

Исследование фазовой синхронизации хаотических колебаний в терминах символического СТQ-анализа

© А.В. Макаренко

Научно-исследовательская группа „Конструктивная кибернетика“,
101000 Москва, Россия
e-mail: avm.science@mail.ru

(Поступило в Редакцию 17 октября 2014 г. В окончательной редакции 29 июня 2015 г.)

Рассмотрено применение символического СТQ-анализа для исследования синхронизации хаотических колебаний. Существенным отличием настоящего подхода от аналогов является его способность диагностировать и количественно измерять характеристики режимов перемежаемости при синхронизации хаотических систем и таким образом изучать временную структуру синхронизации. Впервые продемонстрировано применение аппарата символического анализа на основе Т-алфавита к системам с фазовой синхронизацией и синхронизацией временных масштабов. В качестве примера выбран достаточно сложный случай: система из двух взаимно связанных неидентичных осцилляторов Рёсслера, находящихся в режиме винтового хаоса и имеющих аттракторы с плохо обусловленной фазой. Из совокупности полученных результатов следует, что рассмотренный метод позволяет устойчиво диагностировать синхронизм ранее, нежели обнаруживается порог возникновения фазовой синхронизации и/или синхронизации временных масштабов.

Введение

Синхронизация принадлежит к числу фундаментальных понятий теории нелинейной динамики и теории хаоса. Этот феномен широко распространен в природе, науке, технике и в обществе [1]. Одно из важных проявлений этого явления — это синхронизация хаотических колебаний, которая экспериментально наблюдалась в различных физических приложениях (см. [1–5] и приведенные там ссылки): радиотехнические генераторы, механические системы, лазеры, электрохимические осцилляторы, плазма и газовый разряд, квантовые системы. Изучение данного явления является весьма важным также с точки зрения его применения к передаче информации [6] и к криптографическому шифрованию [7] с помощью детерминированных хаотических колебаний, к квантовым вычислениям [3,8].

Синхронизация хаотических колебаний объединяет под собой несколько различных видов [2]: обобщенная [9], полная [10], противофазная [11], с запаздыванием [12], частотная [13], фазовая [14], синхронизация временных масштабов [15]. Под каждый из них разработан соответствующий аналитический аппарат и методы диагностики. Тем не менее продолжают активные исследования, направленные, с одной стороны, на рассмотрение разных видов синхронизации с единых позиций, а с другой — на поиск новых видов синхронного поведения, не укладывающихся в означенные.

Несмотря на продолжительную историю изучения синхронизации хаотических колебаний, множество важных вопросов в данной области остается нерешенными. В их числе и количественное исследование временной структуры синхронизации динамических систем. Под этой структурой будем понимать всплески синхронного поведения фазовых переменных систем, в промежутках

между которыми уровень синхронности характеризуется малой величиной, т.е. перемежаемое поведение [16,17]. Отметим, что исследование структуры синхронизма [18] имеет как теоретическую значимость для самой нелинейной динамики [19], так и прикладное значение, например, в вопросах биологии и медицины [20,21], стохастической финансовой математики [22] и т.д. Тем не менее при всей актуальности проблематики исследования временной структуры синхронизации нелинейных систем продвижение по этому вопросу весьма слабое. Причины сложившейся ситуации достаточно подробно рассмотрены в работе [18].

С целью решения проблем, связанных с диагностикой и количественным измерением характеристик временной структуры синхронизации хаотических колебаний, автором был предложен оригинальный метод исследования синхронизма на основе символического СТQ-анализа (аббревиатура СТQ обозначает три алфавита, которыми оперирует метод: С, Т и Q) [23,24]. Необходимо отметить, что символическая динамика при всей своей кажущейся внешней простоте является весьма строго обоснованным инструментом анализа нелинейных динамических систем [25,26]. Она позволяет исследовать такие сложные явления в системах, как хаос, странные аттракторы, гиперболичность, структурная устойчивость, управляемость и т.п. (см., например, [25–28] и приведенные там ссылки).

В рамках предложенного символического анализа синхронизация хаотических колебаний исследуется через так называемую Т-синхронизацию [29,30], увязанную на инвариантные характеристики формы траекторий динамических систем в расширенном пространстве состояний. Разработанные меры позволяют диагностировать и количественно измерять характеристики режимов перемежаемости при синхронизации хаотических систем, т.е.

изучать временную структуру синхронизации нелинейных систем [18].

Конструктивность подхода на основе анализа Т-синхронизации хаотических колебаний была продемонстрирована автором на ряде модельных и реальных систем [18,29–32]. В настоящей работе впервые демонстрируются возможности метода при анализе фазовой синхронизации [14] и синхронизации временных масштабов [15]. Причем в качестве изучаемого примера намеренно выбрана система из двух неидентичных осцилляторов Рёсслера [33] с плохо обусловленной фазой, в которой прямая диагностика фазовой синхронизации затруднена [34].

Определение Т-синхронизации хаотических систем

Введем в рассмотрение траекторию динамической системы, заданную в виде дискретной последовательности (временного ряда): $\{s_k\}_{k=1}^K$, где фазовая переменная s системы имеет размерность N , а траектория состоит из K временных отсчетов. При этом каждому k -му отсчету может быть сопоставлен момент времени t_k .

Определим исходное отображение, кодирующее в терминах конечного Т-алфавита [23,24] форму n -й компоненты последовательности $\{s_k\}_{k=1}^K$:

$$\{s_{k-1}^{(n)}, s_k^{(n)}, s_{k+1}^{(n)}\} \Rightarrow T_k^{\alpha\varphi}|_n, \quad T_k^{\alpha\varphi} = [T_k^{\alpha\varphi}|_1, \dots, T_k^{\alpha\varphi}|_N]. \quad (1)$$

Строго отображение (1) задается через соотношения

$$\begin{aligned} T0 & \Delta s_- = \Delta s_+ = 0, \\ T1 & \Delta s_- = \Delta s_+ < 0, \\ T2 & \Delta s_- = \Delta s_+ > 0, \\ T3N & \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ < \Delta s_-, \\ T3P & \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ > \Delta s_-, \\ T4N & \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ = 0, \\ T4P & \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ = 0, \\ T5N & \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ < \Delta s_-, \\ T5P & \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ > \Delta s_-, \\ T6S & \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ > -\Delta s_-, \\ T6 & \Delta s_- = -\Delta s_+ > 0, \\ T6L & \Delta s_- > 0, \quad \Delta s_+ < 0, \quad \Delta s_+ < -\Delta s_-, \\ T7S & \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ < -\Delta s_-, \\ T7 & \Delta s_- = -\Delta s_+ < 0, \\ T7L & \Delta s_- < 0, \quad \Delta s_+ > 0, \quad \Delta s_+ > -\Delta s_-, \\ T8N & \Delta s_- = 0, \quad \Delta s_+ < 0, \\ T8P & \Delta s_- = 0, \quad \Delta s_+ > 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $\Delta s_- = s_k^{(n)} - s_{k-1}^{(n)}$ и $\Delta s_+ = s_{k+1}^{(n)} - s_k^{(n)}$.

Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ для k -го отсчета и n -й фазовой переменной, приведены на рис. 1.

Таким образом, Т-алфавит включает в себя следующее множество символов:

$$T_0^{\alpha\varphi} = \{T0, T1, T2, T3N, T3P, T4N, T4P, T5N, T5P, T6S, T6, T6L, T7S, T7, T7L, T8N, T8P\}. \quad (3)$$

Как видно из (3), символ $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ кодируется в виде Ti , где i — это правая часть кодов символов алфавита $T_0^{\alpha\varphi}$. В свою очередь, символ $T_k^{\alpha\varphi}$ кодируется через $Ti_1 \dots i_n \dots i_N$, см. (1). Полный алфавит $T_0^{\alpha\varphi}|N$, кодирующий форму траектории многомерной последовательности $\{s_k\}_{k=1}^K$ в целом состоит из 17^N символов.

Предположим теперь, что временная последовательность $\{s_k\}_{k=1}^K$ размерностью N формируется за счет объединения фазовых переменных N одномерных динамических систем, т.е. $s_k^{(n)}$ — это значение фазовой переменной n -й системы в k -й момент времени. Данное предположение введено исключительно для простоты объяснения идеи, и оно ни в коем случае не приводит к потере общности.

Будем считать динамические системы синхронными в момент времени k в смысле Т-синхронизации [18,29,30], если выполняется условие $J_{k=1}$, где

$$J_k = \begin{cases} 1 & T_k^{\alpha\varphi}|_1 = \dots = T_k^{\alpha\varphi}|_n = \dots = T_k^{\alpha\varphi}|_N, \\ 0 & otherwise. \end{cases} \quad (4)$$

Принимая во внимание возможность наличия противофазной синхронизации [11] между системами, необходимо также рассмотреть все возможные варианты инвертирования их фазовых переменных: $s_k^{(n)} \rightarrow -1 \cdot s_k^{(n)}$. В этом случае для n -й системы замена символов $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ в k -м отсчете происходит по схеме

$$T0 \leftrightarrow T0,$$

$$T1 \leftrightarrow T2, T3N \leftrightarrow T5P, T3P \leftrightarrow T5N, T4N \leftrightarrow T4P,$$

$$T6S \leftrightarrow T7S, T6 \leftrightarrow T7, T6L \leftrightarrow T7L, T8N \leftrightarrow T8P. \quad (5)$$

Каждый вариант инвертирования обозначим номером m . Общее количество вариантов инвертирования есть $M = 2^{N-1}$.

Синхронизация между системами может наступать и в лаг-режиме [12]. Для ее обнаружения необходимо подвигать относительно друг друга фазовые траектории систем. Для этого введем оператор сдвига (в строгом смысле действительный при $K \rightarrow \infty$)

$$H_h : \left\{ T_k^{\alpha\varphi}|_1 \rightarrow T_{k+h_1}^{\alpha\varphi}|_1, \dots, T_k^{\alpha\varphi}|_n \rightarrow T_{k+h_n}^{\alpha\varphi}|_n, \dots, T_k^{\alpha\varphi}|_N \rightarrow T_{k+h_N}^{\alpha\varphi}|_N \right\}, \quad h_n \in N \cup \{0\}, \quad h_n \ll K. \quad (6)$$

Так как противофазная синхронизация и лаг-синхронизация могут присутствовать вместе, то при

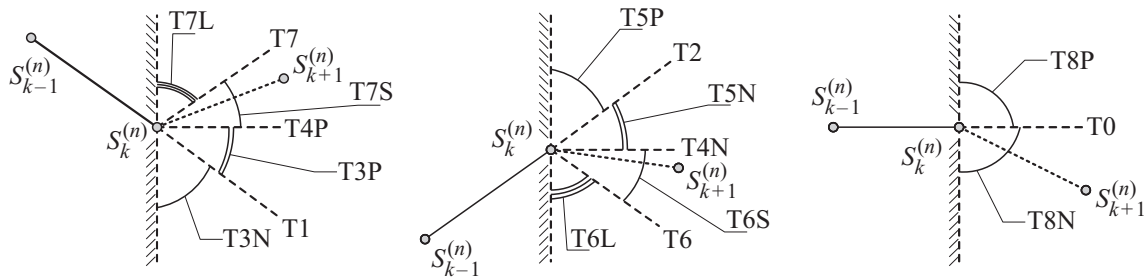


Рис. 1. Графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов $T^{\alpha\varphi}|_n$ для k -го отсчета и n -й фазовой переменной.

расчете частного интегрального коэффициента синхронности учтем это обстоятельство:

$$\delta_{m,h}^s = \frac{1}{K^* + 1 - k^*} \sum_{k=k^*}^{K^*} J_k | \{m, h\},$$

$$k^* = 1 + \max(h_1, \dots, h_N),$$

$$K^* = K + \min(h_1, \dots, h_N),$$

где K — длина последовательности $\{T_k^{\alpha\varphi}|_n\}_{k=1}^K$.

Исходя из частного, рассчитаем полный интегральный коэффициент синхронности систем:

$$\delta^s = \max_m \max_h \delta_{m,h}^s, \quad 0 \leq \delta^s \leq 1, \quad (8)$$

т.е. выберем такую комбинацию сдвигов между траекториями систем и варианта инвертирования их фазовых переменных, которые в совокупности доставляют максимальное количество отсчетов k , отвечающих условию $J_k = 1$.

Из определения условия синхронизации (4) следует, что предложенный анализатор синхронности оценивает уровень полной синхронизации [10], обнаруживает противофазную синхронизацию [11] с лаг-синхронизацией [12] именно в алфавитном представлении $T_0^{\alpha\varphi}$. Но из определения геометрии символов Т-алфавита (2) следует, что полная синхронизация на уровне отсчетов $T_k^{\alpha\varphi}$ является более широким явлением, чем полная синхронизация на уровне s_k — отсчетов самой последовательности, поскольку Т-синхронность динамических систем (по набору фазовых переменных s) рассматривается с позиций формы (структуры геометрии) траекторий систем в расширенном фазовом пространстве. Под формой (структурой геометрии) траектории динамической системы в расширенном фазовом пространстве понимается некий ее инвариант, сохраняющийся при однородных сдвигах и растяжениях траектории в пространстве фазовых переменных. Таким образом, в определенном смысле Т-синхронизация изучает топологические аспекты синхронизации динамических систем [19,25,26]. Следовательно, это открывает потенциальную возможность конструктивного применения предложенного анализатора к вопросам изучения обобщенной синхронизации хаоса [9,32]. Отметим, что изучение этих вопросов — предмет наших дальнейших исследований.

Введенная через (8) величина δ^s характеризует синхронность изучаемых систем в среднем на рассматриваемом периоде времени $t_K - t_1$. Как указано во введении к работе, подавляющее большинство исследований по синхронизации хаоса этим обычно и ограничиваются. Но зачастую исследователя может интересовать и временная структура синхронизации систем. Напомним, что под этой структурой понимаются всплески синхронного поведения фазовых переменных систем, в промежутках между которыми уровень синхронности характеризуется малой величиной, т.е. перемежаемое поведение [16–18].

В работе автора [29] было введено понятие *синхронного домена SD* — совокупности отсчетов временного ряда, для которых справедливо условие (\vee — символ логического ИЛИ):

$$SD_r : \{J_{k'} = 1, J_{k''} = 0 \vee k'' = 0,$$

$$J_{k'''} = 0 \vee k''' = K + 1\},$$

$$k' = \overline{b_r^{SD}, b_r^{SD} + L_r}, k'' = b_r^{SD} - 1, k''' = b_r^{SD} + L_r^{SD} + 1, \quad (9)$$

где b_r^{SD} — момент появления, L_r^{SD} — длина и r — порядковый номер синхронного домена. Причем справедливы условия $L_r^{SD} \ll K$ и общее количество синхронных доменов (в исходной последовательности) $R^{SD} \leq (K + 1) \text{div} 2$.

Для возможности количественного описания временной структуры синхронизации систем автором в работе [29] была введена функция спектральной плотности синхронных доменов SD:

$$H^{SD}[L] = \sum_{r=1}^{R^{SD}} \delta[L_r^{SD}, L], \quad (10)$$

где $\delta[\cdot, \cdot]$ — символ Кронекера, $L = \overline{1, K}$. С целью анализа степени вырожденности структуры синхронных доменов дополнительно была определена величина E^{SD} — энтропия структуры синхронных доменов (по Шеннону), имеющая смысл при $\delta^s > 0$ [30]:

$$E^{SD} = - \sum_{i=1}^K P^{SD}[i] \ln P^{SD}[i],$$

$$P^{SD}[L] = \frac{H^{SD}[L]}{\sum_{i=1}^K H^{SD}[i]}. \quad (11)$$

Из свойств энтропии Шеннона следует, что энтропия E^{SD} минимальна ($E^{SD} = 0$), когда спектр $H^{SD}[L]$ вырожден (все домены синхронизации имеют одну длину) и максимальна ($E^{SD} = \hat{E}^{SD}$) — в случае равномерного гребенчатого спектра $H^{SD}[L]$ с предельным числом различных длин доменов синхронизации, равном \hat{W}_{cmb}^{SD} :

$$\hat{W}_{cmb}^{SD} = \min \left\{ \left\lfloor \frac{\sqrt{1 + 8\delta^s K} - 1}{2} \right\rfloor, K - \delta^s K + 1 \right\},$$

$$\hat{E}^{SD} = \ln \hat{W}_{cmb}^{SD}, \quad (12)$$

где $[a]$ — целая часть a . На основе (11) и (12) возможно определить относительную энтропию структуры синхронных доменов $\Delta_E^{SD} \in [0, 1]$:

$$\Delta_E^{SD} = \frac{E^{SD}}{\hat{E}^{SD}}. \quad (13)$$

Величину Δ_E^{SD} имеет смысл применять, если перед исследователем стоит задача сравнить случай синхронизации, различающиеся величинами δ^s и/или K .

С целью получения полного и замкнутого представлений о временной структуре синхронизма динамических систем в работе [18] было дополнительно введено понятие десинхронного домена \overline{SD} (аналог (9), но с условием $J_k = 0$).

Необходимо отметить, что представленный в настоящей работе инструментарий для диагностики Т-синхронизации разработан под дискретные динамические системы. Но, как будет показано далее, он может быть успешно применен и к потоковым системам. Несмотря на то что сечение Пуанкаре, примененное к потокам, приводит к потере полной информации об их состоянии [19,26], тем не менее анализ Т-синхронизации устойчиво обнаруживает присутствие синхронизма.

Анализ Т-синхронизации двух взаимосвязанных неидентичных осцилляторов Рёсслера

Рассмотрение вопроса о возможности диагностики фазовой синхронизации посредством символического СТQ-анализа проведем на примере двух взаимно связанных неидентичных осцилляторов Рёсслера [33], находящихся в режиме винтового хаоса [26]:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,2} &= -\omega_{1,2}y_{1,2} - z_{1,2} + \varepsilon(x_{2,1} - x_{1,2}), \\ \dot{y}_{1,2} &= \omega_{1,2}x_{1,2} + ay_{1,2} + \varepsilon(y_{2,1} - y_{1,2}), \end{aligned} \quad (14)$$

где ε — параметр связи, $\omega_1 = 0.98$, $\omega_2 = 1.03$, $a = 0.22$, $p = 0.1$, $c = 8.5$. Параметры системы (14) были выбраны исходя из методической необходимости сопоставления результатов настоящей работы с выводами работ [15,34]. Параметр связи ε варьировался на интервале $[0, 0.25]$ с дискретой 1×10^{-3} . Численное

интегрирование уравнений (14) проводилось методом Рунге-Кутты 5-го порядка на интервале $T = [0, 8000]$, с фиксированным шагом $\Delta t = 1 \times 10^{-2}$. Для каждого значения ε рассчитывалось 1×10^3 траекторий с начальными условиями (НУ), независимыми для каждого из осцилляторов: $x_0 = \xi_1 \in [-10, 10]$, $y_0 = \xi_2 \in [-10, 10]$, $z_0 = \xi_3 \in [0, 50]$, где ξ_{1-3} — некоррелированные равномерно распределенные псевдослучайные величины. Это позволило свести к минимуму эффект памяти на траекториях, индуцированный НУ. Из фазовых переменных системы (14) посредством стробоскопического преобразования Пуанкаре была сформирована многомерная последовательность $\{s_k\}_{k=1}^K$ с элементами:

$$s_k = \begin{bmatrix} x_k^{(1)} & y_k^{(1)} & z_k^{(1)} \\ x_k^{(2)} & y_k^{(2)} & z_k^{(2)} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

Затем из последовательности $\{s_k\}_{k=1}^K$ по формулам (1) и (2) был сформирован набор символьных последовательностей $\{T_k^{\alpha\varphi}|_{ij}\}_{k=1}^K$, где i — номер осциллятора, а j — номер фазовой переменной. Символьные последовательности имели длину $K = 1 \times 10^5$ и порождались на интервале $T' = [7, 8] \times 10^3$. Подобный сдвиг от $t = 0$ объясняется необходимостью нейтрализации паразитного влияния переходного процесса.

В подавляющем большинстве работ изучение синхронизации двух многомерных систем проводится по одной паре фазовых переменных. Уравнения (14) в работах [15,34] также изучали только по связи $x_1 \leftrightarrow x_2$. Подобный подход в основном объясняется ограниченностью применяемых методов исследования синхронизации, которые могут проводить только парное сравнение величин. Рассматриваемый в настоящей работе метод свободен от этого ограничения, поэтому изучать синхронизацию в осцилляторах (14) будем согласованно по всем трем фазовым переменным ($x_1 \leftrightarrow x_2$, $y_1 \leftrightarrow y_2$, $z_1 \leftrightarrow z_2$). Для этого общее правило синхронизации (4) переопределим в виде

$$J_{sym}^{\alpha\varphi} [T_k^{\alpha\varphi}] = \prod_{j=1}^3 \begin{cases} 1 & T_k^{\alpha\varphi}|_{1j} = T_k^{\alpha\varphi}|_{2j}, \\ 0 & otherwise. \end{cases} \quad (16)$$

Выражение (16) наглядно демонстрирует, как осуществляется переход от анализа одномерных систем (4) к исследованию многомерных. По аналогии с правилом (16) возможно конструировать иные схемы анализа синхронизма, в том числе для систем в виде многомерных решеток с произвольной топологией.

Синхронизация в системе (14) подробно изучалась в работах [15,34], причем в работе [34] с позиций фазовой синхронизации, а в работе [15] с позиций синхронизации временных масштабов. Из данных работы [15] следует, что при $\varepsilon_r \simeq 0.039$ начинает наблюдаться фазовая синхронизация, а также синхронизация некоторых временных масштабов. В работе [34] с помощью косвенных измерений установлено, что при $\varepsilon_p \simeq 0.05$

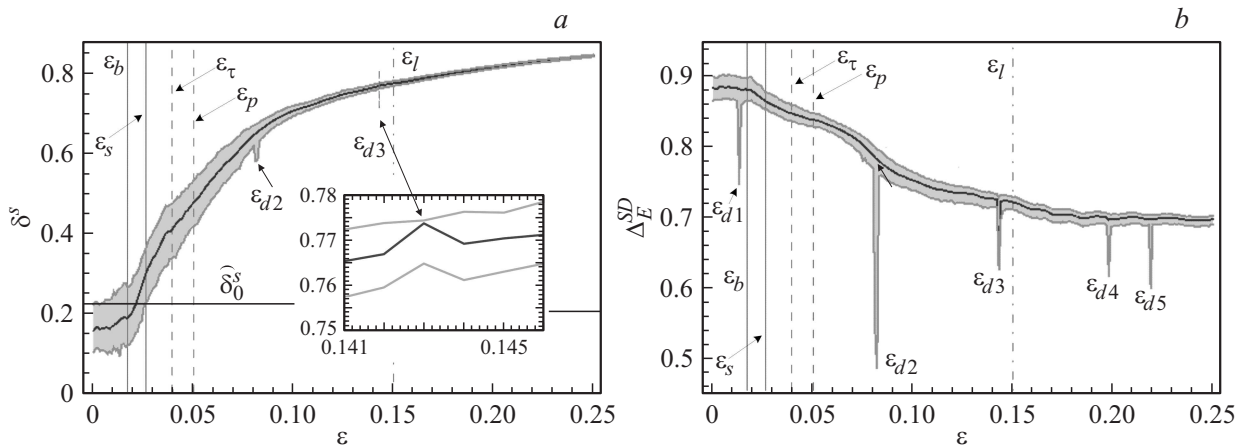


Рис. 2. Зависимость от параметра ε : a — δ^s и b — Δ_E^{SD} ; лаг-синхронность не учитывается $\mathbf{h} = \mathbf{0}$; цвета на графиках означают: черный — оценка медианы, серый — интервал значений с границами по вероятности $1 - \alpha$ с уровнем значимости $\alpha = 10^{-3}$.

наличествует стабильная фазовая синхронизация, а при $\varepsilon_l \simeq 0.15$ между осцилляторами формируется режим лаг-синхронизации. Режим синхронизации с запаздыванием также подтверждается в работе [15], но при $\varepsilon > 0.2$. Дополнительно делается вывод, что практически все временные масштабы синхронизованы. Необходимо отметить, что в работе [15] фазовая синхронизация рассматривается как частный случай синхронизации временных масштабов.

Далее проведем анализ системы (14) с позиций Т-синхронизации. Из рис. 2, a видно, что в целом с ростом параметра связи растет и интегральный уровень синхронизации. В точке $\varepsilon_b \simeq 0.017$ начинается заметный рост величины δ^s , а при $\varepsilon_s \simeq 0.026$ нижний квантиль δ^s впервые превышает верхний квантиль δ_0^s при $\varepsilon = 0$. Таким образом, в первом приближении точку ε_s возможно считать статистически значимым порогом возникновения Т-синхронизации в системе (14). Отметим, что построение критических интервалов производилось по эмпирическим функциям распределений рассчитываемых характеристик. Верхний и нижний квантили строились как двусторонние порядков $1 - \alpha/2$ и $\alpha/2$ соответственно. Уровень статистической значимости принят $\alpha = 10^{-3}$. При этом в качестве оценки средней величины исследуемых характеристик в работе используется медиана, как более робастный индикатор, нежели арифметическое среднее [35].

В свою очередь, анализ рис. 2, b показывает, что при $\varepsilon = \varepsilon_b$ начинается резкий спад относительной энтропии структуры синхронных доменов. При этом ширина коридора значений Δ_E^{SD} по вероятности $1 - \alpha$ меняется достаточно монотонным образом. Эта монотонность нарушается в пяти областях — происходит резкое и весьма существенное уменьшение значений нижнего квантиля (рис. 2, b): $\varepsilon_{d1} \simeq 0.013$, $\varepsilon_{d2} \simeq 0.082$, $\varepsilon_{d3} \simeq 0.143$, $\varepsilon_{d4} \simeq 0.198$ и $\varepsilon_{d5} \simeq 0.219$. При этом в точке ε_{d3} резко уменьшается и медиана величины Δ_E^{SD} . А области ε_{d2} и ε_{d3} отчетливо фиксируются и по парамет-

ру δ^s (рис. 2, a). Таким образом, принимая во внимание смысл относительной энтропии структуры синхронных доменов, возможно сделать предварительный вывод о негрубости режима синхронизации в указанных пяти зонах. Это может косвенно указывать на наличие в них бифуркационных смен режимов [19,26] и/или характера синхронизации.

Медиана спектральной плотности синхронных доменов приведена на рис. 3, a . Максимальная зарегистрированная длина синхронного домена составила $\max L^{\text{SD}} = 306$ отсчетов, при этом наиболее часто встречающиеся синхронные домены имеют длину не более 150 отсчетов. С увеличением параметра связи ε наиболее вероятные домены также увеличивают свою длину, повышая интегральный уровень синхронности δ^s . Необходимо отметить, что область ε_{d3} отчетливо фиксируется и на карте спектральной плотности (рис. 3, a).

Детальный анализ спектральной плотности синхронных доменов в областях ε_{d1-5} показал, что зависимость $H^{\text{SD}}[L^{\text{SD}}]$ становится более изрезанной — спектры приобретают ярко выраженный гребенчатый характер. Этот феномен проиллюстрирован на рис. 4, где приведены спектры плотности синхронных доменов в зонах ε_{d2-4} и для сравнения — спектры для значений параметра связи, отстоящих от ε_{d2-4} на малую величину 2×10^{-3} . Таким образом, сделанный выше вывод о негрубости режима синхронизации в указанных пяти зонах и наличие в них бифуркационных смен режимов и/или характера синхронизации подтверждается.

Зависимость медианы интегрального уровня синхронизации $\bar{\delta}^s$ от параметра связи ε и вектора сдвигов между траекториями систем \mathbf{h} приведена на рис. 3, b . Из рисунка видно, что в системе реализуется режим лаг-синхронизации. При этом с возрастанием параметра связи величина запаздывания между системами снижается.

Изучение \mathbf{h}_{eff} — эффективных значений параметров сдвига — позволило уточнить характер лаг-синхронизации. Под величиной \mathbf{h}_{eff} понимается мно-

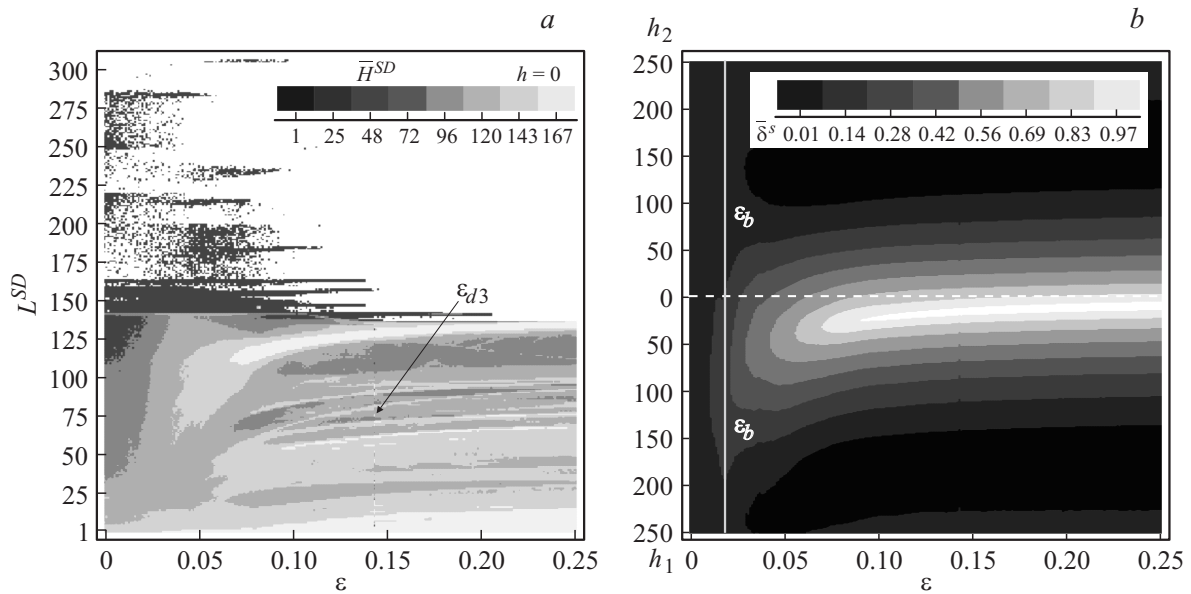


Рис. 3. Зависимость от параметра ϵ : $a - \bar{H}^{SD}(L^{SD})$ и $b - \bar{\delta}^s(\mathbf{h})$.

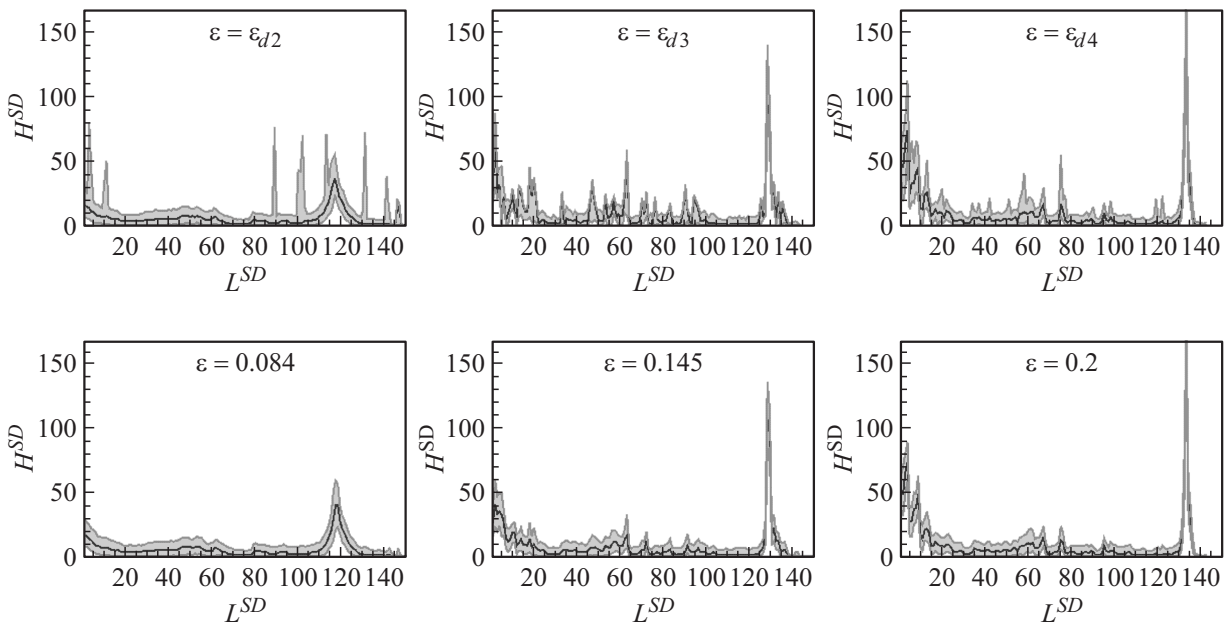


Рис. 4. Зависимость $H^{SD}[L^{SD}]$ для фиксированных значений параметра ϵ ; лаг-синхронность не учитывается $\mathbf{h} = \mathbf{0}$; цвета на графиках означают: черный — оценка медианы, серый — интервал значений с границами по вероятности $1 - \alpha$ с уровнем значимости $\alpha = 10^{-3}$.

жество значений параметров сдвига, удовлетворяющих условию

$$\mathbf{h}_{\text{eff}} = \{ \mathbf{h} : \delta^s(\mathbf{h}) > \max \delta^s \}. \quad (17)$$

Границы множества эффективных значений параметров сдвига приведены на рис. 5, a , а график изменения w_h — ширины области \mathbf{h}_{eff} в зависимости от параметра ϵ — приведен на рис. 5, b . Из рис. 5, a и 5, b следует, что вплоть до момента $\epsilon = \epsilon_b$ ширина множества эффективных значений параметров сдвига

равна максимальной величине, принятой в настоящей работе. В зоне $\epsilon > \epsilon_b$ ширина w_h достаточно монотонно уменьшается, исключением является область ϵ_{d2} . Таким образом, на основе анализа поведения величины w_h порог обнаружения Т-синхронизации возможно обоснованно сдвинуть влево с точки ϵ_s к точке ϵ_b .

Зависимости интегрального уровня синхронизации и относительной энтропии структуры синхронных доменов от параметра связи с учетом лаг-синхронизации приведены на рис. 6, a и b соответственно. Лаг-

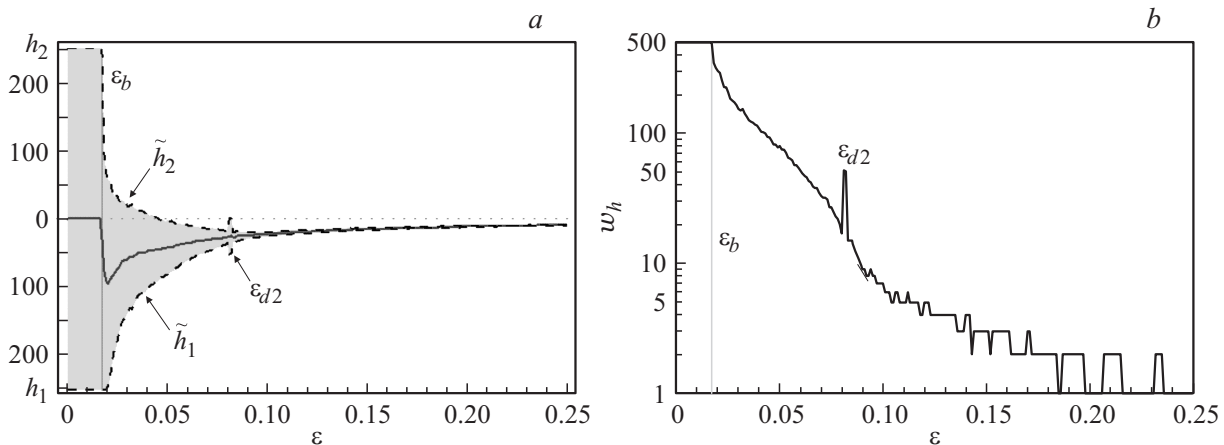


Рис. 5. Зависимость от параметра ε : a — $\mathbf{h}_{\text{эф}}$ и b — w_h ; цвета на графиках означают: черный — оценка медианы, серый — область $\mathbf{h}_{\text{эф}}$; штрихами обозначены границы области $\mathbf{h}_{\text{эф}}$.

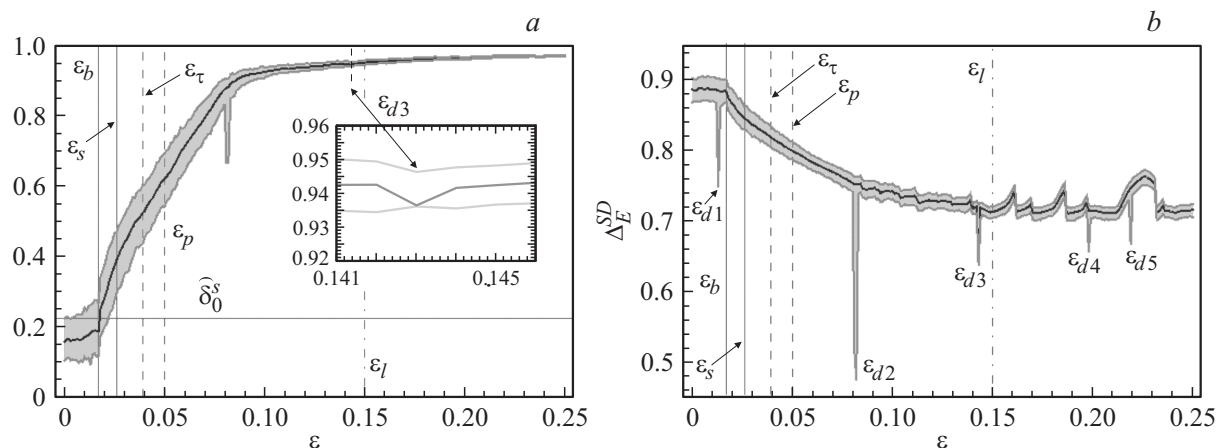


Рис. 6. Зависимость от параметра ε : a — δ^s и b — ΔE^{SD} ; лаг-синхронизация учитывается по медиане множества эффективных значений параметров сдвига; цвета на графиках означают: черный — оценка медианы, серый — интервал значений с границами по вероятности $1 - \alpha$ с уровнем значимости $\alpha = 10^{-3}$.

синхронизация учитывается по медиане множества $\mathbf{h}_{\text{эф}}$. Из рис. 6, a видно, что интегральный коэффициент синхронизации после ε_b растет быстрее, нежели в случае, когда лаг-синхронизация не учитывается (рис. 2, a). При этом зона ε_{d2} выражена более явно, и за ней рост величины δ^s резко замедляется. Отметим также различие поведения медианы интегрального уровня синхронизации $\bar{\delta}^s$ в области ε_{d2} в случае учета лаг-синхронизации (рис. 6, a) и без учета последней. В первом случае медиана прижата к нижнему квантилю, во втором — к верхнему. Из сравнения рис. 2, a и 6, a следует, что учет запаздывания между системами позволяет увеличить оценку наблюдаемого интегрального уровня синхронизации. Так, при $\varepsilon = 0.25$, $\delta^s(\mathbf{h} = \mathbf{0}) \approx 0.8437$, а $\delta^s(\mathbf{h} = \bar{\mathbf{h}}_{\text{эф}}) \approx 0.9655$.

Сравнение рис. 2, b и 6, b демонстрирует различное поведение относительной энтропии между зонами ε_{d2} и ε_{d5} и справа от нее в случае лаг-синхронизации и без учета последней. Как видно из рис. 6, b , в случае

учета запаздывания между системами на означенном интервале значений ε появляются явно выраженные локальные всплески энтропии, которые проявляются на уровне обоих квантилей. Причины этого явления пока остаются не ясными.

Необходимо также отметить, что в зоне синхронизма как без учета лаг-синхронизации, так и с ее учетом везде реализуется режим прямой синхронизации, т.е. инвертирование (5) фазовых переменных отсутствует.

Таким образом, агрегируя полученные результаты и сравнивая их с результатами работ [15,34], возможно сформулировать ряд основных выводов.

Во-первых, Т-синхронизация начинает устойчиво диагностироваться ранее, чем обнаруживается порог возникновения фазовой синхронизации и/или синхронизации временных масштабов. Действительно, устойчивый порог обнаружения Т-синхронизации $\varepsilon_b \approx 0.017$, в то время как порог для синхронизации временных масштабов $\varepsilon_r \approx 0.039$, а для фазовой синхронизации $\varepsilon_p \approx 0.05$.

Более того, в работе [15] указано, что при $\varepsilon \simeq 0.025$ синхронизация отсутствует.

Во-вторых, анализ временной структуры синхронизма [18] — весьма чувствительный инструмент, позволяющий обнаруживать негрубость режима синхронизации и наличие бифуркационных смен режимов и/или характера синхронизации. Так, области ε_{d1} и ε_{d3} являются предвестниками вхождения исследуемой системы (14) в режим Т-синхронизации и лаг-синхронизации соответственно. Зона ε_{d2} связана с указанными в работе [15] значениями $\varepsilon \simeq 0.08$ и $\varepsilon \simeq 0.1$, в которых фиксируется режим сильной фазовой синхронизации. Изучение содержательного смысла областей ε_{d4} и ε_{d5} — предмет наших дальнейших исследований.

Заключение

В настоящей работе получил дальнейшее развитие метод диагностирования синхронизации хаотических колебаний, основанный на так называемой Т-синхронизации [18,29,30]. Существенным отличием рассмотренного подхода от аналогов является способность разработанного инструментария количественно анализировать характеристики временной структуры синхронизации нелинейных систем [18] через перемежаемость [16,17]. Кроме того, в отличие от подавляющего большинства существующих методов подход на основе Т-синхронизации может быть с успехом применен для исследования многомерных систем, состоящих из двух и более связанных неидентичных осцилляторов, в том числе и их многомерных решеток с произвольной топологией.

В настоящей работе впервые демонстрируется применение Т-синхронизации в аспекте исследования систем с фазовой синхронизацией [14] и синхронизацией временных масштабов [15]. Причем в качестве изучаемого примера намеренно выбрана система из двух неидентичных осцилляторов Рёсслера [33] с аттракторами с плохо обусловленной фазой [34]. Из совокупности полученных результатов следует, что Т-синхронизация в исследуемой системе начинает устойчиво диагностироваться ранее, чем обнаруживается порог возникновения фазовой синхронизации [34] и/или синхронизации временных масштабов [15].

При этом анализ временной структуры синхронизации посредством введенных в работе характеристик (спектральная плотность и энтропия структуры синхронных доменов) оказывается весьма чувствительным инструментом, позволяющим обнаруживать негрубость режима синхронизации и наличие бифуркационных смен режимов и/или характера синхронизации. Кроме того, инструментарий на основе символического СТQ-анализа позволяет проводить комплексное исследование синхронизма хаотических колебаний, включая обнаружение запаздывания между системами и инверсные эффекты между их фазовыми переменными.

Следует также указать на основные недостатки предложенного подхода к диагностированию синхронизации хаотических колебаний. Метод неспособен дифференцировать и определять тип бифуркационных изменений аттрактора [26] и качественный характер режима синхронизации. Отметим, что устранение данных недостатков является предметом наших дальнейших исследований.

В заключение отметим, что рассмотренный подход, основанный на положениях символического СТQ-анализа [23,24], может быть применен для анализа экспериментальных данных, поскольку не требует каких-либо априорных знаний об изучаемой системе. Более того, инвариантность символического анализатора к сдвигам и растяжениям фазовых траекторий [24] позволяет исследовать синхронизацию сильно нестационарных систем. Вполне возможно, это позволит эффективно применять предложенную методику для анализа многомерных временных рядов, порождаемых физическими и техническими [1,2–4,5,19], физиологическими и биологическими [20,21], финансовыми [22,31,32] и другими системами.

Автор признателен рецензенту за ценные замечания, способствовавшие существенному улучшению качества работы.

Список литературы

- [1] *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences. Cambridge University Press, 2001.
- [2] *Boccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., Zhou C.* // Phys. Rep. 2002. Vol. 366. P. 1.
- [3] *Аргонов В.Ю., Пранц С.В.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 80. С. 260.
- [4] *Кузнецов С.П.* // УФН. 2011. Т. 181.С. 121.
- [5] *Напартович А.П., Сухарев А.Г.* // ЖЭТФ. 1999. Т. 115. С. 1593.
- [6] *Cuomo K.M., Oppenheim A.V.* // Phys. Rev. Lett. 1993. Vol. 71. P. 65.
- [7] *Larger L., Goedgebuer J.-P.* // C.R. Physique. 2004. Vol. 5. P. 609.
- [8] *Planat M.* // Neuroquantology. 2004. Vol. 2. P. 292; arXiv:quant-ph/0403020.
- [9] *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* // Phys. Rev. E. 1996. Vol. 53. P. 4528.
- [10] *Pecora L.M., Carroll T.L.* // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 64. P. 821.
- [11] *Liu W., Qian X., Yang J.* et al. // Phys. Lett. A. 2006. Vol. 354. P. 119.
- [12] *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* // Phys. Rev. Lett. 1997. Vol. 78. P. 4193.
- [13] *Анищенко В.С., Постнов Д.Э.* // Письма в ЖТФ. 1988. Т. 14. С. 569.
- [14] *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 2000. Vol. 10. P. 2291.
- [15] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* // Письма в ЖЭТФ. 2004. Т. 79. С. 391.
- [16] *Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А.* и др. // УФН. 1987. Т. 152. С. 3.
- [17] *Mandelbrot B.B.* // J. Fluid Mech. 1974. Vol. 62. P. 331.

- [18] Макаренко А.В. // ЖЭТФ. 2015. Т. 147. С. 1053.
- [19] Брур Х.В., Дюмортье Ф., Стрин С., Такенс Ф. Структуры в динамике. М. Ижевск: ИКИ, 2003.
- [20] Борисов С.В., Каплан А.Я., Горбачевская Н.Л., Козлова И.А. // Физиология человека. 2005. Т. 31. С. 1.
- [21] Porta A., D'Addio G., Pinna G.D., Maestri R. et al. // Computers in Cardiology. 2005. P. 575.
- [22] Tino P., Schittenkopf C., Dorffner G. // Pattern Analysis & Applications. 2001. Vol. 4. P. 283.
- [23] Макаренко А.В. // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. С. 1.
- [24] Макаренко А.В. // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. 2012. Т. 52. С. 1248.
- [25] Боуэн Р. Методы символической динамики. Сб. статей. Пер. с англ. М.: Мир, 1979.
- [26] Gilmore R., Lefranc M. The topology of chaos. Wiley-Interscience, 2002.
- [27] Hsu C.S. Cell-to-Cell Mapping: A method of Global Analysis for Nonlinear Systems, NY: Springer-Verlag, 1987.
- [28] Dellnitz M., Hohmann A. // Numerische Mathematik. 1997. Vol. 75. P. 293.
- [29] Макаренко А.В. // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. С. 53.
- [30] Макаренко А.В. // Наноструктуры. Мат. физика и модел. 2013. Т. 8. С. 21.
- [31] Makarenko A.V. // Symbolic CTQ-analysis — a new method for studying of financial indicators. International Conference „Advanced Finance and Stochastics“. Moscow, 24–28 June 2013. Steklov Mathematical Institute. P. 63.
- [32] Makarenko A.V. // Generalized synchronization of multidimensional chaotic systems in terms of symbolic CTQ-analysis. The 8th Chaotic Modeling and Simulation International Conference. Paris 26–28 May 2015, ISAST, Institute Henri Poincare. P. 77–78.
- [33] Rossler O.E. // Phys. Lett. A. 1976. Vol. 57. P. 397.
- [34] Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J. et al. // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. P. 264102-1.
- [35] Леман Э. Проверка статистических гипотез. М.: Наука, 1979.