

Анализ устойчивости состояний полупроводниковой сверхрешетки в присутствии наклонного магнитного поля

© В.А. Максименко,¹ В.В. Макаров,¹ А.А. Короновский,^{1,2} А.Е. Храмов^{1,2}

¹ Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина, 410054 Саратов, Россия

² Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского, 410012 Саратов, Россия
e-mail: hramovae@gmail.com

(Поступило в Редакцию 20 ноября 2014 г.)

Предложен метод расчета спектра показателей Ляпунова для полупроводниковой периодической наноструктуры (сверхрешетки), описываемой в рамках полуклассического подхода. Проведен анализ устойчивости стационарного состояния в данной системе как в случае автономной динамики, так и при воздействии наклонного магнитного поля. С использованием аппарата показателей Ляпунова исследовано влияние наклонного магнитного поля на устойчивость стационарного состояния и характеристики возникающих режимов колебаний субтерагерцового диапазона.

Введение

Полупроводниковые сверхрешетки представляют собой наноструктуры, образованные путем чередования тонких (несколько нанометров) слоев полупроводниковых материалов с различной шириной запрещенной зоны и близким периодом кристаллической решетки [1–3]. В подобных системах образовавшаяся периодическая модуляция зоны проводимости приводит к формированию энергетических минизон, электронный транспорт в которых сопровождается различными нелинейными эффектами [4], представляющими интерес как для фундаментальной физики, так и для практических приложений.

С практической точки зрения полупроводниковые сверхрешетки являются в настоящий момент одними из перспективных систем для генерации [5] и усиления [6] сигналов терагерцового диапазона частот. Известно, что приложенное к полупроводниковой сверхрешетке постоянное напряжение приводит к развитию неустойчивости и образованию доменов заряда (области повышенной концентрации электронов), дрейфующих вдоль системы и вызывающих колебания тока, протекающего через нее [7,8].

В контексте изучения возможности использования сверхрешеток для генерации sub-THz- и THz-излучений имеет большое значение вопрос устойчивости стационарного состояния полупроводниковой наноструктуры. Кроме того, существует необходимость разработки методов анализа, возникающих в данной системе колебательных режимов, и их классификации.

В настоящее время анализ устойчивости стационарного состояния полупроводниковых наноструктур проводится, как правило, при помощи NL-критерия [9], предложенного в работе [10] для диодов Ганна. Данный алгоритм, однако, может быть использован в приближении однородного распределения электрического поля

в структуре, что во многих случаях, когда электрическое поле неоднородно, обуславливает большую погрешность в вычислении значения приложенного напряжения, необходимого для развития неустойчивости. Кроме того, этот критерий не может быть использован для рассмотрения полупроводниковых сверхрешеток, находящихся под действием внешних факторов, таких как модуляция приложенного напряжения, магнитное поле и резонансные системы. В то же время учет влияния данных факторов имеет большое значение для исследования динамики полупроводниковых структур в устройствах sub-THz- и THz-электроник. Магнитное поле, в частности, является одним из эффективных способов управления свойствами электронного транспорта, и его учет играет важную роль для повышения частоты генерации в полупроводниковых структурах [11]. Не менее важным оказывается учет влияния внешних резонансных систем, которые оказывают существенное влияние на генерацию колебаний в полупроводниковых наноструктурах [12].

Для анализа устойчивости и диагностики колебательных режимов в полупроводниковой структуре как в случае автономной динамики, так и с учетом влияния различных форм внешнего воздействия, представляется перспективным использование показателей Ляпунова. Данный инструмент активно применяется для решения подобных задач для большого класса потоковых динамических систем и дискретных отображений [13]. Однако метод расчета спектра показателей Ляпунова предложен и апробирован в основном для систем с малым числом степеней свободы. Прямое применение этого метода для анализа пространственно-распределенных систем, одними из которых являются полупроводниковые сверхрешетки, невозможно. Основные проблемы, возникающие при расчете спектра показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем, связаны с бесконечномерным фазовым пространством, в котором определено понятие „состояния“ таких систем,

необходимостью рассмотрения распределенных возмущений, моделирования их динамики и ортогонализации. Попытки расчета спектра показателей Ляпунова, основанные на искусственной дискретизации [14] распределенных систем или моделирования возмущенного состояния [15], не являются эффективными, так как не учитывают особенности, связанные с пространственно-распределенной природой, и к тому же могут являться причиной нетипичной динамики, связанной с модификациями исходной системы.

В настоящей работе предлагается метод расчета спектра показателей Ляпунова для полупроводниковой сверхрешетки, основанный на рассмотрении динамики набора малых возмущений основного состояния. При помощи разработанного подхода проводится анализ стационарного состояния системы и анализ возникающих колебательных режимов в случае автономной динамики и при воздействии наклонного магнитного поля.

Исследуемая система

Для описания коллективного транспорта заряда в полупроводниковых сверхрешетках, как правило, используется полуклассический подход [16]. В рамках данного подхода движение носителей заряда и пространственно-временная динамика конфигурации электрического поля в структуре рассчитываются при помощи гидродинамической модели, состоящей из самосогласованных уравнений непрерывности и Пуассона

$$\frac{\partial F}{\partial x} = v(n - n_D), \quad \frac{\partial n}{\partial t} = -\beta \frac{\partial J}{\partial x}, \quad (1)$$

где $F(x, t)$, $n(x, t)$, $J(x, t)$ — распределения напряженности электрического поля, концентрации носителей заряда и плотности тока в полупроводниковой структуре, $v = 15.769$ и $\beta = 0.031$ — безразмерные управляющие параметры, $n_D = 1.0$ — безразмерное значение равновесной концентрации носителей заряда в полупроводнике. Безразмерные величины в уравнениях (1) связаны с размерными параметрами через следующие соотношения:

$$\begin{aligned} n &= n'/n'_D, & x &= x'/L', & v &= L' en'_D / (F'_C \epsilon'_0 \epsilon'_r), \\ F'_C &= \hbar / (ed'\tau'), & t &= t'/\tau', & J &= J' / (en'_D v'_0), \\ v'_0 &= \delta \Delta' d' / (2\hbar), & \beta &= v'_0 \tau' / L', \end{aligned} \quad (2)$$

где размерные величины отмечены символом ($'$). В данном случае $n'_D = 3 \times 10^{22} \text{ м}^{-3}$ — равновесная концентрация носителей заряда, $L' = 115.2 \text{ нм}$ и $d' = 8.3 \text{ нм}$ — длина и период полупроводниковой сверхрешетки, $e > 0$ — заряд электрона, $\tau' = 250 \text{ фс}$ — время рассеяния носителей заряда в полупроводнике, $\epsilon'_r = 12.5$ — относительная диэлектрическая проницаемость материала, $\Delta' = 19.1 \text{ меВ}$ — ширина энергетической минизоны.

Для вычисления плотности тока используется дрейфовое приближение

$$J(x, t) = n(x, t) \times v(F(x, t)), \quad (3)$$

где $v(F)$ соответствует безразмерной дрейфовой скорости носителей заряда в полупроводниковой сверхрешетке [17]. Данная зависимость в рамках полуклассического подхода может быть получена на основании закона движения отдельного электрона в минизоне полупроводниковой сверхрешетки с учетом времени рассеяния [18]. При малых температурах и отсутствии внешних магнитных полей рассматриваемая зависимость имеет вид

$$v(F) = \frac{F}{1 + F^2}. \quad (4)$$

В качестве управляющего параметра в данной модели используется безразмерная разность потенциалов $V = V' / (F_C L)$ на границах системы, которая поддерживается постоянной

$$V = V_c + \int_0^1 F(x) dx, \quad (5)$$

где V_c соответствует падению напряжения на контактах полупроводниковой сверхрешетки и выбирается в соответствии с параметрами экспериментального образца [16,18].¹

Результат численного моделирования уравнений (1), (3)–(5) представлен на рис. 1 для двух различных значений приложенного напряжения. На рис. 1, *a* проиллюстрирована пространственно-временная динамика концентрации носителей заряда при величине безразмерной разности потенциалов $V \sim 9$ (что соответствует напряжению $V' = 330 \text{ мВ}$). Видно, что после переходного процесса в системе устанавливается стационарное распределение концентрации, характеризующееся наличием обогащенного носителями заряда слоя вблизи эмиттера. На рис 1, *c* представлена временная зависимость плотности тока для этого случая. Рис. 1, *b, d* отображает пространственно-временную динамику и зависимость плотности тока для $V \sim 11$ (напряжение $V' = 400 \text{ мВ}$). В данном случае в системе развивается неустойчивость и наблюдается образование движущихся доменов (рис. 1, *b*).

Влияние магнитного поля

Согласно результатам экспериментальных и теоретических работ, присутствие наклонного магнитного поля оказывает значительное влияние на характеристики

¹ Все вычисления (включая расчет спектра показателей Ляпунова, которые описаны далее в работе) были проделаны в безразмерных величинах, однако для удобства представления полученных результатов в нашей работе часть величин, показанных на рисунках, приведены в размерных единицах.

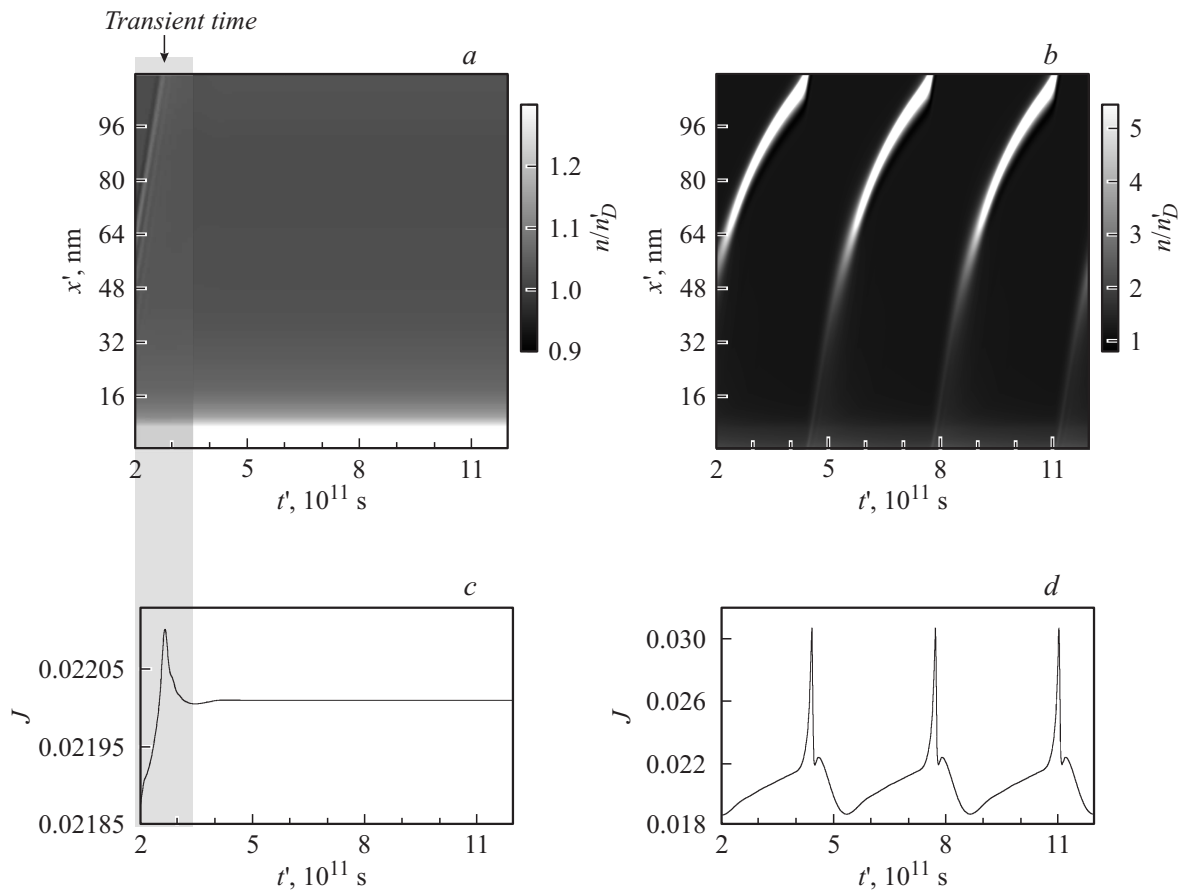


Рис. 1. Пространственно-временные зависимости концентрации носителей заряда (*a, b*) и плотности тока, текущего через сверхрешетку (*c, d*), для значений приложенного напряжения $V \sim 9$ ($V' = 330$ mV) и $V \sim 11$ ($V' = 400$ mV) соответственно.

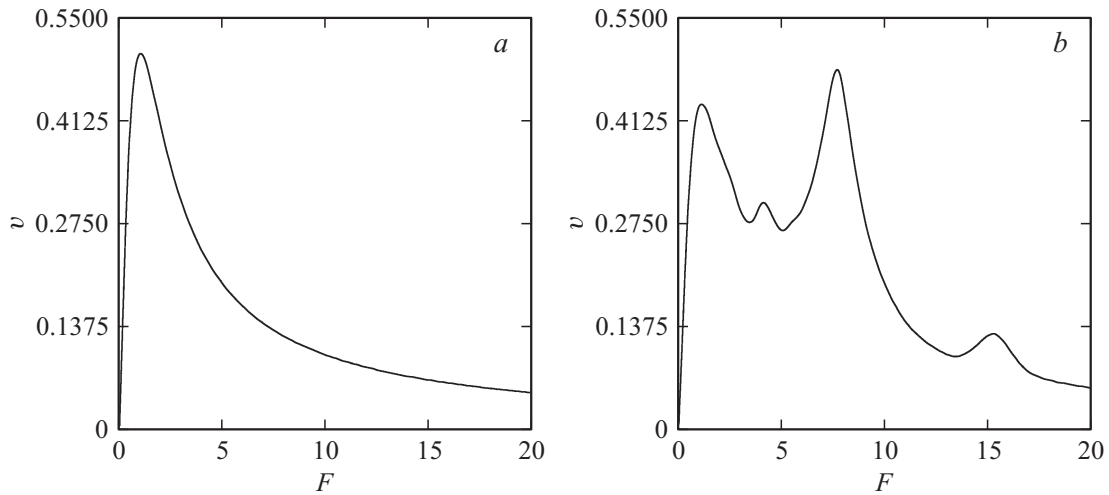


Рис. 2. Зависимости средней дрейфовой скорости носителей заряда в первой минищине полупроводниковой сверхрешетки от напряженности электрического поля в отсутствии магнитного поля (*a*) и при его воздействии ($B = 15$ T, $\Theta = 40^\circ$) (*b*).

электронного транспорта в полупроводниковых наноструктурах [11,17,19].

Учет влияния магнитного поля в полуклассическом приближении осуществляется при вычислении зависимости дрейфовой скорости электронов от продольного

электрического поля $\nu(F)$. Как уже отмечалось выше, в случае отсутствия магнитного поля и при малых температурах зависимость $\nu(F)$ подчиняется аналитической формуле Эсаки-Тсу (4). Данная зависимость изображена на рис. 2, *a*.

Из рисунка видно, что дрейфовая скорость носителей заряда возрастает при увеличении напряженности электрического поля и достигает максимума, называемого пиком Эсаки-Тсу. При дальнейшем увеличении напряженности F наблюдается уменьшение скорости, обусловленное рассеянием носителей заряда и брегговским отражением электронов от краев энергетической минизоны. Данный эффект был показан в работе [1] и связан также с возникновением терагерцовых блоховских колебаний электронов. Наличие падающего участка на зависимости $v(F)$ обуславливает отрицательную дифференциальную проводимость полупроводниковых наноструктур [20] и является причиной возникновения в ней нестационарных режимов электронного транспорта.

Влияние внешних полей и температуры на полупроводниковую сверхрешетку сказывается прежде всего на динамике носителей заряда и соответственно может существенно менять вид зависимости $v(F)$. Нахождение данной зависимости в этих случаях не может быть осуществлено аналитически и требует численного расчета [17]. В настоящей работе для анализа влияния наклонного магнитного поля зависимость $v(F)$ была вычислена при помощи метода, описанного в работе [17]. Подобная зависимость для магнитного поля с индукцией $B' = 15$ Т и углом наклона $\Theta = 40^\circ$ представлена на рис. 2, *b*. Видно, что влияние магнитного поля существенно меняет характер поведения дрейфовой скорости при изменении напряженности электрического поля в сверхрешетке. Особое внимание привлекает появление дополнительных пиков, связанных с возникновением блох-циклотронных резонансов [17], амплитуда которых может превышать высоту пика Эсаки-Тсу (см. рис. 2, *b*).

Таким образом, магнитное поле может существенно изменять свойства полупроводниковой наноструктуры, оказывая тем самым влияние на устойчивость стационарного состояния в ней и на характеристики режимов нестационарной динамики.

Метод расчета спектра показателей Ляпунова

Для расчета спектра показателей Ляпунова традиционно применяются методы, основанные на алгоритме Бенеттина [21]. Данный алгоритм подразумевает моделирование динамики набора малых (линейных) возмущений опорного состояния и отслеживание их нормы с течением времени через применение процедур ортогонализации и нормализации [21]. При этом опорное состояние системы определяется набором динамических переменных, однозначно описывающих ее состояние в каждый момент времени.

Состояние исследуемой полупроводниковой наноструктуры в каждый момент времени однозначно определяется пространственными распределениями напряженности электрического поля $F(x)$, концентрации носителей заряда $n(x)$ и плотности тока $J(x)$. Указанный

набор величин может быть рассмотрен в качестве опорного состояния. Однако, следуя работе [22], посвященной расчету показателей Ляпунова для пространственно-распределенных систем, возможно исключение из опорного состояния напряженности электрического поля и плотности тока в силу того, что данные величины однозначно определяются концентрацией носителей заряда при помощи уравнений (1) и (3). Таким образом, в качестве опорного состояния исследуемой системы можно рассмотреть величину

$$U(x, t) = n(x, t), \quad (6)$$

зависящую как от времени, так и от пространственной координаты.

В качестве малого возмущения состояния (6) выступает пространственно-распределенное возмущение $\tilde{n}(x, t)$, для которого в начальный момент времени выполняется условие нормировки $\sqrt{(\tilde{n}(x, t_0)\tilde{n}(x, t_0))} = 1$, где (\tilde{n}, \tilde{n}) определяет скалярное произведение

$$(\tilde{n}, \tilde{n}) = \int_0^1 \tilde{n}(x)\tilde{n}(x)dx. \quad (7)$$

Временная эволюция возмущения моделируется при помощи оператора (1), (3)–(5), линеаризованного в окрестности опорного состояния

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial x} &= v\tilde{n}, \\ \frac{\partial \tilde{n}}{\partial t} &= -\beta \frac{\partial \tilde{J}}{\partial x}, \\ \tilde{J} &= \tilde{n}v(F) + n \frac{dv(F)}{dF} \tilde{F}, \\ \int_0^1 \tilde{F}(x)dx &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Для вычисления спектра показателей Ляпунова в рассмотрение вводится набор возмущений $\tilde{n}_i(x, t)$, удовлетворяющий условию ортогональности

$$(\tilde{n}_i(x), \tilde{n}_j(x)) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases} \quad (9)$$

Подобный набор может быть получен при помощи процедуры Грамма–Шмидта, которая для пространственно-распределенных систем имеет вид [20]

$$\begin{aligned} \hat{n}_1(x, t_{GS}) &= \varphi_1(x), \\ \hat{n}_{i+1}(x, t_{GS}) &= \varphi_{i+1}(x) - \sum_{k=1}^i (\hat{n}_k(x, t_{GS}), \varphi_{i+1}(x)) \hat{n}_k(x, t_{GS}), \\ i &= \overline{1, N-1}, \\ \tilde{n}_i(x, t_{GS}) &= \frac{\hat{n}_i(x, t_{GS})}{|\hat{n}_i(x, t_{GS})|}, \quad i = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (10)$$

где t_{GS} соответствует моменту времени, в который процедура выполняется.

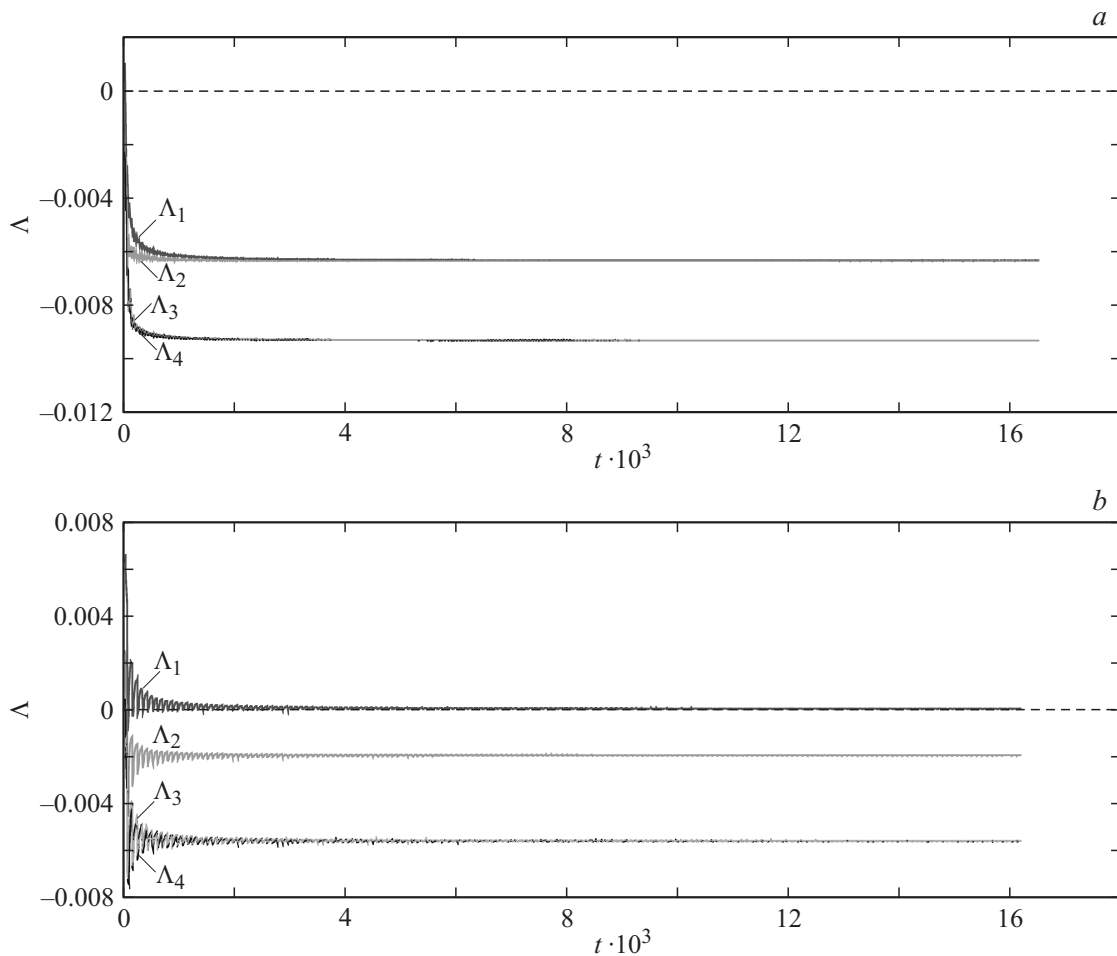


Рис. 3. Зависимость от времени четырех старших показателей Ляпунова для автономной полупроводниковой сверхрешетки в случае стационарного состояния $V \sim 9$ ($V' = 330$ мВ) (a) и режима периодической генерации $V \sim 11$ ($V' = 400$ мВ) (b).

Таким образом, интегрируя уравнения (1), (3)–(5) вместе с уравнениями (8), описывающими динамику набора возмущений, и проводя периодически процедуру (10) с переопределенными функциями $\varphi_i(x) = \tilde{n}_i(x, t_{GS})$, значения показателей Ляпунова могут быть вычислены при помощи соотношения

$$\Lambda_i = \frac{1}{MT} \sum_{j=1}^M \ln \left(\sqrt{\tilde{n}_i(x, jT), \tilde{n}_i(x, jT)} \right), \quad (11)$$

где i — номер показателя, M — количество операций перенормировки и ортогонализации (11), T — интервал времени между перенормировками. На рис. 3 продемонстрирован расчет четырех старших показателей Ляпунова. Значения параметров метода выбраны как $M = 6000$, $T \sim 2.5$ ($T = 6.25 \cdot 10^{-13}$ с). Видно, что, проводя процедуры ортогонализации и нормализации достаточно большое число раз ($M \sim 6000$), можно получить не меняющиеся во времени значения Λ , соответствующие показателям Ляпунова данной системы.

Построенные значения показателей Ляпунова на рис. 3 соответствуют значениям напряжения $V \sim 9$

($V' = 330$ мВ) (рис. 3, a) и $V \sim 11$ ($V' = 400$ мВ) (рис. 3, b), для которых на рис. 1 представлены результаты численного моделирования динамики опорного состояния. Видно, что стационарному состоянию соответствуют только отрицательные значения старших показателей Ляпунова (рис. 3, a), в то время как для режима периодической генерации характерно наличие нулевого старшего показателя (рис. 3, b).

При помощи предложенного метода были построены зависимости пяти старших показателей Ляпунова от значения приложенного напряжения как для случая автономной динамики (рис. 4, a), так и при воздействии наклонного магнитного поля (рис. 4, b). Влияние магнитного поля было учтено при помощи зависимостей $v(F)$ и $dv(F)/dF$, входящих в уравнения (1), (3)–(5), (8), описывающие поведения опорного состояния и набора возмущений. Анализ полученных зависимостей в обоих случаях показывает, что при увеличении напряжения в спектре появляется нулевой положительный показатель Ляпунова, что свидетельствует о переходе к нестационарной динамике и возникновению колебаний тока, текущего через структуру. При этом приложенное

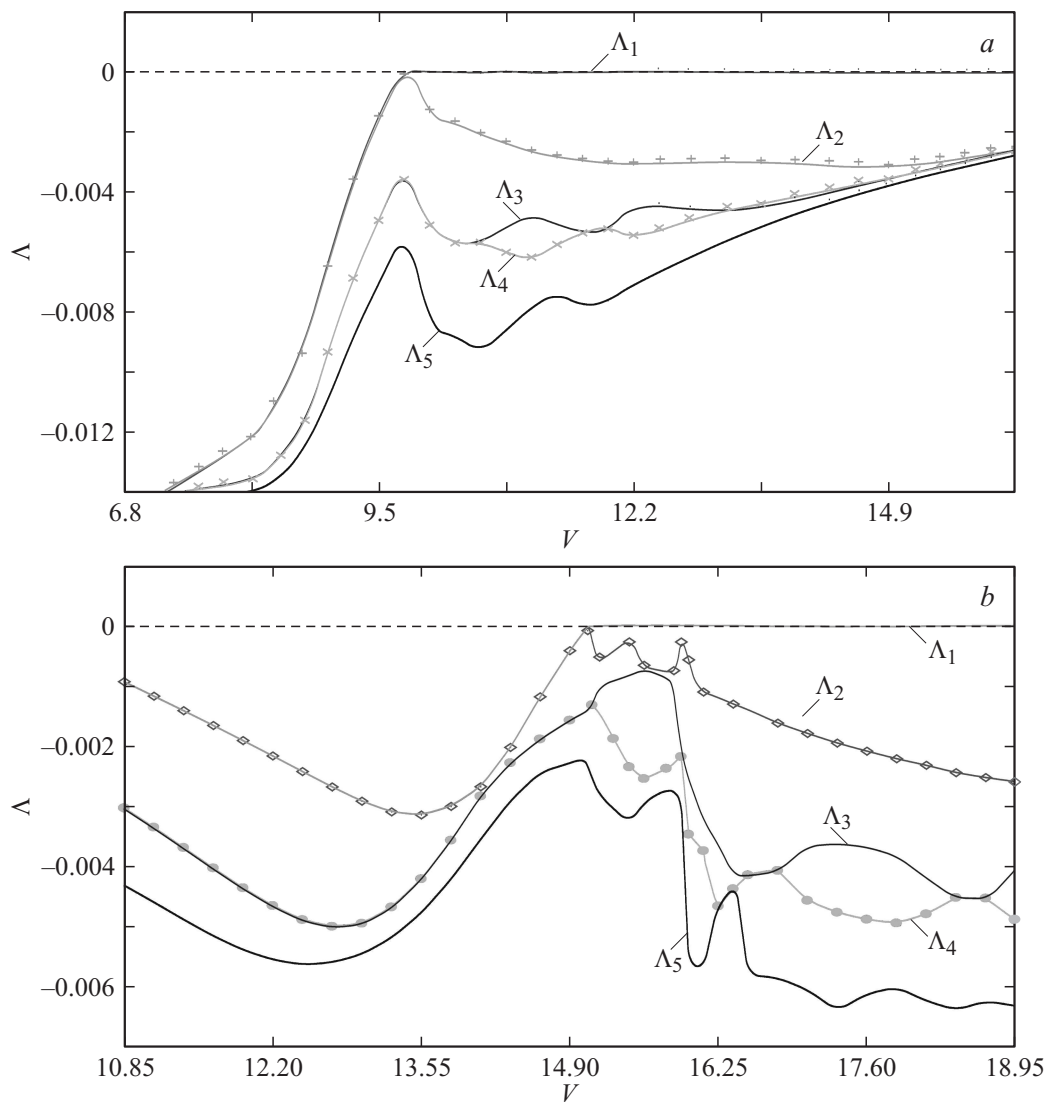


Рис. 4. Зависимость значения пяти старших показателей Ляпунова от размерного значения приложенного напряжения в случае автономной динамики (а) и воздействия на систему наклонного магнитного поля (б).

магнитное поле оказывает влияние на значение напряжения, необходимого для развития генерации (значение напряжения увеличивается до 560 mV). Следует отметить, что, несмотря на воздействие магнитного поля, приводящего к появлению дополнительных падающих участков на зависимости $v(F)$ (рис. 2, б), колебания в системе остаются периодическими при достаточно больших значениях приложенного напряжения, о чем свидетельствует нулевой старший показатель Ляпунова.

Таким образом, предложенный метод расчета спектра показателей Ляпунова был эффективно применен для анализа устойчивости стационарного состояния в полупроводниковой сверхрешетке и для детектирования типа колебательной динамики. Следует отметить, что разработанный подход был также использован для анализа влияния наклонного магнитного поля на динамику системы как в стационарном состоянии, так и в режиме генерации.

Заключение

В настоящей работе предложен метод расчета спектра показателей Ляпунова для полупроводниковой сверхрешетки, описываемой в рамках полуклассического подхода при помощи уравнений в частных производных. Предложенный подход был применен для анализа динамики автономной сверхрешетки и динамики системы под действием наклонного магнитного поля. Показано, что при приложении постоянного напряжения в системе в обоих случаях развивается неустойчивость и возникают периодические колебания. Однако значения напряжения, необходимого для возникновения неустойчивости, значительно различаются. Анализ спектра показателей Ляпунова позволил не только провести анализ устойчивости системы, но и детектировать тип нестационарной динамики при увеличении напряжения. Обнаружено, что в автономной полупроводниковой системе с увеличени-

ем приложенного напряжения не происходит изменение типа динамики и колебания остаются периодическими. Следует отметить, что влияние магнитного поля также не приводит к изменению типа динамики, о чем свидетельствует наличие старшего нулевого показателя Ляпунова для широкого диапазона значений приложенного напряжения.

Таким образом, разработанный метод расчета спектра показателей Ляпунова показал высокую эффективность при анализе устойчивости стационарного состояния и детектировании типа колебательного режима как в случае автономной динамики, так и при воздействии магнитного поля. Предложенный метод является перспективным для анализа сложных режимов электронного транспорта в полупроводниковых наноструктурах, взаимодействующих с внешними электродинамическими структурами и полями, что представляет важность для моделирования реальных приборов sub-THz- и THz-электроники на их основе.

Авторы выражают благодарность проф. А.Г. Баланову и проф. К.Н. Алексею (Университет Лафборо (Великобритания)) за обсуждения результатов. В.А. Максименко также выражает благодарность Фонду некоммерческих программ „Династия“ за индивидуальную стипендию, направленную на поддержку его научной деятельности.

Работа выполнена при поддержке Российского научного Фонда (проект № 14-12-00222).

Список литературы

- [1] *Esaki L., Tsu R.* // IBM J. Res. Develop. 1970. Vol. 14. N 1. P. 61.
- [2] *Овсянников М.И.* и др. // ФТП. 1970. Т. 4. Вып. 12. С. 2225.
- [3] *Шук А.Я.* // ФТП. 1974. Т. 8. Вып. 10. С. 1841.
- [4] *Bonilla L.L., Grahn H.T.* // Rep. Prog. Phys. 2005. Vol. 68. P. 577.
- [5] *Greenaway T.M.* et al. // Phys. Rev. B. 2009. Vol. 80. P. 205 318.
- [6] *Hyart T.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2010. Vol. 103. P. 117 401.
- [7] *Ridley B.K.* // Proc. Phys. Soc. London. 1963. Vol. 82. P. 954.
- [8] *Koronovskii A.A.* et al. // Phys. Wave Phenomena. 2013. Vol. 21. N 1. P. 48.
- [9] *Sibille A.* et al. // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 52.
- [10] *Kroemer H.* // Ieee transactions on electron devices. 1968. Vol. ED15. N 11. P. 819.
- [11] *Balanov A.G.* et al. // Phys. Rev. E. 2008. Vol. 77. N 2. P. 026 209.
- [12] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Сер. Современная теория колебаний и волн. М.: Физматлит, 2001.
- [13] *Макаров В.В.* и др. // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2013. Т. 21. № 5. С. 40.
- [14] *Lepri S.* et al. // Chaos. 1997. Vol. 7. P. 701.
- [15] *Kuznetsov S.P., Trubetskov D.I.* // Radiophys. Quant. Electron. 2004. Vol. 47. N 5, 6. P. 341.
- [16] *Fromhold T.M.* et al. // Nature. 2004. Vol. 428. P. 726.
- [17] *Selskii A.O.* et al. // Phys. Rev. B. 2011. Vol. 84. P. 235 311.
- [18] *Hramov A.E.* et al. // Phys. Rev. Lett. 2014. Vol. 112. P. 116 603.
- [19] *Сельский А.О., Осинов Г.В.* // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. Вып. 2. С. 96.
- [20] *Butiker M., Thomas H.* // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38. N 2. P. 78.
- [21] *Benettin G.* et al. // Meccanica. 1980. Vol. 15. P. 9.
- [22] *Koronovskii A.A.* et al. // Phys. Rev. B. 2013. Vol. 88. P. 165 304.