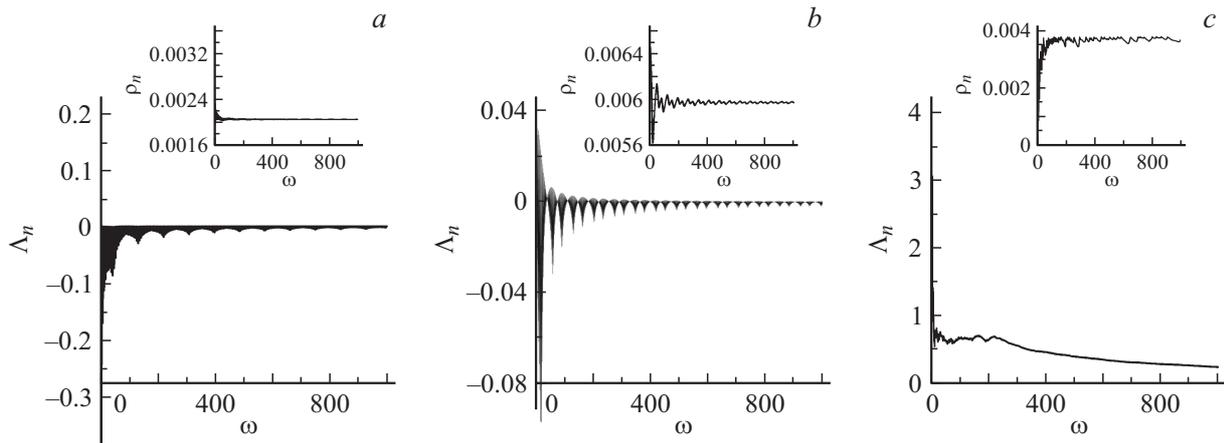
$$\Lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n,$$

$$\Lambda_n = \lim_{dv \rightarrow 0} \sqrt{(v_n - v'_n)^2 + (h_n - h'_n)^2} / (ndv) \quad (5)$$

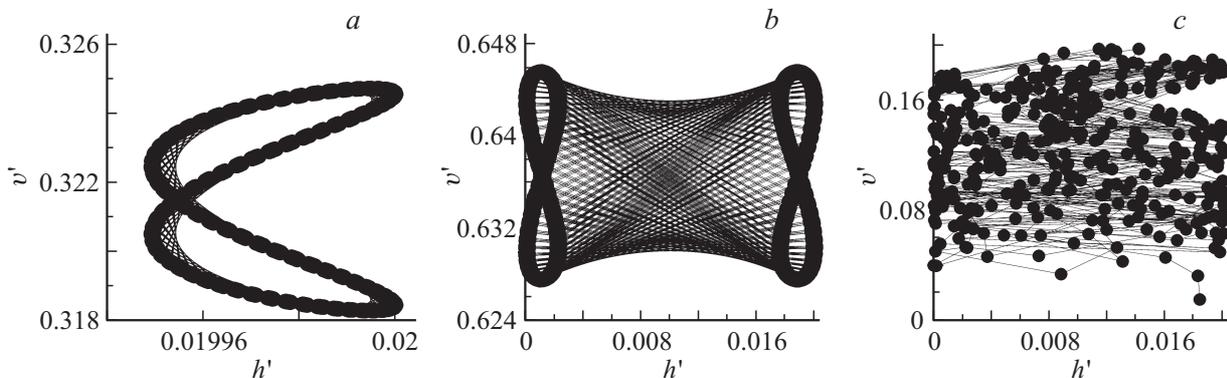
для рассмотренных выше случаев. Здесь  $n$  — число отражений от неподвижной стенки, штрихи помечают скорости и ординаты частицы в момент  $n$ -го соударения с вибрирующей стенкой после  $n$ -го отражения от неподвижной стенки для (смещенной) траектории в фазовом пространстве, начальное значение скорости для которой отлично на  $dv$  от начального значения скорости для основной (исследуемой) траектории при той же начальной фазе колебания вибрирующей стенки

$$v' = v + dv. \quad (6)$$

На рис. 3 приведены также результаты расчета для усредненного по  $n$  значения отклонения в фазовом



**Рис. 3.** Установление показателя Ляпунова в зависимости от числа отражений  $n$  для рассмотренных выше режимов с  $N = 1$  (a),  $M = 1$  (b) и режима динамического хаоса при  $\mu = 0.01$  и  $v_0 = 0.015$  (c);  $dv = 0.01v_0$ .



**Рис. 4.** Фазовые портреты режимов с  $N = 1$  (a),  $M = 1$  (b) и режима динамического хаоса при  $\mu = 0.01$  и  $v_0 = 0.015$  (c);  $dv = 0.01v_0$ ,  $n = 400$ .

пространстве точек смещенной траектории от точек исследуемой траектории

$$d\rho_n = \sum_{j=1}^n \sqrt{(v_j - v'_j)^2 + (h_j - h'_j)^2} / n. \quad (7)$$

Отметим, что при исследовании хаотической динамики (рис. 4, c) использовалась процедура регуляризации [3], а именно при превышении отношением  $d\rho_n/dv = \eta$  некоторого значения ( $\eta = 25$ ) для расчета следующего соударения брали значение скорости на неподвижной стенке, отличное на  $dv$  от значения скорости для основной (исследуемой) траектории

$$v'_{n+1} = v_{n+1} + dv, \quad (8)$$

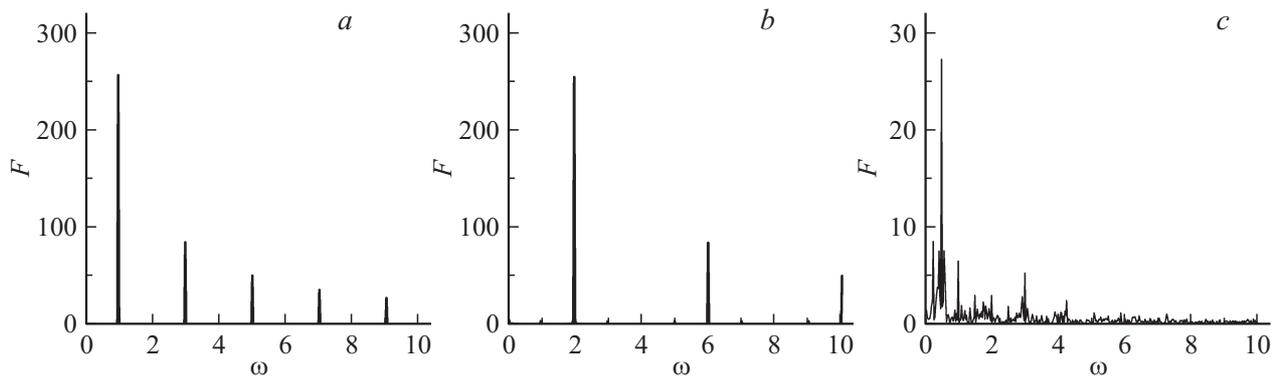
при прочих равных параметрах (а именно — фазе колебания вибрирующей стенки в момент  $n$ -го соударения для основной исследуемой траектории) [3]. Такая процедура соответствует усреднению промежуточных значений показателя Ляпунова, задаваемого по формуле (5) по участкам исследуемой траектории, на которых  $d\rho_n$  соизмеримо с  $dv$  (усреднение с весом, равным числу

соударений на этих участках). На рис. 4 приведены фазовые портреты рассчитанных выше процессов.

На рис. 5 представлены преобразования Фурье зависимости скорости частицы от времени для рассмотренных случаев

$$F(\omega) = \frac{2}{T} \sqrt{\left( \int_0^T v \cos(\omega\tau) d\tau \right)^2 + \left( \int_0^T v \sin(\omega\tau) d\tau \right)^2}, \quad (9)$$

для безразмерного времени  $T = 10$ . Как видно из рис. 3, a–5, a и 3, b–5, b, все три характеристики движения показывают, что режимы с  $N = 1$  и  $M = 1$  при  $\mu = 0.01$ , когда начальная скорость частицы лишь немного отличается от „невозмущенного“ значения, являются устойчивыми, в спектре Фурье присутствуют соответствующие наборы кратных частот, а фазовые портреты представляют собой упорядоченные фигуры типа Лиссажу. Режимы динамического хаоса (рис. 3, c–5, c) характеризуются положительными значениями установившегося показателя Ляпунова, широким спектром ча-



**Рис. 5.** Преобразования Фурье скорости частицы для режимов с  $N = 1$  (a),  $M = 1$  (b) и режима динамического хаоса при  $\mu = 0.01$  и  $v_0 = 0.015$  (c).

стот в преобразовании Фурье и беспорядочным фазовым портретом.

При исследовании движения частицы между осциллирующей и неподвижной стенками возникает вопрос об устойчивости режима „прилипания“ частицы вблизи осциллирующей стенки, возможность которого показана в разд. 1. „Идеальный“ режим прилипания достигается, когда частица сталкивается с „убегающей“ стенкой в момент времени  $t_a = -\pi/2$  при  $z = L_0 = 1$  со скоростью  $v_0 = \mu$  и отлетает от стенки с той же по модулю скоростью через половину периода осцилляций (в момент  $t = \pi/2$ ) тоже при  $z = L_0 = 1$ . Повторение этого идеального режима можно ожидать лишь при выполнении условия

$$\mu = \mu_k = 2/(\pi(2k - 1)), \quad k = 1, 2, \dots$$

Однако из-за сильной чувствительности к начальным условиям (начальной скорости и фазе колебания стенки, т.е. выполнения  $v_0 = \mu$ ,  $t_a = -\pi/2 + 2\pi k$ ), реализация такого повторения проблематична. Так, при  $v = v_0(1 + 0.0001)$  и начальной фазе, соответствующей первому контакту при  $t_a = -\pi/2$ , число отражений частицы от вибрирующей стенки за полупериод при первом контакте составляет 1631, при втором — 12, при третьем — 0, при четвертом — 2. При этом в последующие моменты времени на длительном промежутке имеет место режим динамического хаоса с одноразовым контактом частицы со стенкой в течение полупериода ее колебаний при положительном показателе Ляпунова  $\Lambda = 0.5$ .

Отметим следующее обстоятельство. Поскольку отражение частицы от стенок является упругим, можно рассмотреть обращенный процесс движения частицы. В этом процессе после определенного этапа хаотического движения частица „прилипает“ к вибрирующей стенке на время, приблизительно равное половине периода колебания стенки, и затем после нескольких проходов через ловушку при меньшем числе последовательных столкновений снова уходит в хаотическое движение.

Соответствующие расчеты подтвердили описанную ситуацию. Это обстоятельство свидетельствует о том, что в режиме динамического хаоса в задаче Улама возможны этапы с многократными последовательными столкновениями частицы с одной и той же колеблющейся стенкой.

## Заключение

Таким образом, последовательное рассмотрение динамики частицы, движущейся между неподвижной и осциллирующей стенками, не только подтверждает возможность ее как регулярного, так и хаотического движения, но и выявляет важные особенности, связанные с возможностью нескольких последовательных столкновений частицы с одной и той же осциллирующей стенкой. Уже при взаимодействии с единственной колеблющейся стенкой это обстоятельство приводит к разрывности наклона зависимости изменения кинетической энергии частицы от фазы осцилляций стенки и к своеобразному „режиму прилипания“ (бесконечно большое число последовательных столкновений в идеальных условиях). Анализ демонстрирует высокую чувствительность числа таких столкновений к начальному положению и скорости частицы. В одномерной ловушке, образованной неподвижной и осциллирующей стенками, этот эффект вызывает своеобразные особенности режима динамического хаоса, который может включать этапы с подобными многократными столкновениями частицы с осциллирующей стенкой. Здесь мы рассматривали только случай упругих столкновений частицы со стенкой, когда динамика частицы обратима (траектория частицы проходит в обратном направлении при соответствующем изменении начальных условий). В случае неупругого отражения частицы стенкой естественно ожидать повышения устойчивости различных режимов, включая режим многократного повторения „прилипания“. Этот вопрос будет проанализирован в следующей работе.

Указанные эффекты необходимо учитывать и в более сложных (неодномерных) вариантах динамического бильярда. Режим прилипания может быть практически

полезен для реализации длительного удержания частицы у поверхности, например, в химических реакторах [9] с катализатором на осциллирующей поверхности. Родственные явления могут проявляться и в динамике квантовых частиц и солитонов в динамических ловушках [10–14].

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-12-00894).

## Список литературы

- [1] *Fermi E.* // Phys. Rev. 1949. Vol. 75. P. 1169.
- [2] *Ulam S.M.* In Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Berkeley, CA (University of California Press, Berkeley, 1961). Vol. 3. P. 315.
- [3] *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. М.: Мир, 1984.
- [4] *Винокурова В.Д., Розанов Н.Н.* // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40. Вып. 21. С. 21–28.
- [5] *Пустыльников Л.Д.* // УМН. 1995. Т. 50. № 1 (301). С. 143–186.
- [6] *Лоскутов А.Ю.* // УФН. 2007. Т. 177. С. 989.
- [7] *Gelfreich V., Kedar V.R., Shah K., Turaev D.* // Phys. Rev. Lett. 2011. Vol. 106. P. 074 101.
- [8] *Шустер Г.* Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 240 с.
- [9] Процессы и аппараты химической технологии. В 5 т. / Под ред. А.М. Кутепова. М.: Логос, 2000.
- [10] *Rozanov N.N.* // Phys. Rev. A. 2013. Vol. 88. P. 063 616.
- [11] *Розанов Н.Н., Сочилин Г.Б.* // ЖЭТФ. 2014. Т. 145. Вып. 1. С. 143–152.
- [12] *Rozanov N.N.* // Phys. Rev. A. 2014. Vol. 89. P. 035 601.
- [13] *Rozanov N.N., Vysotina N.V.* // Phys. Rev. A. 2015. Vol. 91. N 1. P. 013 622.
- [14] *Rozanov N.N., Vysotina N.V.* // JOSA. B. 2015. Vol. 32. N 5. P. B20–B24.