Журнал технической физики, 2016, том 86, вып. 4

01

Рекуррентная процедура расчета ядер нелинейного интеграла столкновений уравнения Больцмана

© *Л.А. Бакалейников,*[1] *Е.Ю. Флегонтова,*[1] *А.Я. Эндер*,[1] *И.А. Эндер*[2]

[1] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
198504 Санкт-Петербург
e-mail: fl.xiees@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 16 сентября 2015 г.)

Разработана рекуррентная процедура последовательного построения ядер $G^{l}_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2)$, возникающих при разложении нелинейного интеграла столкновений уравнения Больцмана по сферическим гармоникам. Стартовым для этой процедуры является ядро $G^{0}_{0,0}(c, c_1, c_2)$ интеграла столкновений для изотропной по скоростям функции распределения. С помощью рекуррентной процедуры построен ряд ядер $G^{+l}_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2)$ для газа из твердых шаров и максвелловских молекул. Показано, что найденные ядра обладают свойствами подобия и симметрии, а также удовлетворяют соотношениям, следующим из законов сохранения.

Введение

Изучение физико-химических процессов в газах и плазме часто требует знания функции распределения (ФР) для частиц, скорости которых значительно превышают тепловую. Численное решение уравнения Больцмана в этом случае сопряжено с большими трудностями. Одна из основных трудностей заключается в расчете интеграла столкновений, который представляет собой пятикратный интеграл по сложной области в пространстве скоростей. Для построения ФР используются как прямое численное моделирование [1,2], так и моментные методы, основанные на разложении ФР по базису из ортогональных полиномов. Использование моментных методов сводит расчет интеграла столкновений к вычислению матричных элементов (МЭ), при этом само уравнение Больцмана переходит в систему дифференциальных уравнений для коэффициентов разложения ФР по базисным функциям. В качестве базиса обычно используются сферические полиномы Эрмита, представляющие собой произведение полиномов Сонина на сферические гармоники. Основной причиной, сдерживающей развитие этого метода, было отсутствие МЭ нелинейного интеграла столкновений. В работах [3–6] из условия инвариантности интеграла столкновений относительно выбора базиса были выведены рекуррентные соотношения для МЭ. Разработанные на основе этих соотношений рекуррентные процедуры позволили строить МЭ со сколь угодно большими индексами, что дало возможность решить ряд кинетических задач и построить ФР в скоростном интервале до 10 тепловых скоростей.

Однако требования к сходимости разложения ФР по базисным функциям в стандартном моментном методе накладывают ограничения на ФР. Эти ограничения заключаются в требовании конечности нормы ФР в гильбертовом пространстве, натянутом на полиномы Сонина, ортогональные с максвелловским весом. Это требование снимается, если раскладывать ФР по сферическим гармоникам. В этом случае интеграл столкновений, который можно представить в виде интегрального оператора с ядром $G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, зависящим от векторных скоростей частиц, заменяется набором относительно простых интегральных операторов, действующих на коэффициенты разложения ФР по сферическим гармоникам $f_{l,m}(v)$. Ядра этих операторов зависят только от модулей скоростей и играют ту же роль, что и МЭ в стандартном моментном методе. Как показано в [3,7], все ядра могут быть выражены через ядра $G^{l}_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$, полученные при проектировании ядра $G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ на полиномы Лежандра. В [8] получен очень важный результат: ядра интегральных операторов с разными значениями индексов не являются независимыми, а связаны набором соотношений, как и МЭ в стандартном моментном методе. Этот набор соотношений позволяет, вообще говоря, найти ядра с произвольными индексами, используя лишь ядро $G^{0}_{0,0}(v, v_1, v_2)$. В отличие от МЭ, зависящих от шести индексов, $G^{l}_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$ зависят только от трех индексов, что упрощает построение рекуррентной процедуры, но связи между ними являются не алгебраическими, а дифференциальными.

Интеграл столкновений может быть представлен в виде суммы интегралов прямых (loss term) и обратных (gain term) столкновений с соответствующими ядрами. Наиболее трудным является расчет ядер $G^{+l}_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$ интеграла обратных столкновений. Для некоторых потенциалов взаимодействия ядра $G^{+0}_{0,0}(v, v_1, v_2)$ в настоящее время получены в аналитическом виде. Основные результаты по построению $G^{+0}_{0,0}$ были приведены в работах [9–11]. Ядра были найдены для двух сечений взаимодействия — твердых шаров и псевдомаксвелловских молекул. В [12] для тех же моделей взаимодействия был построен более широкий класс ядер — ядра $G^{+l}_{l,0}$. В [13] были получены ядра для произвольных степенных сечений при изотропном рассеянии. В [14] ядро $G^{+0}_{0,0}$ для произвольного изотропного сечения рассеяния было представлено в виде однократной квадратуры.

Целью настоящей работы является построение рекуррентной процедуры, позволяющей последовательно находить ядра $G^{l}_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$ с произвольными индексами по известному ядру $G^{0}_{0,0}(v, v_1, v_2)$. Отметим, что первый шаг рекуррентной процедуры для случая твердых шаров и максвелловских молекул был выполнен в [15], что позволило впервые найти ядра $G^{1}_{1,0}(v, v_1, v_2)$, $G^{0}_{1,1}(v, v_1, v_2)$, $G^{1}_{0,1}(v, v_1, v_2)$ (остальные ядра с индексами, сумма которых равна 2, равны нулю).

1. Рекуррентная процедура

Нелинейное уравнение Больцмана для пространственно однородного газа при отсутствии внешних сил имеет вид

$$n_0\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{v}, t) - n_0^2\hat{I}(f, f), \qquad (1)$$

где n_0 — концентрация частиц в единице объема, $f(\mathbf{v}, t)$ — нормированная на единицу ФР, $\hat{I}(f, f)$ — пятикратный интеграл столкновений:

$$\hat{I}(f, f) = \iint f(\mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}_2)g\sigma d\mathbf{v}'d\mathbf{k} - \iint f(\mathbf{v})f(\mathbf{v}')g\sigma d\mathbf{v}'d\mathbf{k}. \qquad (2)$$

Здесь $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — скорости сталкивающихся частиц до и после взаимодействия, связанные соотношениями $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}+\mathbf{v}'+\mathbf{k}g)/2$, $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v}+\mathbf{v}'-\mathbf{k}g)/2$, $\mathbf{g} = \mathbf{v}-\mathbf{v}'$ — вектор относительной скорости, $\mathbf{k}$ — единичный вектор, направленный вдоль вектора относительной скорости частиц после столкновения. В случае неориентированных в пространстве частиц дифференциальное сечение рассеяния σ зависит только от величины относительной скорости g и угла рассеяния θ, т. е. $\sigma = \sigma(g, \theta)$, а угол рассеяния определяется соотношением $\cos\theta = \mathbf{kg}/|\mathbf{g}|$. Интеграл столкновений может быть записан как интегральный оператор с ядром $G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$, зависящим от векторных скоростей [7]. В соответствии с (2) это ядро может быть представлено в виде разности ядер интегралов обратных и прямых столкновений, т. е.

$$\hat{I}(f, f) = \iint G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)f(\mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}_2)d\mathbf{v}_1d\mathbf{v}_2$$
$$= \iint \big(G^+(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - G^-(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)\big) f(\mathbf{v}_1)f(\mathbf{v}_2)d\mathbf{v}_1d\mathbf{v}_2, \qquad (3)$$

Для неориентированных в пространстве частиц ядро $G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ является ортогонально-инвариантным (т. е. инвариантно относительно поворота тройки векторов координатных осей). В этом случае ядра G^+ и G^- имеют вид [13]

$$G^+(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = $$
$$= 8\sigma\left(|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|, \arccos\left(\frac{((\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2)(2\mathbf{v}-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2))}{|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2||2\mathbf{v}-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|}\right)\right)$$
$$\times\frac{\delta(|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|-|2\mathbf{v}-\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|)}{|\mathbf{v}_1-\mathbf{v}_2|},$$

$$G^-(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \delta(\mathbf{v}-\mathbf{v}_1)|\mathbf{v}-\mathbf{v}_2|\Sigma(|\mathbf{v}-\mathbf{v}_2|),$$

где $\Sigma(v)$ — полное сечение рассеяния. Такая форма записи интеграла столкновений оказывается удобной для анализа и преобразования уравнения (1). Для дальнейших выкладок удобно перейти к безразмерным переменным, выбирая в качестве масштаба скорости тепловую скорость, $v_{T_0} = \sqrt{2kT_0/m}$, а в качестве масштаба времени — обратную частоту столкновений $\tau_{T_0} = 1/(n_0 v_{T_0}\Sigma(v_{T_0}))$. Введем безразмерные скорости $\mathbf{c} = \mathbf{v}/v_{T_0}$, $\mathbf{c}_1 = \mathbf{v}_1/v_{T_0}$, $\mathbf{c}_2 = \mathbf{v}_2/v_{T_0}$, безразмерную ФР $f(\mathbf{c}) = f(\mathbf{v})(v_{T_0})^3$ и безразмерное ядро

$$G(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = \frac{(v_{T_0})^2}{n_0\Sigma(v_{T_0})}G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2).$$

При разложении по сферическим гармоникам ФР приобретает вид

$$f(\mathbf{c}) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l} f_{l,m}(c)Y_{l,m}(\vartheta, \varphi), \qquad (4)$$

где ϑ, φ — угловые координаты скорости $\mathbf{c}$ в сферической системе координат.

Уравнение Больцмана (1) переходит в систему связанных интегро-дифференциальных уравнений относительно $f_{l,m}(c)$

$$\frac{\partial f_{l,m}(c)}{\partial\tau} = \sum_{m_1,m_2}\sum_{l_1,l_2}\breve{Z}^{l,m}_{l_1,m_1 l_2,m_2}\hat{G}^l_{l_1,l_2}\big(f_{l_1,m_1}(c_1), f_{l_2,m_2}(c_2)\big). \qquad (5)$$

Оператор $\hat{G}^l_{l_1,l_2}$ — интегральный оператор с нелинейным ядром $G^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2)$:

$$G^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2) = $$
$$= \frac{\iiint G(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)P_l(\cos\vartheta)P_{l_1}(\cos\vartheta_1)\times P_{l_2}(\cos\vartheta_2)d\cos\vartheta d\cos\vartheta_1 d\cos\vartheta_2}{\| P_l(\cos\vartheta)\|^2}. \qquad (6)$$

Здесь важно отметить, что ядра $G^l_{l_1,l_2}$ не зависят от индексов m, m_1, m_2 и совпадают с ядрами интегральных операторов в осесимметричном случае, когда разложение по сферическим гармоникам сводится к разложению по полиномам Лежандра. Числовые коэффициенты $\breve{Z}^{l,m}_{l_1,m_1 l_2,m_2}$ не зависят от сечения рассеяния и выражаются через коэффициенты Клебша–Гордана [3,7].

Для ортогонально-инвариантных ядер справедлива обобщенная теорема Гекке [16], согласно которой коэффициенты $\breve{Z}^{l,m}_{l_1,m_1 l_2,m_2}$ могут отличаться от нуля только, если $|l_1 - l_2| \le l \le l_1 + l_2$, число $l + l_1 + l_2$ — четное, $m = |m_1 \pm m_2|$ и $m + m_1 + m_2$ — четное. Некоторые фундаментальные свойства ядер $G^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2)$ исследованы в [7].

Как показано в [8,15], ядра с разными индексами связаны набором соотношений

$$\hat{B}^{(3)}_{l_2-1}(c_2)G^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2) + \hat{B}^{(2)}_l(c)G^{l+1}_{l_1,l_2-1}(c, c_1, c_2)$$
$$+ \hat{B}^{(3)}_{l_1}(c_1)G^l_{l_1+1,l_2-1}(c, c_1, c_2) = -\hat{B}^{(1)}_l(c)G^{l-1}_{l_1,l_2-1}(c, c_1, c_2)$$
$$- \hat{B}^{(4)}_{l_1}(c_1)G^l_{l_1-1,l_2-1}(c, c_1, c_2) - \hat{B}^{(4)}_{l_2-1}(c_2)G^l_{l_1,l_2-2}(c, c_1, c_2), \quad (7)$$

где $\hat{B}^{(k)}_l(c)$ — дифференциальные операторы вида

$$\hat{B}^{(1)}_l(c) = \frac{l}{2l-1}\left(\frac{\partial}{\partial c} - \frac{l-1}{c}\right),$$
$$\hat{B}^{(2)}_l(c) = \frac{l+1}{2l+3}\left(\frac{\partial}{\partial c} + \frac{l+2}{c}\right),$$
$$\hat{B}^{(3)}_l(c) = \frac{l+l}{2l+1}\left(\frac{\partial}{\partial c} + \frac{l+2}{c}\right),$$
$$\hat{B}^{(4)}_l(c) = \frac{l}{2l+1}\left(\frac{\partial}{\partial c} - \frac{l-1}{c}\right), \quad (8)$$

$$l = 0\ldots,\infty, \quad l_1 = 0\ldots,\infty, \quad l_2 = 1\ldots,\infty. \quad (9)$$

Ядра, имеющие хотя бы один отрицательный индекс, полагаются равными нулю.

На основе соотношений (7) оказывается возможным построить рекуррентную процедуру последовательного определения ядер. Для этого удобно перейти от индексов l, l_1, l_2 к параметрам

$$\lambda = (l + l_1 + l_2)/2, \quad \tau = (l - l_1 + l_2)/2, \quad \nu = l_2. \quad (10)$$

В силу обобщенной теоремы Гекке (ОТГ) [16] сумма индексов у ненулевых ядер четная, поэтому параметры λ и τ целые. Остальные условия на индексы ненулевых ядер эквивалентны неравенствам

$$0 \le \tau \le \nu \le \lambda. \quad (11)$$

Ясно, что каждая тройка параметров λ, τ, ν однозначно определяет индексы l, l_1, l_2:

$$l = \lambda - \nu + \tau, \quad l_1 = \lambda - \tau, \quad l_2 = \nu. \quad (12)$$

Учитывая, что условия (11) на индексы ненулевых ядер должны выполняться хотя бы для одного из ядер, входящих в (7), и, принимая во внимание диапазоны изменения индексов (9), найдем, что при фиксированном λ индекс τ меняется в пределах

$$0 \le \tau \le \lambda, \quad (13)$$

а индекс ν принимает значения

$$1 \le \nu \le \lambda \ \text{ при } \ \tau = 0 \quad (14)$$

$$\tau \le \nu \le \lambda + 1 \ \text{ при } \ \tau \ne 0. \quad (15)$$

Легко видеть, что сумма индексов для каждого ядра в левой части (7) на два больше, чем сумма индексов в правой части, и, следовательно, это соотношение связывает ядра с параметром λ (и различными τ и ν) и ядра с параметром $\lambda - 1$. Это может служить основой для построения рекуррентной процедуры.

Можно показать (см. Приложение), что количество неизвестных ядер на слое λ, т.е. ядер с индексами l, l_1 и l_2 такими, что $l + l_1 + l_2 = 2\lambda$, определяется соотношением $N_{nonk}(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)/2$, а число уравнений для их определения есть $N_{nonrel}(\lambda) = \lambda(\lambda + 5)/2$. Таким образом, на слое λ число соотношений для определения ядер оказывается больше, чем число неизвестных ядер, на $\lambda - 1$. Причиной появления дополнительных соотношений является ОТГ, согласно которой ядра с индексами, не удовлетворяющими неравенству $|l_1 - l_2| \le l \le l_1 + l_2$, обращаются в нуль.

Оставляя пока в стороне вопрос об анализе дополнительных соотношений, опишем процедуру построения ядер на слое λ при условии, что ядра на предыдущих слоях известны. Эта процедура похожа на соответствующую процедуру построения МЭ, изложенную в [3]. Прежде чем переходить к непосредственному описанию алгоритма, отметим, что в отличие от алгебраических связей, найденных для МЭ из условия инвариантности интеграла столкновений относительно выбора базисных функций, связи для ядер (7) носят дифференциальный характер. Поэтому для однозначного определения ядер необходимо дополнить соотношения (7) граничными условиями. Граничные условия для ядер $G^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2)$ можно получить из следующих соображений. Заметим, что ядро от векторных аргументов $G(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ при $\mathbf{c} = c\boldsymbol{\Omega} = 0$ не зависит от $\boldsymbol{\Omega}$, поэтому при вычислении $G^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2)$, согласно (6), скалярное произведение $G(0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$ на полином Лежандра $P_l(\cos\vartheta)$ оказывается равным нулю для $l \ne 0$. Отсюда следует, что

$$G^l_{l_1,l_2}(0, c_1, c_2) = 0 \ \text{ при } \ l \ne 0. \quad (16)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$G^l_{l_1,l_2}(c, 0, c_2) = 0, l_1 \ne 0, \quad G^l_{l_1,l_2}(c, c_1, 0) = 0, l_2 \ne 0. \quad (17)$$

Перейдем теперь к описанию процедуры построения ядер по соотношению (7). Будем считать, что ядра с индексами l, l_1, l_2 удовлетворяющими неравенству $l + l_1 + l_2 < 2\lambda$, известны. Перепишем соотношения (7), заменяя индексы l, l_1, l_2 параметрами λ, τ и ν:

$$\begin{aligned}\hat{B}^{(3)}_{\nu-1}(c_2)G^{\lambda+\tau-\nu}_{\lambda-\tau,\nu}(c,c_1,c_2)&\\ +\hat{B}^{(2)}_{\lambda+\tau-\nu}(c)G^{\lambda+\tau-\nu+1}_{\lambda-\tau,\nu-1}(c,c_1,c_2)&\\ +\hat{B}^{(3)}_{\lambda-\tau}(c_1)G^{\lambda+\tau-\nu}_{\lambda-\tau+1,\nu-1}(c,c_1,c_2)&\\ =-\hat{B}^{(1)}_{\lambda+\tau-\nu}(c)G^{\lambda+\tau-\nu-1}_{\lambda-\tau,\nu-1}(c,c_1,c_2)&\\ -\hat{B}^{(4)}_{\lambda-\tau}(c_1)G^{\lambda+\tau-\nu}_{\lambda-\tau-1,\nu-1}(c,c_1,c_2)&\\ -\hat{B}^{(4)}_{\nu-1}(c_2)G^{\lambda+\tau-\nu}_{\lambda-\tau,\nu-2}(c,c_1,c_2).&\qquad(18)\end{aligned}$$

Покажем, прежде всего, что связи (18), соответствующие $\tau=0$ и 1 при всех возможных значениях ν, дают замкнутую систему $2\lambda+1$ уравнений для определения $2\lambda+1$ неизвестных ядер. При $\tau=0$ в соответствии с (14) параметр ν меняется в диапазоне $1\le\nu\le\lambda$. Перебирая все значения ν из этого диапазона, находим

$$\begin{aligned}\hat{B}^{(3)}_{0}(c_2)G^{\lambda-1}_{\lambda,1}&=-\hat{B}^{(2)}_{\lambda-1}(c)G^{\lambda}_{\lambda,0}-\hat{B}^{(4)}_{\lambda}(c_1)G^{\lambda-1}_{\lambda-1,0},\\ \hat{B}^{(3)}_{1}(c_2)G^{\lambda-2}_{\lambda,2}&=-\hat{B}^{(2)}_{\lambda-2}(c)G^{\lambda-1}_{\lambda,1}-\hat{B}^{(4)}_{\lambda}(c_1)G^{\lambda-2}_{\lambda-1,1},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \hat{B}^{(3)}_{\nu-1}(c_2)G^{\lambda-\nu}_{\lambda,\nu}&=-\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu}(c)G^{\lambda-\nu+1}_{\lambda,\nu-1}-\hat{B}^{(4)}_{\lambda}(c_1)G^{\lambda-\nu}_{\lambda-1,\nu-1},\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_2)G^{0}_{\lambda,\lambda}&=-\hat{B}^{(2)}_{0}(c)G^{1}_{\lambda,\lambda-1}-\hat{B}^{(4)}_{\lambda}(c_1)G^{0}_{\lambda-1,\lambda-1}.\end{aligned}\qquad(19)$$

Каждое из этих соотношений связывает ядро $G^{\lambda-\nu}_{\lambda,\nu}$ с ядром $G^{\lambda-\nu+1}_{\lambda,\nu-1}$ (поскольку вторые члены справа известны). Отметим, что для ядер $G^{\lambda-\nu}_{\lambda,\nu}$ при $1\le\nu\le\lambda$, как отмечалось выше, выполняется граничное условие

$$G^{\lambda-\nu}_{\lambda,\nu}(c,c_1,c_2)|_{c_2=0}=0.\qquad(20)$$

Операторы $\hat{B}^{(3)}_{l}(c)$, рассматриваемые на классе функций, обращающихся в нуль при $c=0$, обратимы, и обратный оператор имеет вид

$$\left(\hat{B}^{(3)}_{l}(c)\right)^{-1}f(c)=\frac{2l+1}{(l+1)c^{l+2}}\int\limits_0^c t^{l+2}f(t)dt.$$

Подействуем операторами $\left(\hat{B}^{(3)}_{\nu-1}(c_2)\right)^{-1}$ на соотношения (19). Ядра $G^{\lambda-\nu}_{\lambda,\nu}$ при этом окажутся выраженными через ядра $G^{\lambda-\nu+1}_{\lambda,\nu-1}$. Первое уравнение получившейся цепочки можно представить в виде

$$G^{\lambda-1}_{\lambda,1}=L_\lambda(0,1)G^{\lambda}_{\lambda,0}+M_\lambda(0,1),\qquad(21)$$

где

$$\begin{aligned}L_\lambda(0,1)&=-\left(\hat{B}^{(3)}_{0}(c_2)\right)^{-1}\hat{B}^{(2)}_{\lambda-1}(c),\\ M_\lambda(0,1)&=-\left(\hat{B}^{(3)}_{0}(c_2)\right)^{-1}\hat{B}^{(4)}_{\lambda}(c_1)G^{\lambda-1}_{\lambda-1,0}.\end{aligned}\qquad(22)$$

Аргументы оператора $L_\lambda(0,1)$ и функции $M_\lambda(0,1)$ здесь означают текущие значения параметров $\tau=0$, $\nu=1$.

Подставляя (21) во второе уравнение цепочки, найдем

$$G^{\lambda-2}_{\lambda,2}=L_\lambda(0,2)G^{\lambda}_{\lambda,0}+M_\lambda(0,2),\qquad(23)$$

$$\begin{aligned}L_\lambda(0,2)&=-\left(\hat{B}^{(3)}_{1}(c_2)\right)^{-1}\hat{B}^{(2)}_{\lambda-2}(c)L_\lambda(0,1),\\ M_\lambda(0,2)&=-\left(\hat{B}^{(3)}_{1}(c_2)\right)^{-1}\hat{B}^{(2)}_{\lambda-2}(c)M_\lambda(0,1)\\ &\quad+\hat{B}^{(4)}_{\lambda}(c_1)G^{\lambda-2}_{\lambda-1,1}.\end{aligned}\qquad(24)$$

Продолжая процесс, получим выражение ядер $G^{\lambda-\nu}_{\lambda,\nu}$, $1\le\nu\le\lambda$ через $G^{\lambda}_{\lambda,0}$. При этом

$$G^{\lambda-\nu}_{\lambda,\nu}=L_\lambda(0,\nu)G^{\lambda}_{\lambda,0}+M_\lambda(0,\nu),\qquad(25)$$

а $L_\lambda(0,\nu)$, $M_\lambda(0,\nu)$ определяются рекуррентными соотношениями

$$\begin{aligned}L_\lambda(0,\nu)&=-\left(\hat{B}^{(3)}_{\nu-1}(c_2)\right)^{-1}\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu}(c)L_\lambda(0,\nu-1),\\ M_\lambda(0,\nu)&=-\left(\hat{B}^{(3)}_{\nu-1}(c_2)\right)^{-1}\Big[\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu}(c)M_\lambda(0,\nu-1)\\ &\quad+\hat{B}^{(4)}_{\lambda}(c_1)G^{\lambda-\nu}_{\lambda-1,\nu-1}\Big],\ \ \nu=2,3,\dots,\lambda.\end{aligned}\qquad(26)$$

Заметим, что обратные операторы $\left(\hat{B}^{(3)}_{\nu-1}(c_2)\right)^{-1}$ коммутируют с операторами $\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu-1}(c)$, вследствие чего оператор $L_\lambda(0,\nu)$ может быть записан в виде

$$\begin{aligned}L_\lambda(0,\nu)&=(-1)^i\left(\hat{B}^{(3)}_{\nu-1}(c_2)\right)^{-1}\left(\hat{B}^{(3)}_{\nu-2}(c_2)\right)^{-1}\dots\\ &\left(\hat{B}^{(3)}_{0}(c_2)\right)^{-1}\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu}(c)\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu+1}(c)\dots\hat{B}^{(2)}_{\lambda-1}(c).\end{aligned}\qquad(27)$$

Таким образом, последовательная подстановка предыдущего уравнения цепочки (19) в последующее позволяет выразить λ неизвестных ядер вида $G^{\lambda-\nu}_{\lambda,\nu}$, $\nu=1,2,\dots,\lambda$ через ядро $G^{\lambda}_{\lambda,0}$.

Рассмотрим теперь соотношения (18) при $\tau=1$. Индекс ν в этом случае изменяется, согласно (14), в диапазоне $1\le\nu\le\lambda+1$. Последовательно подставляя $\nu=1$, $\nu=2,\dots,\nu=\lambda$ в (18), получим

$$\begin{aligned}&\hat{B}^{(3)}_{0}(c_2)G^{\lambda}_{\lambda-1,1}=-\hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)G^{\lambda}_{\lambda,0}-\hat{B}^{(1)}_{\lambda}(c)G^{\lambda-1}_{\lambda-1,0},\\ &\hat{B}^{(3)}_{1}(c_2)G^{\lambda-1}_{\lambda-1,2}=-\hat{B}^{(2)}_{\lambda-1}(c)G^{\lambda}_{\lambda-1,1}-\hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)G^{\lambda-1}_{\lambda,1}\\ &-\left(\hat{B}^{(1)}_{\lambda-1}(c)G^{\lambda-2}_{\lambda-1,1}+\hat{B}^{(4)}_{\lambda-1}(c_1)G^{\lambda-1}_{\lambda-2,1}+\hat{B}^{(4)}_{1}(c_2)G^{\lambda-1}_{\lambda-1,0}\right),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\hat{B}^{(3)}_{\nu-1}(c_2)G^{\lambda-\nu+1}_{\lambda-1,\nu}=-\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu+1}(c)G^{\lambda-\nu+2}_{\lambda-1,\nu-1}-\hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)G^{\lambda-\nu+1}_{\lambda,\nu-1}\\ &-\left(\hat{B}^{(1)}_{\lambda-\nu+1}(c)G^{\lambda-\nu}_{\lambda-1,\nu-1}+\hat{B}^{(4)}_{\lambda-1}(c_1)G^{\lambda-\nu+1}_{\lambda-2,\nu-1}\right.\\ &\left.+\hat{B}^{(4)}_{\nu-1}(c_2)G^{\lambda-\nu+1}_{\lambda-1,\nu-2}\right),\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ &\hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_2)G^{1}_{\lambda-1,\lambda}=-\hat{B}^{(2)}_{1}(c)G^{2}_{\lambda-1,\lambda-1}-\hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)G^{1}_{\lambda,\lambda-1}\\ &-\left(\hat{B}^{(1)}_{1}(c)G^{0}_{\lambda-1,\lambda-1}+\hat{B}^{(4)}_{\lambda-1}(c_1)G^{1}_{\lambda-2,\lambda-1}\right.\\ &\left.+\hat{B}^{(4)}_{\lambda-1}(c_2)G^{1}_{\lambda-1,\lambda-2}\right).\end{aligned}\qquad(28)$$

При $\nu = \lambda + 1$ ядро в первом члене, стоящем в левой части (18), по ОТГ обращается в нуль. Поэтому последнее уравнение цепочки принимает вид

$$0 = -\hat{B}_0^{(2)}(c)G^1_{\lambda-1,\lambda} - \hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)G^0_{\lambda,\lambda} - \hat{B}^{(4)}_{\lambda}(c_2)G^0_{\lambda-1,\lambda-1}. \tag{29}$$

Во всех уравнениях цепочки, за исключением первого, второй член в правой части содержит ядро вида $G^{\lambda-\nu}_{\lambda,\nu}$, которое, как показано выше, выражается через $G^\lambda_{\lambda,0}$ с помощью цепочки уравнений (19). Первый член в правой части каждого из уравнений (28) представляет собой результат действия оператора $-\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu+1}(c)$ на ядро, содержащееся в левой части предыдущего уравнения. Последовательно исключая ядра вида $G^{\lambda-\nu+1}_{\lambda-1,\nu}$ из уравнений цепочки (28), можно выразить ядро $G^1_{\lambda-1,\lambda}$ через ядро $G^\lambda_{\lambda,0}$.

Поскольку ядра $G^{\lambda-\nu+1}_{\lambda-1,\nu}$ удовлетворяют нулевым граничным условиям при $c_2 = 0$, то оператор $\hat{B}^{(3)}_0(c_2)$ обратим, и из первого уравнения цепочки (28) по аналогии с предыдущим следует

$$G^\lambda_{\lambda-1,1} = L_\lambda(1,1)G^\lambda_{\lambda,0} + M_\lambda(1,1), \tag{30}$$

$$L_\lambda(1,1) = -\big(\hat{B}^{(3)}_0(c_2)\big)^{-1}\hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1),$$

$$M_\lambda(1,1) = -\big(\hat{B}^{(3)}_0(c_2)\big)^{-1}\hat{B}^{(1)}_{\lambda}(c)G^{\lambda-1}_{\lambda-1,0}. \tag{31}$$

Подставляя (21), (30) во второе уравнение цепочки (28), найдем

$$G^{\lambda-1}_{\lambda-1,2} = L_\lambda(1,2)(G^\lambda_{\lambda,0} + M_\lambda(1,2), \tag{32}$$

$$L_\lambda(1,2) = -\big(\hat{B}^{(3)}_1(c_2)\big)^{-1}\big[\hat{B}^{(2)}_{\lambda-1}(c)L_\lambda(1,1) + \hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)L_\lambda(0,1)\big],$$

$$M_\lambda(1,2) = -\big(\hat{B}^{(3)}_1(c_2)\big)^{-1}\big[\hat{B}^{(2)}_{\lambda-1}(c)M_\lambda(1,1) + \hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)M_\lambda(0,1) + \hat{B}^{(1)}_{\lambda-1}(c)G^{\lambda-2}_{\lambda-1,1} + \hat{B}^{(4)}_{\lambda-1}(c_1)G^{\lambda-1}_{\lambda-2,1} + \hat{B}^{(4)}_1(c_2)G^{\lambda-1}_{\lambda-1,0}\big]. \tag{33}$$

Продолжая этот процесс, получим

$$G^{\lambda-\nu+1}_{\lambda-1,\nu} = L_\lambda(1,\nu)G^\lambda_{\lambda,0} + M_\lambda(1,\nu), \tag{34}$$

$$L_\lambda(1,\nu) = -\big(\hat{B}^{(3)}_{\nu-1}(c_2)\big)^{-1}\big[\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu+1}(c)L_\lambda(1,\nu-1) + \hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)L_\lambda(0,\nu-1)\big],$$

$$M_\lambda(1,\nu) = -\big(\hat{B}^{(3)}_{\nu-1}(c_2)\big)^{-1}\big[\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu+1}(c)M_\lambda(1,\nu-1) + \hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)M_\lambda(0,\nu-1) + \hat{B}^{(1)}_{\lambda-\nu+1}(c)G^{\lambda-\nu}_{\lambda-1,\nu-1} + \hat{B}^{(4)}_{\lambda-1}(c_1)G^{\lambda-\nu+1}_{\lambda-2,\nu-1} + \hat{B}^{(4)}_{\nu-1}(c_2)G^{\lambda-\nu+1}_{\lambda-1,\nu-2}\big]. \tag{35}$$

Можно показать, что

$$L_\lambda(1,\nu) = (-1)^\nu\nu\cdot\big(\hat{B}^{(3)}_{\nu-1}(c_2)\big)^{-1}\big(\hat{B}^{(3)}_{\nu-2}(c_2)\big)^{-1}\dots\big(\hat{B}^{(3)}_0(c_2)\big)^{-1}\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu+1}(c)\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu+2}(c)\dots\hat{B}^{(2)}_{\lambda-1}(c)\hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1). \tag{36}$$

Последнее уравнение цепочки (28) дает

$$G^1_{\lambda-1,\lambda} = L_\lambda(1,\lambda)G^\lambda_{\lambda,0} + M_\lambda(1,\lambda). \tag{37}$$

Подставляя (25) при $\nu = \lambda$ и (37) в замыкающее соотношение (29), найдем уравнение для определения ядра $G^\lambda_{\lambda,0}$

$$\big(\hat{B}^{(2)}_0(c)L_\lambda(1,\lambda) + \hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)L_\lambda(0,\lambda)\big)G^\lambda_{\lambda,0} = -\hat{B}^{(2)}_0(c)M_\lambda(1,\lambda) - \hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)M_\lambda(0,\lambda) - \hat{B}^{(4)}_\lambda(c_2)G^0_{\lambda-1,\lambda-1}. \tag{38}$$

Выражение для оператора в левой части можно вычислить с использованием (36), (27)

$$\hat{B}^{(2)}_0(c)L_\lambda(1,\lambda) + \hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)L_\lambda(0,\lambda) = (-1)^\lambda(\lambda+1)\big(\hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_2)\big)^{-1}\big(\hat{B}^{(3)}_{\lambda-2}(c_2)\big)^{-1}\dots\big(\hat{B}^{(3)}_0(c_2)\big)^{-1}\hat{B}^{(2)}_0(c)\hat{B}^{(2)}_1(c)\dots\hat{B}^{(2)}_{\lambda-1}(c)\hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1). \tag{39}$$

Действуя на обе части (38) оператором $\hat{B}^{(3)}_0(c_2)\dots\hat{B}^{(3)}_{\lambda-2}(c_2)\hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_2)$, найдем, что ядро $G^\lambda_{\lambda,0}$ является решением дифференциального уравнения порядка $(\lambda+1)$, которое имеет вид

$$(-1)^{\lambda+1}(\lambda+1)\big(\hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)\hat{B}^{(2)}_0(c)\hat{B}^{(2)}_1(c)\dots\hat{B}^{(2)}_{\lambda-1}(c)\big)G^\lambda_{\lambda,0} = \big(\hat{B}^{(3)}_0(c_2)\dots\hat{B}^{(3)}_{\lambda-2}(c_2)\hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_2)\big)\big(\hat{B}^{(2)}_0(c)M_\lambda(1,\lambda) + \hat{B}^{(3)}_{\lambda-1}(c_1)M_\lambda(0,\lambda) + \hat{B}^{(4)}_\lambda(c_2)G^0_{\lambda-1,\lambda-1}\big). \tag{40}$$

Для однозначного решения уравнение (40) должно быть дополнено граничными условиями. Эти условия могут быть получены из (16), (17) и соотношений (25). Действительно, полагая $c_1 = 0$, из (16) имеем

$$G^\lambda_{\lambda,0}|_{c_1=0} = 0. \tag{41}$$

При $c = 0$, согласно (16), получим

$$G^\lambda_{\lambda,0}|_{c=0} = 0. \tag{42}$$

Из соотношений (25) с учетом явного вида оператора $L_\lambda(0,\nu)$ следует

$$\hat{B}^{(3)}_0(c_2)\dots\hat{B}^{(3)}_{\nu-2}(c_2)\hat{B}^{(3)}_{\nu-1}(c_2)G^{\lambda-\nu}_{\lambda,\nu} = = (-1)^\nu\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu}(c)\hat{B}^{(2)}_{\lambda-\nu+1}(c)\dots\hat{B}^{(2)}_{\lambda-1}(c)G^\lambda_{\lambda,0} + \hat{B}^{(3)}_0(c_2)\dots\hat{B}^{(3)}_{\nu-2}(c_2)\hat{B}^{(3)}_{\nu-1}(c_2)M_\lambda(0,\nu),\ \ \nu = 1,\dots,\lambda-1. \tag{43}$$

Можно показать, что функции

$$\hat{B}_0^{(3)}(c_2)\ldots\hat{B}_{\nu-2}^{(3)}(c_2)\hat{B}_{\nu-1}^{(3)}(c_2)M_\lambda(0,\nu),\ \ \nu=1,\ldots,\lambda-1$$

обращаются в нуль при $c=0$. Кроме того, как видно из (16), левая часть (43) в этом случае также равна нулю, и мы имеем

$$\hat{B}_{\lambda-\nu}^{(2)}(c)\hat{B}_{\lambda-\nu+1}^{(2)}(c)\ldots\hat{B}_{\lambda-1}^{(2)}(c)G_{\lambda,0}^{\lambda}|_{c=0}=0,$$

$$\nu=1,\ldots,\lambda-1. \tag{44}$$

Условия (41), (42), (44) в совокупности и дают необходимое количество граничных условий для однозначного решения уравнения (40).

Заметим, что условия (44) позволяют записать решение (40) через обратные операторы $\left(\hat{B}_{\lambda-1}^{(3)}(c_1)\right)^{-1}$, а также $\left(\hat{B}_0^{(2)}(c)\right)^{-1}$, $\left(\hat{B}_1^{(2)}(c)\right)^{-1},\ldots,\left(\hat{B}_{\lambda-1}^{(2)}(c_1)\right)^{-1}$, которые имеют вид

$$\left(\hat{B}_l^{(2)}(c)\right)^{-1}f(c)=\frac{2l+3}{(l+1)c^{l+2}}\int_0^c t^{l+2}f(t)dt.$$

Действительно, поскольку из (41) следует, что $\left(\hat{B}_0^{(2)}(c)\hat{B}_1^{(2)}(c)\ldots,\hat{B}_{\lambda-1}^{(2)}(c)\right)G_{\lambda,0}^{\lambda}|_{c_1=0}=0$, то неизвестную функцию $\left(\hat{B}_0^{(2)}(c)\hat{B}_1^{(2)}(c)\ldots,\hat{B}_{\lambda-1}^{(2)}(c)\right)G_{\lambda,0}^{\lambda}$ можно найти, действуя обратным оператором $\left(\hat{B}_{\lambda-1}^{(3)}(c_1)\right)^{-1}$ на правую часть (40). Используя далее последовательно (44) при $\nu=\lambda-1$, $\nu=\lambda-2\ldots$, $\nu=1$ и условие (42), и применяя обратные операторы $\left(\hat{B}_0^{(2)}(c)\right)^{-1}$, $\left(\hat{B}_1^{(2)}(c)\right)^{-1},\ldots,\left(\hat{B}_{\lambda-1}^{(2)}(c)\right)^{-1}$, получим

$$\begin{aligned}G_{\lambda,0}^{\lambda}&=\frac{(-1)^{\lambda+1}}{(\lambda+1)}\left(\hat{B}_{\lambda-1}^{(2)}(c)\right)^{-1}\ldots\\&\ldots\left(\hat{B}_1^{(2)}(c)\right)^{-1}\left(\hat{B}_0^{(2)}(c)\right)^{-1}\left(\hat{B}_{\lambda-1}^{(3)}(c_1)\right)^{-1}\left(\hat{B}_0^{(3)}(c_2)\ldots\right.\\&\left.\ldots\hat{B}_{\lambda-2}^{(3)}(c_2)\hat{B}_{\lambda-1}^{(3)}(c_2)\right)\left(\hat{B}_0^{(2)}(c)M_\lambda(1,\lambda)\right.\\&\left.+\hat{B}_{\lambda-1}^{(3)}(c_1)M_\lambda(0,\lambda)+\hat{B}_\lambda^{(4)}(c_2)G_{\lambda-1,\lambda-1}^{0}\right).\end{aligned} \tag{45}$$

Таким образом, подмножество соотношений (18) для $\tau=0$ и 1 представляет собой замкнутую систему для неизвестных ядер вида $G_{\lambda,\nu}^{\lambda-\nu}$, $G_{\lambda-1,\nu}^{\lambda-\nu+1}$. Методом последовательного исключения эта система может быть сведена к одному уравнению в частных производных для ядра $G_{\lambda,0}^{\lambda}$. Решение этого уравнения представляется в виде (45), т. е. расчет ядра $G_{\lambda,0}^{\lambda}$ сводится к выполнению конечного числа дифференцирований и интегрирований известных функций. Зная ядро $G_{\lambda,0}^{\lambda}$, можно определить 2λ ядер $G_{\lambda-\tau,\nu}^{\lambda+\tau-\nu}$, где $\nu=1,\ldots,\lambda$ при $\tau=0$ и 1.

Опишем теперь процедуру получения остальных ядер в слое $l+l_1+l_2=2\lambda$. Вернемся к основному соотношению (18) и рассмотрим его последовательно при $\tau=2$, $\tau=3,\ldots,\tau=\lambda$ и $\nu=\tau$. В этом случае (18) приобретает вид

$$\hat{B}_{\tau-1}^{(3)}(c_2)G_{\lambda-\tau,\tau}^{\lambda}=-\left(\hat{B}_{\lambda-\tau}^{(3)}(c_1)G_{\lambda-\tau+1,\tau-1}^{\lambda}+\hat{B}_{\lambda}^{(1)}(c)G_{\lambda-\tau,\tau-1}^{\lambda-1}\right). \tag{46}$$

Для $\tau=2$ ядро $G_{\lambda-1,1}^{\lambda}$, входящее в первый член справа и соответствующее $\tau=1$, $\nu=1$ получено на предыдущем этапе решения, а ядро $G_{\lambda-2,1}^{\lambda-1}$ принадлежит слою $l+l_1+l_2=2\lambda-2$ и поэтому известно. Аналогичная ситуация имеет место и для следующих значений τ: ядро, входящее в первый член, определено на предыдущем шаге по τ, второй член относится к предыдущему слою. Следовательно, правая часть (46) известна. Поскольку ядро $G_{\lambda-\tau,\tau}^{\lambda}$ относится к классу функций, обращающихся в нуль при $c_2=0$, то решение уравнения (46) может быть записано через обратный оператор $\left(\hat{B}_{\tau-1}^{(3)}(c_2)\right)^{-1}$ и имеет вид

$$G_{\lambda-\tau,\tau}^{\lambda}=-\left(\hat{B}_{\tau-1}^{(3)}(c_2)\right)^{-1}\left(\hat{B}_{\lambda-\tau}^{(3)}(c_1)G_{\lambda-\tau+1,\tau-1}^{\lambda}+\hat{B}_{\lambda}^{(1)}(c)G_{\lambda-\tau,\tau-1}^{\lambda-1}\right). \tag{47}$$

Для следующих значений $\nu=3,\ldots,\lambda$ соотношение (18) дает

$$\begin{aligned}&\hat{B}_{\nu-1}^{(3)}(c_2)G_{\lambda-\tau,\nu}^{\lambda+\tau-\nu}(c,c_1,c_2)=\\&-\Big(\hat{B}_{\lambda+\tau-\nu}^{(2)}(c)G_{\lambda-\tau,\nu-1}^{\lambda+\tau-\nu+1}(c,c_1,c_2)\\&+\hat{B}_{\lambda-\tau}^{(3)}(c_1)G_{\lambda-\tau+1,\nu-1}^{\lambda+\tau-\nu}(c,c_1,c_2)\\&+\hat{B}_{\lambda+\tau-\nu}^{(1)}(c)G_{\lambda-\tau,\nu-1}^{\lambda+\tau-\nu-1}(c,c_1,c_2)\\&+\hat{B}_{\lambda-\tau}^{(4)}(c_1)G_{\lambda-\tau-1,\nu-1}^{\lambda+\tau-\nu}(c,c_1,c_2)\\&+\hat{B}_{\nu-1}^{(4)}(c_2)G_{\lambda-\tau,\nu-2}^{\lambda+\tau-\nu}(c,c_1,c_2)\Big).\end{aligned} \tag{48}$$

Ядро в первом члене справа определено на предыдущем шаге по ν, а ядро во втором члене — на предыдущем шаге по τ. Остальные члены справа известны, поскольку относятся к предыдущему слою $l+l_1+l_2=2\lambda-2$. Ядро $G_{\lambda-\tau,\nu}^{\lambda+\tau-\nu}(c,c_1,c_2)$ удовлетворяет условию (17), поэтому

$$\begin{aligned}&G_{\lambda-\tau,\nu}^{\lambda+\tau-\nu}(c,c_1,c_2)=-\left(\hat{B}_{\nu-1}^{(3)}(c_2)\right)^{-1}\\&\times\Big(\hat{B}_{\lambda+\tau-\nu}^{(2)}(c)G_{\lambda-\tau,\nu-1}^{\lambda+\tau-\nu+1}(c,c_1,c_2)\\&+\hat{B}_{\lambda-\tau}^{(3)}(c_1)G_{\lambda-\tau+1,\nu-1}^{\lambda+\tau-\nu}(c,c_1,c_2)\\&+\hat{B}_{\lambda+\tau-\nu}^{(1)}(c)G_{\lambda-\tau,\nu-1}^{\lambda+\tau-\nu-1}(c,c_1,c_2)\\&+\hat{B}_{\lambda-\tau}^{(4)}(c_1)G_{\lambda-\tau-1,\nu-1}^{\lambda+\tau-\nu}(c,c_1,c_2)\\&+\hat{B}_{\nu-1}^{(4)}(c_2)G_{\lambda-\tau,\nu-2}^{\lambda+\tau-\nu}(c,c_1,c_2)\Big),\quad\nu=3,\ldots,\lambda.\end{aligned} \tag{49}$$

При $\nu = \lambda + 1$ ядро, входящее в первый член левой части (18), обращается в нуль в соответствии с ОТГ и само соотношение приобретает вид

$$\hat{B}^{(2)}_{\tau-1}(c)G^{\tau}_{\lambda-\tau,\lambda}(c, c_1, c_2) + \hat{B}^{(3)}_{\lambda-\tau}(c_1)G^{\tau-1}_{\lambda-\tau+1,\lambda}(c, c_1, c_2)$$
$$+ \hat{B}^{(4)}_{\lambda}(c_2)G^{\tau-1}_{\lambda-\tau,\lambda-1}(c, c_1, c_2) = 0. \qquad (50)$$

Все ядра, входящие в (50), уже определены на предыдущих шагах рекуррентной процедуры, и это соотношение представляет собой дополнительную связь между ядрами. Соотношения (50) имеют место при всех $\tau = 2, 3, \ldots, \lambda$, и их общее число равно $\lambda - 1$. Это находится в соответствии с проведенной в начале раздела оценкой числа соотношений и числа неизвестных ядер на слое $l + l_1 + l_2 = 2\lambda$.

Исследуем дополнительные соотношения более подробно. Отметим, что, поскольку рекуррентная процедура связывает ядра на слое 2λ с ядрами на слое $l + l_1 + l_2 = 2\lambda - 2$, а эти ядра, в свою очередь, с ядрами на слое $l + l_1 + l_2 = 2\lambda - 4$, и т.д., связи (50), в сущности, являются дифференциальными уравнениями, которым удовлетворяет ядро $G^0_{0,0}$. Запишем эти уравнения в виде

$$K_{\lambda,j}G^0_{00} = 0, \quad j = 1, \ldots, \lambda - 1. \qquad (51)$$

Здесь $K_{\lambda,j}$ — операторы, которые могут быть выражены через набор дифференциальных и интегральных операторов. Покажем, что соотношения (51) выполняются для произвольной функции, т.е. тем самым оператор $K_{\lambda,j}$ является нулевым.

Пусть имеется ортогонально-инвариантное ядро $G(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)$. В силу приведенных выше соображений полученное из него ядро $G^0_{00}(c, c_1, c_2)$ удовлетворяет всем соотношениям (51). Рассмотрим теперь ядро $\tilde{G}(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = G(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2)f(c, c_1, c_2)$, где $f(c, c_1, c_2)$ — произвольная функция. Это ядро также обладает ортогональной инвариантностью, и, следовательно, для $\tilde{G}^0_{00}(c, c_1, c_2) = f(c, c_1, c_2)G^0_{00}(c, c_1, c_2)$ также будут справедливы все соотношения (51). Но функция $f(c, c_1, c_2)G^0_{00}(c, c_1, c_2)$ — произвольна, следовательно, все соотношения (51) справедливы для произвольной функции, т.е. все операторы $K_{\lambda,j}$ нулевые.

Таким образом, на основе соотношений (7) разработана рекуррентная процедура построения ядер $G^l_{l_1,l_2}$ с суммой индексов 2λ, через ядра, сумма индексов которых равна $2\lambda - 2$. Расчет ядер сводится к выполнению конечного числа дифференцирований и интегрирований известных функций по формулам (25), (34), (45), (47), (49). В том случае, когда ядро $G^{\lambda}_{\lambda,0}$ оказывается известным из каких-либо дополнительных соображений, рекуррентная процедура упрощается — для отыскания ядер на слое $l + l_1 + l_2 = 2\lambda$ оказывается необходимым использовать формулы (25), (34), (47), (49).

Таблица 1. Определение подобластей D1−D4

D0	D1	D2	D3	D4
$c^2 > c_1^2 + c_2^2$	$c^2 \le c_1^2 + c_2^2$, $c_1 < c$, $c_2 < c$	$c_1 < c$, $c_2 > c$	$c_1 > c$, $c_2 < c$	$c_1 > c$, $c_2 > c$

2. Расчет ядер для максвелловских молекул и твердых шаров

Мы использовали разработанную процедуру для вычисления ядер интеграла обратных столкновений $G^{+l}_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2)$. Как уже отмечалось выше, стартовыми ядрами при этом являются ядра $G^{+0}_{00}(c, c_1, c_2)$. Эти ядра были получены в работах [9–11] для двух сечений взаимодействия — модели твердых шаров и псевдомаксвелловских молекул. В [12] для этих же случаев с помощью преобразования Лапласа из линейных ядер был построен более широкий класс ядер — ядра $G^{+l}_{l,0}(c, c_1, c_2)$. В настоящем разделе приводятся результаты применения разработанной процедуры для построения ядер $G^{+l}_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2)$ с $\lambda = 1, 2$ в случае твердых шаров и псевдомаксвелловских молекул. Как и в случае ядра $G^{+0}_{00}(c, c_1, c_2)$, для этих ядер при фиксированном значении c вся область изменения c_1 и c_2 разбивается на пять подобластей, границы которых представляют собой прямые $c_1 = c$, $c_2 = c$ и дугу окружности $c_1^2 + c_2^2 = c^2$. Определение этих подобластей приведено в табл. 1. На границах выделенных областей ядра непрерывны и имеют на них излом. В области D0 все ядра равны нулю. В табл. 2 приведены ядра $G^{+1}_{1,0}$, $G^{+1}_{0,1}$ и $G^{+0}_{1,1}$ для модели псевдомаксвелловских молекул, а в табл. 3 — для модели твердых шаров (они были опубликованы ранее в [15]). Отметим, что ядра $G^{+1}_{1,0}(c, c_1, c_2)$, рассчитанные с помощью рекуррентной процедуры и найденные в [12] преобразованием Лапласа линейных ядер для рассмотренных сечений взаимодействия, совпадают. С помощью повторного применения рекуррентной процедуры удается найти ядра и для $\lambda = 2$. Эти ядра в областях D1−D4 для случаев псевдомаксвелловских молекул и твердых шаров приведены в табл. 4, 5. Как видно из табл. 2−5, найденные ядра удовлетворяют условиям симметрии. Действительно, поскольку для этих случаев дифференциальное сечение рассеяния изотропно, $G^+(\mathbf{c}, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2) = G^+(\mathbf{c}, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_1)$. Отсюда с учетом (6) следует

$$G^{+l}_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2) = G^{+l}_{l_2,l_1}(c, c_2, c_1). \qquad (52)$$

Кроме того, ядра $G^{+l}_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2)$ для $\lambda = 1, 2$ так же, как и ядро $G^{+0}_{0,0}(c, c_1, c_2)$, удовлетворяют соотношению подобия

$$G^{+l}_{l_1,l_2}(sc, sc_1, sc_2) = s^{2\mu-3}G^{+l}_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2).$$

Здесь $\mu = 0.5$ для твердых шаров и $\mu = 0$ для псевдомаксвелловских молекул.

Таблица 2. Ядра $G^{+1}_{1,0}$, $G^{+1}_{0,1}$ и $G^{+0}_{1,1}$ для модели псевдомаксвелловских молекул

	$G^{+1}_{1,0}(c, c_1, c_2)$	$G^{+1}_{0,1}(c, c_1, c_2)$	$G^{+0}_{1,1}(c, c_1, c_2)$
D1	$\left(\frac{2\pi}{c^2c_1^2c_2}\frac{c(c_1^2-c_2^2)\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}{c_1^2+c_2^2} + (2c^2+c_1^2-c_2^2)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}{c}\right)\right)$	$\frac{2\pi}{c^2c_1^2c_1}\left(\frac{c(c_2^2-c_2^1)\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}{c_1^2+c_2^2} + (2c^2+c_2^2-c_1^2)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}{c}\right)\right)$	0
D2	$\frac{2\pi}{c^2c_1^2c_2}\left(\frac{c_1c_2(c_1^2+c_2^2-2c^2)}{c_1^2+c_2^2} + (2c^2+c_1^2-c_2^2)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)\right)$	$\frac{2\pi}{c^2c_2^2c_1}\left(\frac{c_1c_2(2c^2-c_1^2-c_2^2)}{c_1^2+c_2^2} + (2c^2-c_1^2+c_2^2)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)\right)$	0
D3	$\frac{2\pi}{c^2c_1^2c_2}\left(\frac{c_1c_2(2c^2-c_1^2-c_2^2)}{c_1^2+c_2^2} + (2c^2+c_1^2-c_2^2)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\right)$	$\frac{2\pi}{c^2c_2^2c_1}\left(\frac{c_1c_2(c_1^2+c_2^2-2c^2)}{c_1^2+c_2^2} + (2c^2-c_1^2+c_2^2)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{c_2}{c_1}\right)\right)$	0
D4	$\frac{2\pi}{c^2c_1^2c_2}\left(\frac{c_1c_2(2c^2-c_1^2-c_2^2)}{c_1^2+c_2^2} + (2c^2+c_1^2-c_2^2) + \mathrm{arctg}\left(\frac{c}{\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}\right)\right)$	$\frac{2\pi}{c^2c_2^2c_1}\left(\frac{c_1c_2(2c^2-c_1^2-c_2^2)}{c_1^2+c_2^2} + (2c^2-c_1^2+c_2^2) + \mathrm{arctg}\left(\frac{c}{\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}\right)\right)$	0

Таблица 3. Ядра $G^{+1}_{1,0}$, $G^{+1}_{0,1}$ и $G^{+0}_{1,1}$ для модели твердых шаров

	$G^{+1}_{1,0}(c, c_1, c_2)$	$G^{+1}_{0,1}(c, c_1, c_2)$	$G^{+0}_{1,1}(c, c_1, c_2)$
D1	$\frac{8\pi}{c^2c_1^2c_2}\left[c_1^2(c_1^2+c_2^2-c^2)^{1/2} - \frac{2}{3}(c_1^2+c_2^2-c^2)^{3/2}\right]$	$\frac{8\pi}{c^2c_1c_2^2}\left[c_2^2(c_1^2+c_2^2-c^2)^{1/2} - \frac{2}{3}(c_1^2+c_2^2-c^2)^{3/2}\right]$	$-\frac{8\pi(c_1^2+c_2^2-c^2)^{3/2}}{9cc_1^2c_2^2}$
D2	$\frac{8\pi c_1}{3c^2c_2}$	$\frac{8\pi}{c^2c_2^2}\left(c^2-\frac{2}{3}c_1^2\right)$	$-\frac{8\pi c_1}{9cc_2^2}$
D4	$\frac{8\pi c}{3c_1^2c_2}$	$\frac{8\pi c}{3c_1c_2^2}$	$-\frac{8\pi c^2}{9c_1^2c_2^2}$

Интересно проверить выполнение законов сохранения для полученных выше ядер. Законы сохранения числа частиц, импульса и энергии для простого газа имеют вид

$$\iint \hat{I}(f, f)c^2 d\Omega dc = 0, \tag{53}$$

$$\iint \boldsymbol{\Omega}\hat{I}(f, f)c^3 d\Omega dc = \mathbf{0}, \tag{54}$$

$$\iint \hat{I}(f, f)c^4 d\Omega dc = 0. \tag{55}$$

Для осесимметричной ФР в соответствии с (5) интеграл столкновений выражается через ядра $G^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2)$ следующим образом:

$$\hat{I}(f, f) = \sum_{l,l_1,l_2} P_l(\cos\theta) \times \left(\int_0^\infty\int_0^\infty G^l_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2) f_{l_1}(c_1) f_{l_2}(c_2) c_1^2 c_2^2 dc_1 dc_2\right), \tag{56}$$

где θ — угол между направлением скорости и выделенной осью, а $f_1(c)$ — коэффициенты разложения безразмерной ФР по полиномам Лежандра. Подставляя (56) в (53), найдем

$$\sum_{l_1,l_2}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty\int_0^\infty G^0_{l_1,l_2}(c, c_1, c_2) \times f_{l_1}(c_1) f_{l_2}(c_2) c_1^2 c_2^2 dc_1 dc_2\right)c^2 dc = 0. \tag{57}$$

Согласно ОТГ, отличны от нуля лишь ядра вида $G^0_{l_1,l_1}(c, c_1, c_2)$, и двойная сумма в (57) вырождается в однократную. В силу произвольности ФР имеем

$$\int_0^\infty \left(G^0_{l,l}(c, c_1, c_2) + G^0_{l,l}(c, c_2, c_1)\right)c^2 dc = 0, \; l = 0, 1, \ldots. \tag{58}$$

Пользуясь симметрией ядер интеграла обратных столкновений (52), окончательно получаем

$$\int_0^\infty \left(2G^{+0}_{l,l}(c, c_1, c_2) - G^{-0}_{l,l}(c, c_1, c_2) - G^{-0}_{l,l}(c, c_2, c_1)\right)c^2 dc = 0, \; l = 0, 1, \ldots. \tag{59}$$

Здесь $G^{-l}_{l_1,l_2}(c, c_2, c_1)$ — ядра интеграла прямых столкновений. Закон сохранения импульса (54) сводится

Таблица 4. Ядра $G_{2,0}^{+2}$, $G_{2,1}^{+1}$, $G_{1,1}^{+2}$ и $G_{2,2}^{+0}$ для модели твердых шаров

$G_{2,0}^{+2}$	D1	$\frac{\pi}{16c^3c_1^3c_2}\Big(\frac{3c^3\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}(6c_1^4-36c_1^2c_2^2-26c_2^4)}{(c_1^2+c_2^2)^2}+\frac{3c\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}(5c_1^4+2c_1^2c_2^2+21c_2^4)}{(c_1^2+c_2^2)}$ $+\big(72c^4+15c_1^4+6c_1^2c_2^2+63c_2^4+8c^2(c_1^2-15c_2^2)\big)\operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}{c}\Big)\Big)$
	D2	$\frac{\pi}{16c^3c_1^3c_2}\Big(\frac{24c^4c_1c_2(5c_1^2+3c_2^2)}{(c_1^2+c_2^2)^2}-\frac{24c^2c_1c_2(3c_1^2+5c_2^2)}{(c_1^2+c_2^2)}-3c_1c_2(5c_1^2-21c_2^2)$ $-\big(72c^4+15c_1^4+6c_1^2c_2^2+63c_2^4+8c^2(c_1^2-15c_2^2)\big)\operatorname{arctg}\Big(\frac{c_2}{c_1}\Big)\Big)$
	D3	$\frac{\pi}{16c^3c_1^3c_2}\Big(\frac{24c^4c_1c_2(5c_1^2+3c_2^2)}{(c_1^2+c_2^2)^2}-\frac{24c^2c_1c_2(3c_1^2+5c_2^2)}{(c_1^2+c_2^2)}-3c_1c_2(5c_1^2-21c_2^2)$ $+\big(72c^4+15c_1^4+6c_1^2c_2^2+63c_2^4+8c^2(c_1^2-15c_2^2)\big)\operatorname{arctg}\Big(\frac{c_2}{c_1}\Big)\Big)$
	D4	$-\frac{\pi}{16c^3c_1^3c_2}\Big(\frac{3c^3\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}(6c_1^4-36c_1^2c_2^2-26c_2^4)}{(c_1^2+c_2^2)^2}+\frac{3c\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}(5c_1^4+2c_1^2c_2^2+21c_2^4)}{(c_1^2+c_2^2)}$ $-\big(72c^4+15c_1^4+6c_1^2c_2^2+63c_2^4+8c^2(c_1^2-15c_2^2)\big)\operatorname{arctg}\Big(\frac{c}{\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}\Big)\Big)$
$G_{2,1}^{+1}$	D1	$\frac{\pi}{10c^2c_1^3c_2^2}\Big(c\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}\Big(\frac{c_1^4+2c_1^2c_2^2+9c_2^4}{c_1^2+c_2^2}-6c^2\Big)$ $+\big(c_1^4+2c_1^2c_2^2+9c_2^4+4c^2(c_1^2-3c_2^2)\big)\operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}{c}\Big)\Big)$
	D2	$\frac{\pi}{10c^2c_1^3c_2^2}\Big(c_1c_2\Big(\frac{c_1^4-8c_1^2c_2^2-9c_2^4+4c^2(c_1^2+3c_2^2)}{c_1^2+c_2^2}\Big)+\big(c_1^4+2c_1^2c_2^2+9c_2^4+4c^2(c_1^2-3c_2^2)\big)\operatorname{arctg}\Big(\frac{c_1}{c_2}\Big)\Big)$
	D3	$-\frac{\pi}{10c^2c_1^3c_2^2}\Big(c_1c_2\Big(\frac{c_1^4-8c_1^2c_2^2-9c_2^4+4c^2(c_1^2+3c_2^2)}{c_1^2+c_2^2}\Big)-\big(c_1^4+2c_1^2c_2^2+9c_2^4+4c^2(c_1^2-3c_2^2)\big)\operatorname{arctg}\Big(\frac{c_2}{c_1}\Big)\Big)$
	D4	$-\frac{\pi}{10c^2c_1^3c_2^2}\Big(c\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}\Big(\frac{c_1^4+2c_1^2c_2^2+9c_2^4}{c_1^2+c_2^2}-6c^2\Big)$ $-\big(c_1^4+2c_1^2c_2^2+9c_2^4+4c^2(c_1^2-3c_2^2)\big)\operatorname{arctg}\Big(\frac{c}{\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}\Big)\Big)$
$G_{1,1}^{+2}$	D1	$\frac{\pi}{8c^3c_1^2c_2^2}\Big(c\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}\Big(\frac{2c^2(c_1^4+10c_1^2c_2^2+c_2^4)-3(3c_1^6+c_1^4c_2^2+c_1^2c_2^4+3c_2^6)}{(c_1^2+c_2^2)^2}\Big)$ $+\big(8c^4-9c_1^4+6c_1^2c_2^2-9c_2^4+8c^2(c_1^2+c_2^2)\big)\operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}{c}\Big)\Big)$
	D2	$\frac{\pi}{8c^3c_1^2c_2^2}\Big(c_1c_2(c_1^2-c_2^2)\Big(\frac{8c^4}{(c_1^2+c_2^2)^2}+\frac{8c^2}{c_1^2+c_2^2}-9\Big)+\big(8c^4-9c_1^4+6c_1^2c_2^2-9c_2^4+8c^2(c_1^2+c_2^2)\big)\operatorname{arctg}\Big(\frac{c_1}{c_2}\Big)\Big)$
	D3	$-\frac{\pi}{8c^3c_1^2c_2^2}\Big(c_1c_2(c_1^2-c_2^2)\Big(\frac{8c^4}{(c_1^2+c_2^2)^2}+\frac{8c^2}{c_1^2+c_2^2}-9\Big)-\big(8c^4-9c_1^4+6c_1^2c_2^2-9c_2^4+8c^2(c_1^2+c_2^2)\big)\operatorname{arctg}\Big(\frac{c_2}{c_1}\Big)\Big)$
	D4	$-\frac{\pi}{8c^3c_1^2c_2^2}\Big(c\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}\Big(\frac{2c^2(c_1^4+10c_1^2c_2^2+c_2^4)-3(3c_1^6+c_1^4c_2^2+c_1^2c_2^4+3c_2^6)}{(c_1^2+c_2^2)^2}\Big)$ $-\big(8c^4-9c_1^4+6c_1^2c_2^2-9c_2^4+8c^2(c_1^2+c_2^2)\big)\operatorname{arctg}\Big(\frac{c}{\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}\Big)\Big)$
$G_{2,2}^{+0}$	D1	$\frac{\pi}{10cc_1^3c_2^3}\Big(3c\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}(c_1^2+c_2^2-2c^2)+(3c_1^4-2c_1^2c_2^2+3c_2^4)\operatorname{arctg}\Big(\frac{\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}{c}\Big)\Big)$
	D2	$\frac{\pi}{10cc_1^3c_2^3}\Big(3c_1c_2(c_1^2-c_2^2)+(3c_1^4-2c_1^2c_2^2+3c_2^4)\operatorname{arctg}\big(\frac{c_1}{c_2}\big)\Big)$
	D3	$-\frac{\pi}{10cc_1^3c_2^3}\Big(3c_1c_2(c_1^2-c_2^2)-(3c_1^4-2c_1^2c_2^2+3c_2^4)\operatorname{arctg}\big(\frac{c_2}{c_1}\big)\Big)$
	D4	$-\frac{\pi}{10cc_1^3c_2^3}\Big(3c\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}(c_1^2+c_2^2-2c^2)-(3c_1^4-2c_1^2c_2^2+3c_2^4)\operatorname{arctg}\Big(\frac{c}{\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}\Big)\Big)$

Таблица 5. Ядра $G_{2,0}^{+2}$, $G_{2,1}^{+1}$, $G_{1,1}^{+2}$ и $G_{2,2}^{+0}$ для модели твердых шаров

	D1	D2	D3	D4
$G_{2,0}^{+2}$	$\frac{4\pi\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}{5c^3c_1^3c_2}\left[7c^4+2c_1^4-c_1^2c_2^2+12c_2^4+c^2(c_1^2-19c_2^2)\right]$	$\frac{8\pi c_1^2}{5c^3c_2}$	$\frac{4\pi}{c^3c_1^3}\left[(c^2-c_1^2)(c^2-c_2^2)+ +\frac{2}{5}(5c^4-10c^2c_2^2+6c_2^4)\right]$	$\frac{8\pi c^2}{5c_1^3c_2}$
$G_{2,1}^{+1}$	$\frac{8\pi\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}{75c^2c_1^3c_2^2}\left[3c^4-2c_1^4+c_1^2c_2^2+18c_2^4-c^2(c_1^2+21c_2^2)\right]$	$-\frac{16\pi c_1^2}{75c^2c_2^2}$	$-\frac{16\pi c_2}{75c^2c_1^3}(15c^2-5c_1^2-9c_2^2)$	$-\frac{16\pi c}{75c_1^3c_2^2}(6c^2-5c_1^2)$
$G_{1,1}^{+2}$	$\frac{8\pi\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}{45c^3c_1^2c_2^2}\left[11c^2(c_1^2+c_2^2)+7c^4-9(2c_1^4-c_1^2c_2^2+2c_2^4)\right]$	$\frac{16\pi c_1}{45c^3c_2^2}\times(10c^2-9c_1^2)$	$\frac{16\pi c_2}{45c^3c_1^2}(10c^2-9c_2^2)$	$\frac{16\pi c^2}{45c_1^2c_2^2}$
$G_{2,2}^{+0}$	$-\frac{4\pi\sqrt{c_1^2+c_2^2-c^2}}{25cc_1^3c_2^3}\left[3c^4-2c_1^4+c_1^2c_2^2-2c_2^4-c^2(c_1^2+c_2^2)\right]$	$\frac{8\pi c_1^2}{25cc_2^3}$	$\frac{8\pi c_2^2}{25cc_1^3}$	$\frac{8\pi}{25c_1^3c_2^3}\times\left[c^4-\frac{5}{2}(c^2-c_1^2)(c^2-c_2^2)\right]$

к соотношению

$$\sum_{l_1,l_2}\int_0^\infty\Bigg(\int_0^\infty\int_0^\infty G^1_{l_1,l_2}(c,c_1,c_2)\times f_{l_1}(c_1)f_{l_2}(c_2)c_1^2c_2^2dc_1dc_2\Bigg)c^3dc=0. \qquad (60)$$

По теореме Гекке ненулевыми будут только ядра с разницей нижних индексов, равной единице, поэтому в силу произвольности ФР имеем

$$\int_0^\infty\big(G^1_{l,l+1}(c,c_1,c_2)+G^1_{l+1,l}(c,c_2,c_1)\big)c^3dc=0,\quad l=0,1,\ldots. \qquad (61)$$

Учет симметрии ядер интеграла обратных столкновений дает

$$\int_0^\infty\big(2G^{+1}_{l,l+1}(c,c_1,c_2)-G^{-1}_{l,l+1}(c,c_1,c_2)-G^{-1}_{l+1,l}(c,c_2,c_1)\big)c^3dc=0,\ l=0,1,\ldots. \qquad (62)$$

Соотношение для закона сохранения энергии может быть получено аналогично соотношению для закона сохранения числа частиц (59) и приводит к

$$\int_0^\infty\big(2G^{+0}_{l,l}(c,c_1,c_2)-G^{-0}_{l,l}(c,c_1,c_2)-G^{-0}_{l,l}(c,c_2,c_1)\big)c^4dc=0,\ l=0,1,\ldots. \qquad (63)$$

Таким образом, полученные ядра должны удовлетворять соотношениям (59), (63) для $l=0,1,2$ и (62) для $l=0,1$ (поскольку для $\lambda\le 2$ индекс $l\le 2$). Как показывает проверка с использованием найденных нами ранее в [17] ядер интеграла прямых столкновений, эти соотношения действительно удовлетворяются как для псевдомаксвелловских молекул, так и для твердых шаров.

Заключение

Наиболее сложной задачей при решении уравнения Больцмана в неизотропном случае является расчет интеграла обратных столкновений. Эффективным подходом к решению этой задачи является использование метода разложения по сферическим гармоникам. При этом интеграл столкновений заменяется набором интегральных операторов с ядрами, зависящими от модулей скоростей. Проведенные ранее нами исследования показали, что эти ядра не являются независимыми, а связаны набором соотношений. В настоящей работе на основе этих соотношений разработана рекуррентная процедура, позволяющая последовательно строить ядра с увеличивающимся значением суммы индексов. Стартовым ядром для такой процедуры является ядро уравнения Больцмана для изотропной по скоростям ФР. Предложенная процедура использована для построения ядер $G^{+l}_{l_1,l_2}(c,c_1,c_2)$ с суммой индексов $l=l+l_1+l_2=2\lambda=2,4$ в случае твердых шаров и максвелловских молекул. Показано, что найденные ядра обладают свойствами подобия и симметрии, а также удовлетворяют соотношениям, следующим из законов сохранения. Разработанная рекуррентная процедура может быть использована не только для расчета ядер в случае произвольных сечений взаимодействия, но и для построения протоядер [14].

Е.Ю. Флегонтова благодарит РФФИ за частичную поддержку работы (грант № 15-08-03440).

Приложение

Подсчитаем количество неизвестных ядер на слое λ, т.е. ядер с индексами l, l_1 и l_2 такими, что $l+l_1+l_2==2\lambda$. Последовательно меняя l от 0 до 2λ, можно найти число пар индексов l_1 и l_2, в сумме дающих $2\lambda - l$. Полное число ядер на слое λ, $N_k(\lambda)$, есть сумма чисел всех пар индексов l_1 и l_2 для всех возможных значений l, т. е.

$$N_k(\lambda) = \sum_{i=1}^{2\lambda+1} i = \frac{(2\lambda+2)(2\lambda+1)}{2}.$$

Согласно ОТГ, ядра с индексами, удовлетворяющими неравенствам $l > l_1 + l_2$ и $l < |l_1 - l_2|$, обращаются в нуль. Найдем число нулевых ядер на слое λ. Поскольку $l = 2\lambda - l_1 - l_2$, то первое неравенство дает $\lambda > l_1 + l_2$. Суммируя числа пар индексов l_1 и l_2, составляющих в сумме величину $\alpha < \lambda$, находим число нулевых ядер, индексы которых удовлетворяют первому неравенству:

$$N_{kn1}(\lambda) = \sum_{\alpha=0}^{\lambda-1} (\alpha+1) = \frac{(\lambda+1)\lambda}{2}.$$

Определим теперь число ядер, удовлетворяющих второму неравенству. Пусть $l_1 > l_2$, тогда $l < l_1 - l_2$ или $2l_1 > l + l_1 + l_2 = 2\lambda$. Для каждого значения l_1, удовлетворяющего этому неравенству, имеется $2\lambda - l_1 + 1$ пар индексов l и l_2, в сумме дающих $2\lambda - l_1$. Поэтому для всех $l_1 > \lambda$ сумма чисел таких пар будет

$$N_{kn2}(\lambda) = \sum_{l_1=\lambda+1}^{2\lambda} (2\alpha - l_1 + 1) = \frac{(\lambda+1)\lambda}{2}.$$

Тот же результат получается и для случая $l_2 > l_1$. Следовательно, полное число нулевых ядер есть

$$N_{kn}(\lambda) = N_{kn1}(\lambda) + 2N_{kn2}(\lambda) = \frac{3(\lambda+1)\lambda}{2}.$$

Число ненулевых ядер тогда есть

$$N_k(\lambda) - N_{kn}(\lambda) = N_{nonk}(\lambda) = \frac{(\lambda+1)(\lambda+2)}{2}.$$

Определим теперь число соотношений вида (7), где слева стоят ядра с суммой индексов 2λ. Среди этих соотношений есть „нулевые“ соотношения, т. е. тождества, в правых и левых частях которых стоят нули. Число ненулевых соотношений можно найти из диапазонов изменения параметров τ и ν (13), (14). Это дает

$$N_{nonrel}(\lambda) = \lambda + \sum_{\tau=1}^{\lambda} (\lambda + 2 - \tau) = \frac{\lambda(\lambda+5)}{2}.$$

Список литературы

[1] *Иванов М.С.* // ЖВМ и МФ. 2005. Т. 45. Вып. 10. С. 1860–1870.
[2] *Черемисин Ф.Г.* // ДАН. 1997. Т. 357. Вып. 1. С. 53–57.
[3] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* Интеграл столкновений уравнения Больцмана и моментный метод. СПб.: 2003, 224 с.
[4] *Ender A.Ya., Ender I.A.* // Phys. Fluids. 1999. Vol. 11. P. 2720–2730.
[5] *Ender A.Ya., Ender I.A.* // Trans. Theor. Stat. Phys. 2007. Vol. 36. N 7. P. 563.
[6] *Ender A.Ya., Ender I.A., Gerasimenko A.B.* // Open Plasm. Phys. J. 2009. Vol. 2. P. 24–62.
[7] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 10. С. 12–21.
[8] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А.* // ДАН. 2011. Т. 437. Вып. 5. С. 621-623.
[9] *Ziff R.M.* // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 306–310.
[10] *Kugerl G.* // J. Appl. Math. Phys. (ZAMP). 1989. Vol. 40. P. 816–827.
[11] *Barnsley M., Turchetti G.* // Lett. al Nuovo Cimento. 1981. Vol. 30. P. 359–362.
[12] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю.* // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. Вып. 15. С. 40–47.
[13] *Бакалейников Л.А., Тропп Э.А., Флегонтова Е.Ю., Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖТФ. 2015. Т. 85. Вып. 1. С. 10–14.
[14] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю.* // ЖТФ. В печати
[15] *Ender A.Ya., Ender I.A., Bakaleinikov L.A., Flegontova E.Yu.* // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2012. Vol. 36. P. 17–24.
[16] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 2. С. 6–12.
[17] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю.* // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 4. С. 24–34.