

К теории нелинейной теплопроводности

© С.О. Гладков, С.Б. Богданова

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),
125993 Москва, Россия
e-mail: sglad@newmail.ru, sonjaf@list.ru

(Поступило в Редакцию 14 апреля 2015 г.)

Из общих принципов построения инвариантного по отношению к операции инверсии $I(\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r})$ функционала Q феноменологическим путем получено нелинейное дифференциальное уравнение теплопроводности и проанализирована динамика эволюции температуры в нестационарном случае. Предложенная методика позволила выявить некоторые общие закономерности физического поведения подобного рода систем для описания необратимых явлений в процессах самоорганизации. Отмечено, что подобная ситуация может быть реализована, как пример, в сильно неоднородных структурах при стохастичности внутренних потоков тепла.

Введение

Важнейшее значение при исследовании эволюционного характера развития тех или иных физических процессов играет оценка их детерминированности. Все механические и квантово-механические системы подчинены обратимым во времени (они инвариантны по отношению к операции инверсии времени ($t \rightarrow -t$)) уравнениям движения. В первом случае это второй закон Ньютона, а во втором — уравнение Шредингера. Именно по этой причине с их помощью может описываться лишь обратимая во времени динамика. Что касается необратимых процессов, скажем, теплопроводности или диффузии, то по Пригожину [1] их характеризует отсутствие так называемой „стрелы времени“, с математической точки зрения означающее просто интервал $t \in (-\infty, +\infty)$. Именно в этом заключается существенное отличие математического описания обратимых и необратимых явлений, когда у изучаемой динамической системы либо есть прошлое (обратимость), либо его нет (необратимость).

Надо сказать, что характерной особенностью, присущей всем обратимым процессам, свойственно такое понятие, как динамическая устойчивость равновесного состояния, означающее, что система при различных возмущениях „скатывается“ в некоторую потенциальную „яму“ устойчивого положения равновесия. Для устойчивого положения равновесия (механической или квантово-механической модели) в случае большого числа описываемых объектов (скажем, система, состоящая из N частиц) не имеет значение количество траекторий (траектория может быть и одна), а принципиален лишь факт прихода объекта в конечную (равновесную) точку фазового пространства p_0, q_0 . Для одной частицы это реальная точка, а для N частиц — это масштабно увеличенная точка p_0, q_0 , определяемая теперь уже не только вероятностным характером движения, но и „объемом“ точки p_0, q_0 , а именно некоторой локальной областью фазового объема $\Delta\Gamma_0$, куда, согласно эргодической гипотезе, сходятся все траектории по прошествии достаточно большого, но конечного интервала

времени Δt , и это несмотря на то, что движение всей системы в целом весьма чувствительно к начальным условиям. Совершенно иное дело, если речь заходит о необратимых процессах. Система, выходя из положения равновесия и совершая в общем случае инфинитное движение, попадет куда угодно, но только не в область, близкую к начальной области фазового объема $\Delta\Gamma_0$, из которого началось движение.

Несмотря на, казалось бы, установленные закономерности в поведении обратимых и необратимых процессов существуют и некоторые исключения из правил. Действительно, при описании чисто диссипативных явлений на больших положительных временах на первое место выходит флуктуационное поведение параметров (скажем, температуры и плотности), когда все релаксационные процессы уже завершились — равновесие достигнуто, а система продолжает совершать хаотическое блуждание во всей фазовой области (причем это блуждание длится до бесконечности), не подчиняясь при этом законам детерминированного хаоса [2,3], являясь чувствительной к начальным условиям, и описывая исключительно периодическое поведение параметров. Такой пример предложен, например, в работе [4] в случае однородной среды. Для неоднородно-распределенных в пространстве параметров ситуация кардинально меняется, и флуктуации „забиваются“ этой неоднородностью, а вся система „скатывается“ в некоторое положение устойчивого равновесия [5].

Постановка задачи и ее решение

В настоящей работе мы рассмотрим пример нелинейной самоорганизации необратимого процесса и выясним некоторые закономерности развития температуры в рамках нестационарного и нелинейного уравнений теплопроводности, описывающих динамику на полуинтервале времен $t \in [0, +\infty]$, когда эти уравнения можно строго получить из вариационного принципа, воспользовавшись феноменологическим подходом, примененным, напри-

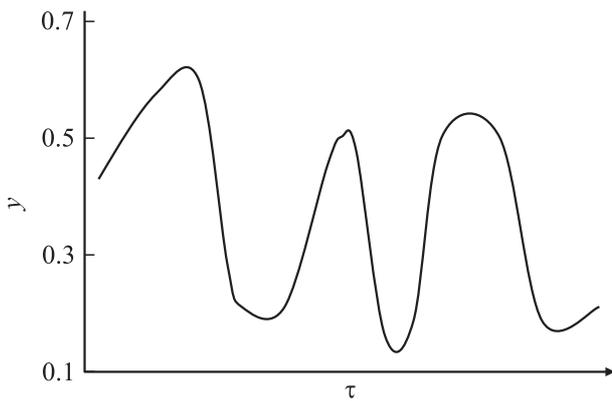


Рис. 1. Схематическое изображение чисто осциллирующего поведения температуры в линейном случае „нерезонансного“ наложения внутренних тепловых потоков неоднородной структуры.

мер, в работах [6,7]. С целью получения общего вида нелинейного уравнения теплопроводности, описывающего, кстати сказать, любые сильно неоднородные системы, воспользуемся простым феноменологическим подходом и запишем соответствующее феноменологическое уравнение „движения“ для температуры в виде $\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\sigma Q}{\sigma T}$, где функционал Q введем с помощью следующего инвариантного выражения

$$Q(T) = \int_{t_0}^{t_1} dt \int_V \left\{ \frac{\chi}{2} (\nabla T)^2 + \frac{\mathbf{a}_1}{3} (\nabla T)^3 + \frac{a_2}{12} (\nabla T)^4 + \dots + \frac{b_1}{2} \dot{T}^2 (\nabla T)^2 + \frac{b_2}{2} \dot{T}^2 + \frac{b_3}{2} \ddot{T}^2 + \dots \right\} d^2x, \quad (1)$$

где параметры \mathbf{a}_1, a_2, \dots и b_1, b_2, b_3, \dots — некоторые в общем случае функции, зависящие от координат и времени, а $\chi(\mathbf{r}, t)$ — коэффициент температуропроводности неоднородной и сильно неравновесной среды.

Для получения искомого уравнения можно воспользоваться определением вариационной производной в виде

$$\frac{\sigma J}{\sigma y} = F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots,$$

где

$$F_y = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}, \quad F_{y''} = \frac{\partial F}{\partial y''}, \quad \dots,$$

а функционал задан соотношением

$$J\{y\} = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y', y'', \dots) dx,$$

вполне аналогично тому, как похожие уравнения находятся в монографии [8]. Итак, варьируя Q по температуре T , получаем следующее нелинейное уравнение для

эволюции температуры в пространстве и во времени:

$$\begin{aligned} \dot{T} = & \chi \Delta T + \mathbf{a}_1 \nabla T \Delta T + a_2 (\nabla T)^2 \Delta T^2 + \dots - b_1 \dot{T} (\nabla T)^2 \\ & - b_1 \dot{T}^2 \Delta T - 4b_1 \dot{T} \nabla T \nabla \dot{T} - b_2 \ddot{T} + b_3 \ddot{\ddot{T}} + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Как видно из этого уравнения, нелинейные потоки тепла всегда имеют место в сильно неоднородных по составу структурах (скажем таких, как композиты или пористые среды), когда внутри тела происходят хаотические блуждания тепловых потоков, идущих из разных локальных точек внутренней области. При смешивании этих потоков может происходить своеобразный резонанс (так называемое явление синхронизации), приводящий, как увидим далее, к спонтанному повышению и осцилляциям внутренней температуры, несмотря на то что тело помещено в термостат (!). По прошествии, однако, некоторого достаточного промежутка времени температура всего образца в целом установится, равной температуре термостата. Проблема здесь заключается именно в том, чтобы подобную ситуацию смоделировать математически. Ответу на этот вопрос и посвящена настоящая работа.

Для решения уравнения (2) проведем ряд несколько упрощающих его вид действий. Положим сумму всех его членов, содержащих различные степени градиента температуры, равной сумме членов геометрической прогрессии. То есть запишем, что $\chi + \mathbf{a}_1 \nabla T + (\mathbf{a}_2 \nabla T)^2 + \dots = \frac{\chi}{1 + \mathbf{a} \nabla T}$, где \mathbf{a} — некоторый новый постоянный векторный параметр правильной размерности. Далее в целях еще одного модельного упрощения удобно перейти к конечно разностному уравнению, избавляясь от пространственных производных. Это можно сделать благодаря правилу $\mathbf{a} \nabla T = -\frac{a(T-T_0)}{\delta}$ и $\Delta T = -\frac{T-T_0}{\delta^2}$, где δ — толщина поверхностной части тела с термостатом, температура которого T_0 . Поскольку

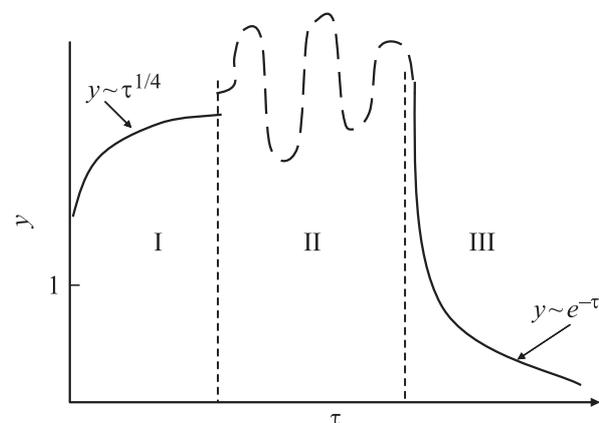


Рис. 2. Зависимости спонтанного повышения температуры (область I) внутри вещества благодаря нелинейному усилению суммарного теплового потока в стохастическом приближении. „Резонансное“ поведение температуры характерно для области II. Область III — стандартная картина спада внутреннего теплового потока в соответствии с законом Ньютона.

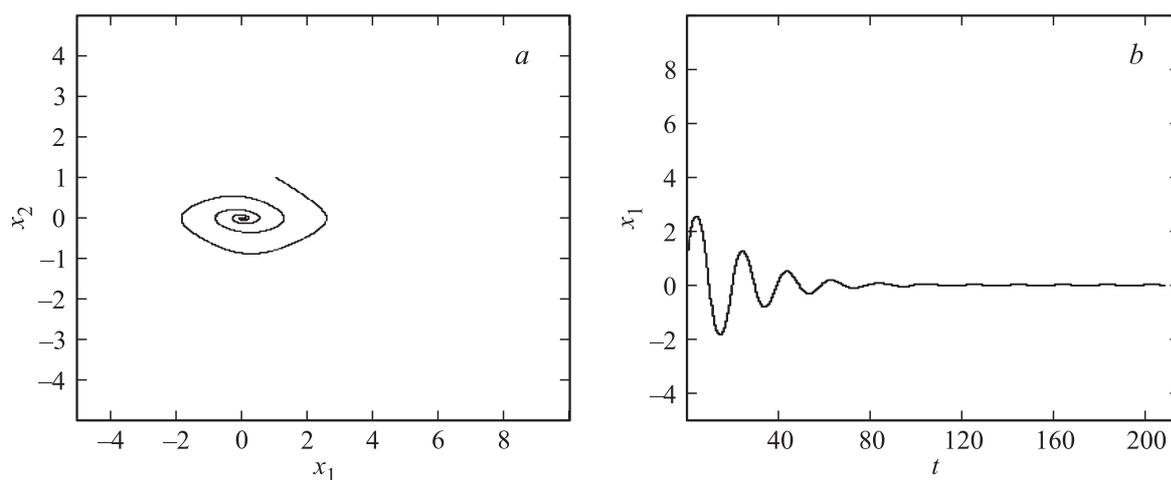


Рис. 3. *a* — фазовая траектория, полученная при $K_1 = 1$, $\lambda = 0.001$, $K_3 = 10$; *b* — график решения, полученный при $K_1 = 1$, $\lambda = 0.001$, $K_3 = 10$.

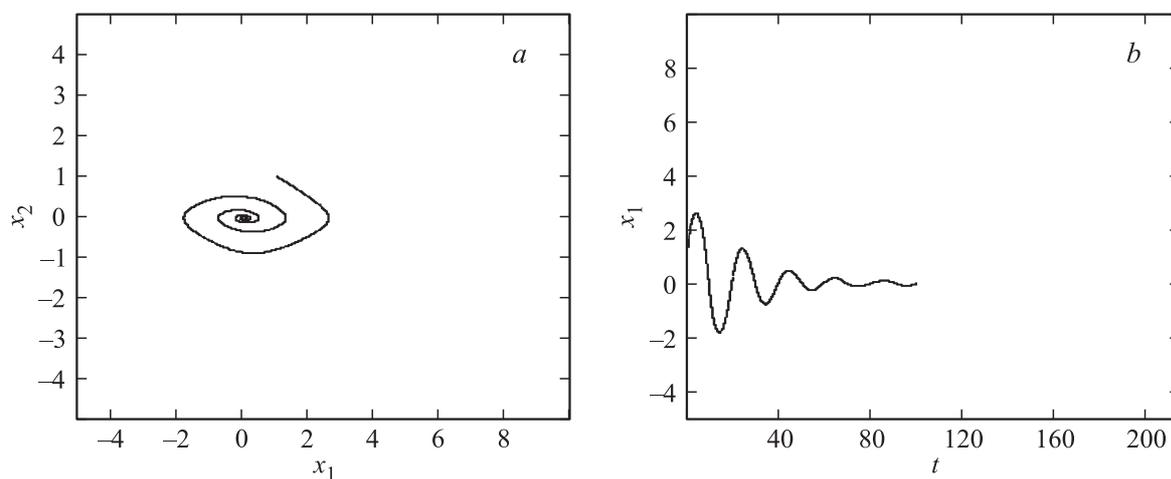


Рис. 4. *a* — фазовая траектория, полученная при $K_1 = 1$, $\lambda = 0.01$, $K_3 = 10$; *b* — график решения, полученный при $K_1 = 1$, $\lambda = 0.01$, $K_3 = 10$.

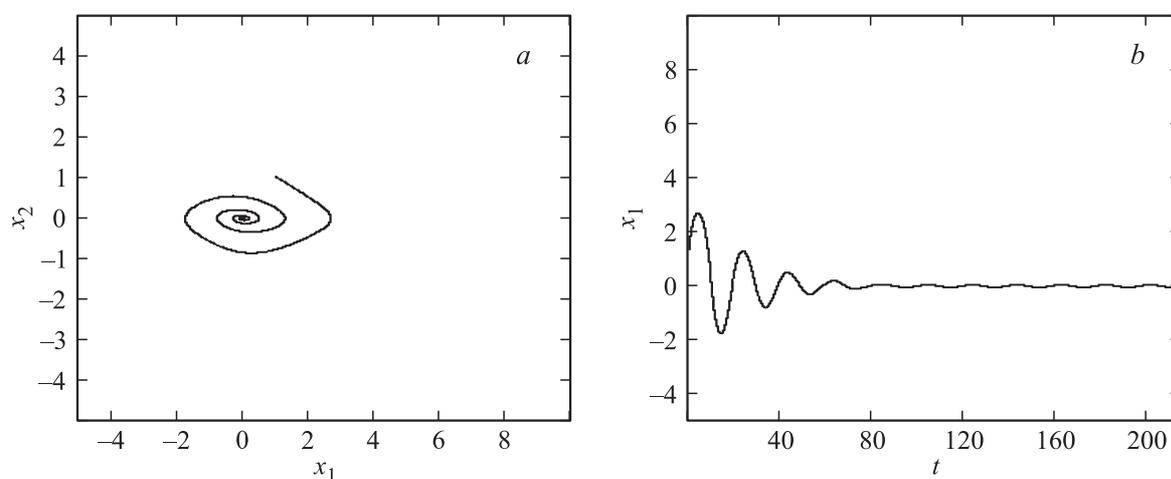


Рис. 5. *a* — фазовая траектория, полученная при $K_1 = 1$, $\lambda = 0.1$, $K_3 = 10$; *b* — график решения, полученный при $K_1 = 1$, $\lambda = 0.1$, $K_3 = 10$.

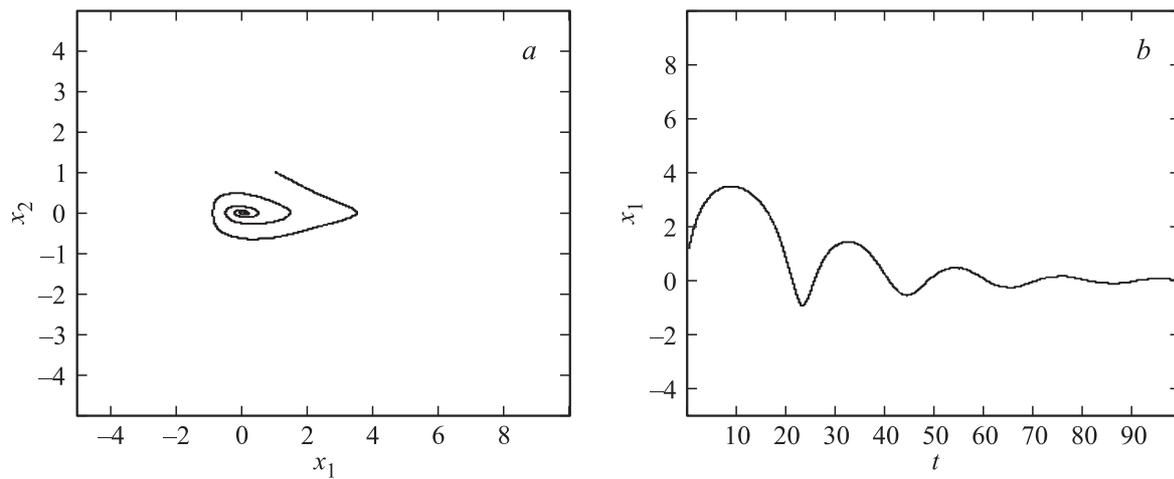


Рис. 6. *a* — фазовая траектория, полученная при $K_1 = 1$, $\lambda = 1$, $K_3 = 10$; *b* — график решения, полученный при $K_1 = 1$, $\lambda = 1$, $K_3 = 10$.

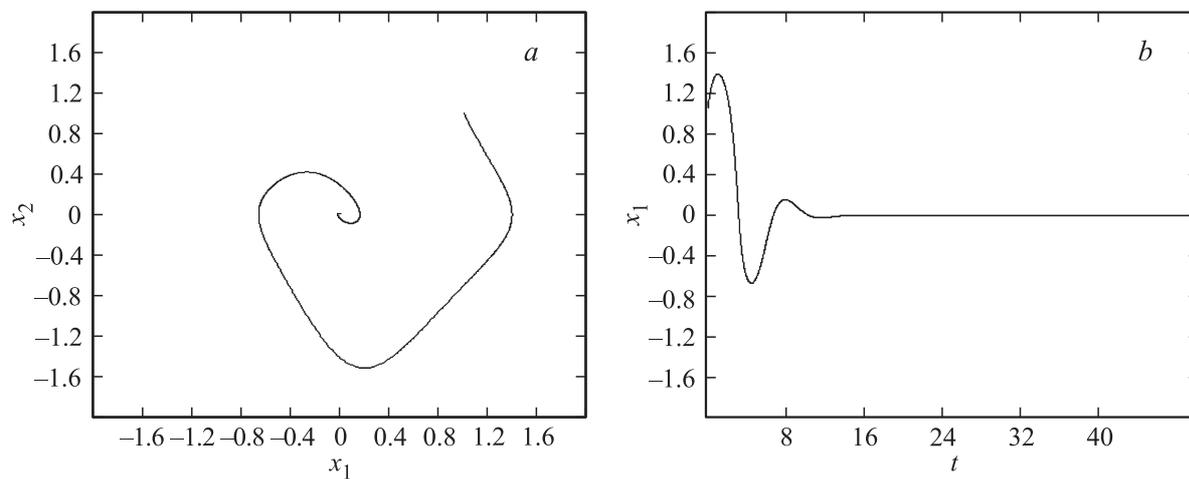


Рис. 7. *a* — фазовая траектория, полученная при $K_1 = 1$, $\lambda = 1$, $K_3 = 1$; *b* — график решения, полученный при $K_1 = 1$, $\lambda = 1$, $K_3 = 1$.

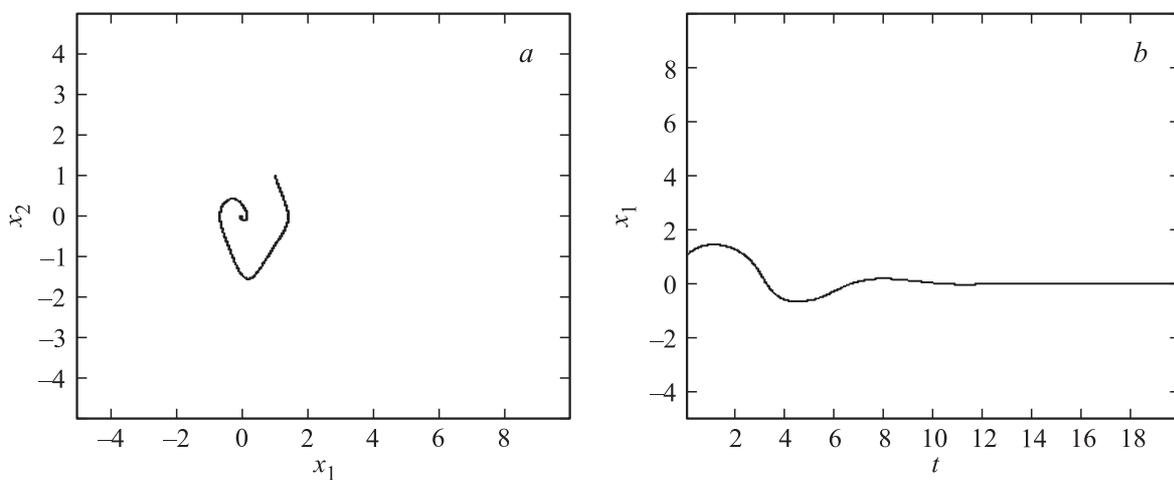


Рис. 8. *a* — фазовая траектория, полученная при $K_1 = 1$, $\lambda = 0.01$, $K_3 = 1$; *b* — график решения, полученный при $K_1 = 1$, $\lambda = 0.01$, $K_3 = 1$.

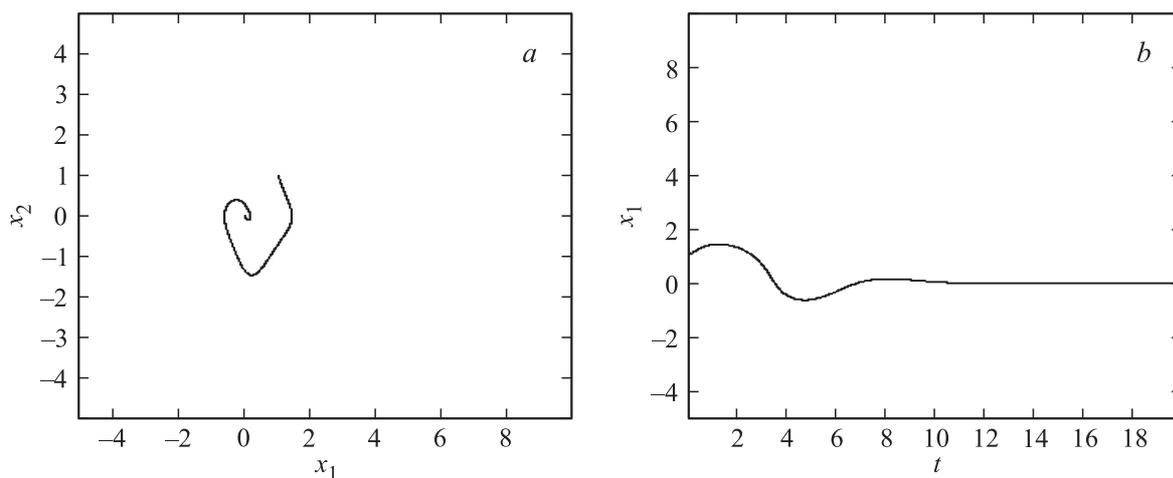


Рис. 9. *a* — фазовая траектория, полученная при $K_1 = 1, \lambda = 0.1, K_3 = 1$; *b* — график решения, полученный при $K_1 = 1, \lambda = 0.1, K_3 = 1$.

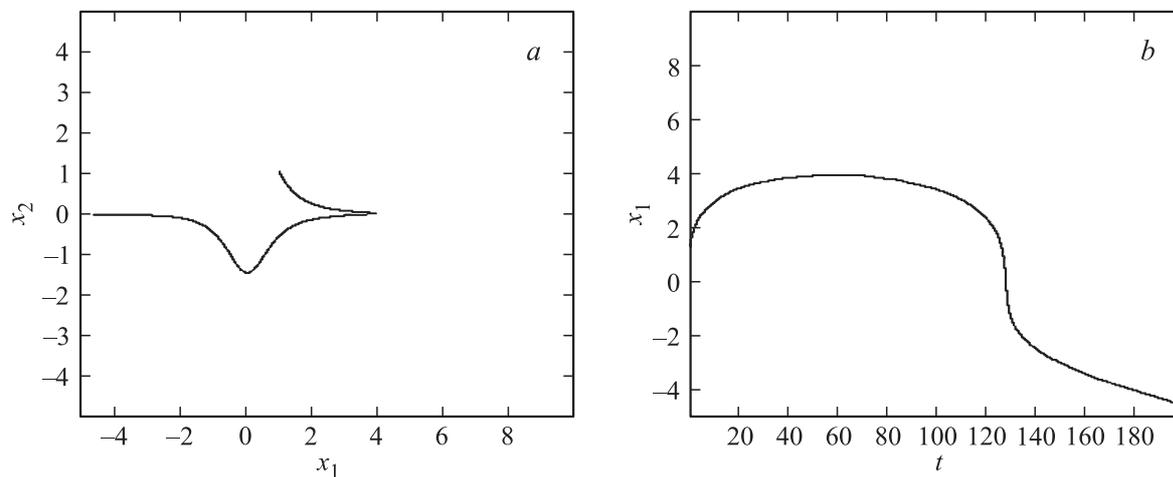


Рис. 10. *a* — фазовая траектория, полученная при $K_1 = 10, \lambda = 10, K_3 = 10$; *b* — график решения, полученный при $K_1 = 10, \lambda = 10, K_3 = 10$.

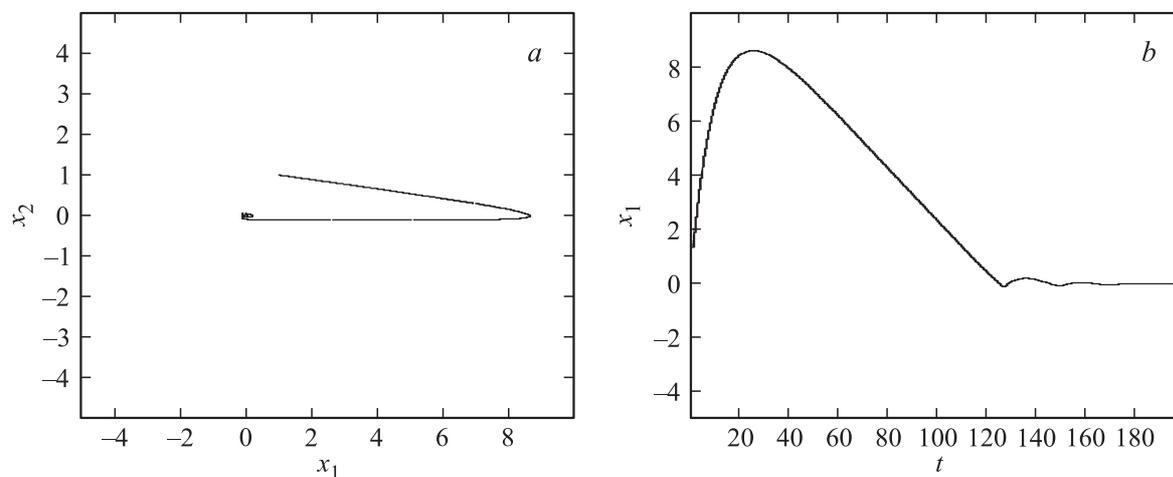


Рис. 11. *a* — фазовая траектория, полученная при $K_1 = 0.001, \lambda = 10, K_3 = 10$; *b* — график решения, полученный при $K_1 = 0.001, \lambda = 10, K_3 = 10$.

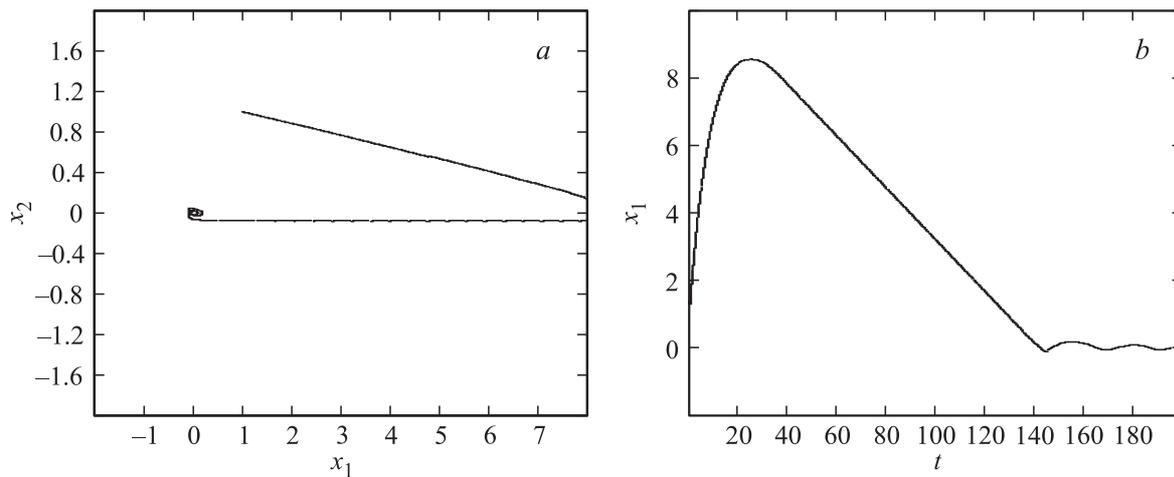


Рис. 12. *a* — фазовая траектория, полученная при $K_1 = 0.01$, $\lambda = 10$, $K_3 = 10$; *b* — график решения, полученный при $K_1 = 0.01$, $\lambda = 10$, $K_3 = 10$.

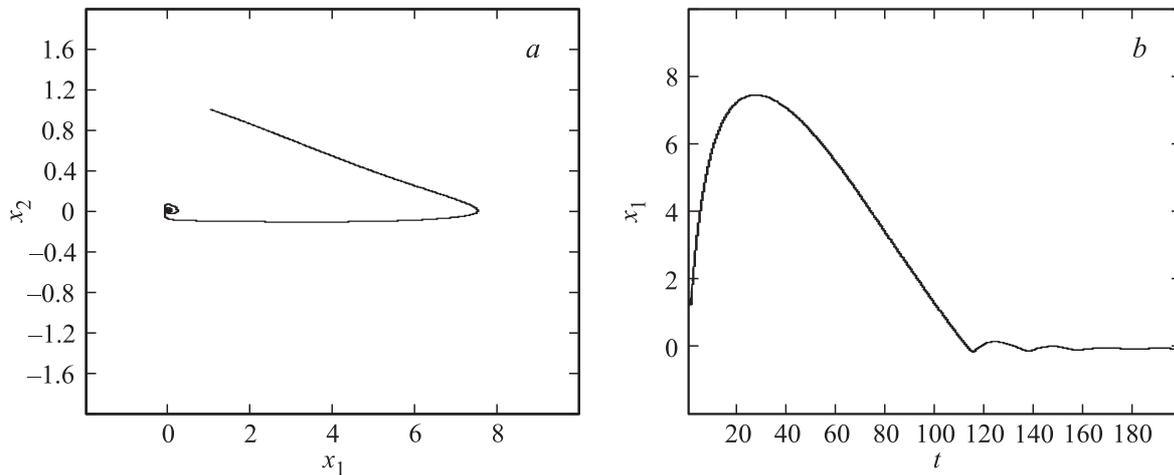


Рис. 13. *a* — фазовая траектория, полученная при $K_1 = 0.1$, $\lambda = 10$, $K_3 = 10$; *b* — график решения, полученный при $K_1 = 0.1$, $\lambda = 10$, $K_3 = 10$.

в результате этих формально-упрощающих манипуляций мы перешли к уравнению теплопередачи, то имеет смысл по традиции вместо теплопроводности χ ввести коэффициент теплоотдачи α по формуле $\alpha = \frac{\kappa}{\delta^2 c_p}$, где κ — коэффициент теплопроводности, c_p — изобарическая теплоемкость единицы объема всего неоднородного по объему тела. В итоге получается следующее, значительно более простое, но тем не менее сильно нелинейное дифференциальное уравнение произвольного четного порядка, описывающее динамику температуры в сильно неоднородных по составу структурах:

$$\begin{aligned} \dot{T} = & -\frac{\alpha(T - T_0)}{1 + \frac{\alpha}{\delta}(T - T_0)} - b_1 \ddot{T} \left(\frac{T - T_0}{\delta} \right) \\ & - 3b_1 \dot{T}^2 \frac{(T - T_0)}{\delta^2} - b_2 \ddot{T} + b_3 \ddot{\ddot{T}} + \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Полученное уравнение легко привести к безразмерному виду, вводя новую функцию $y = \frac{T - T_0}{T_0}$ и безразмерные параметры $\lambda_0 = \frac{\alpha T_0}{\delta}$, $K_1 = \frac{ab_1 T_0^3}{\delta^2}$, $K_2 = b_3 T_0$, $K_3 = b_2 T_0^2, \dots$, а также безразмерное время $\tau = \alpha t$. В результате находим, что

$$\dot{y} + (K_1 y^2 + K_3) \ddot{y} + 3K_1 y \dot{y}^2 - K_2 \ddot{\ddot{y}} + \frac{y}{1 + \lambda_0 y} + \dots = 0. \quad (4)$$

Начальные условия выберем следующими: $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 1$. Заметим, что первое условие отвечает начальному значению температуры $T(0) = 2T_0$ и дифференцирование в (4) теперь ведется по безразмерному времени τ . Подчеркнем, что для малых λ_0 и $K_{1,2}$ получается обычное ньютоновское уравнение теплообмена, когда скорость изменения температуры пропорциональна самой температуре. Действительно, в этом случае имеем

$\dot{y} + y = 0$. Его решение тривиально и $y(\tau) = y(0)e^{-\tau}$, где $y(0)$ — начальное значение y при $\tau = 0$. Что касается самого уравнения (4), то для любых значений параметров $K_{1,2}$ и λ_0 его так просто не решить и нам не удалось найти его аналитическое решение в общем случае за исключением некоторых частных. Численный же расчет позволяет определить зависимость $y(\tau)$ в широком диапазоне изменения параметров $K_{1,2,3}$ и λ_0 . В самом деле, если ввести шаг h и вместо производных перейти к конечно-разностным выражениям, а именно $\dot{y} = \frac{y_{n+1} - y_n}{h}$, $\ddot{y} = \frac{y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n}{h^2}$, то в пренебрежении производными высших порядков, начиная с четвертой, найдем

$$y_{n+2} = 2y_{n+1} - y_n - \frac{h^2}{Ky_n(1 + \lambda_0)} - \frac{3(y_{n+1} - y_n)^2}{y_n} - \frac{h(y_{n+1} - y_n)}{Ky_n^2}. \quad (5)$$

Численное решение приведенного итерационного уравнения оказалось найти не так просто, и поэтому мы остановимся на численных методах решения уравнения (4) для различных значений входящих в него параметров. Но прежде, мы наметим некоторые качественные решения уравнения (4). Действительно, как следует из (4) для малых y имеем $\dot{y} + K_2\ddot{y} + K_3\ddot{y} + y = 0$. Отсюда следует характеристическое уравнение $K_2k^4 + K_3k^2 + k + 1 = 0$. Решение этого алгебраического уравнения в случае, если $K_2 = \frac{27}{256}$, а $K_3 = 0$ есть $k_1 = -\frac{4}{3}$. Остальные три корня — мнимые, находящиеся из уравнения $k^3 - \frac{4k^2}{3} + \frac{16k}{9} + \frac{64}{9} = 0$. Таким образом, на фоне одного частного решения $y_1 = e^{-\frac{4\tau}{3}}$ должны существовать еще три осциллирующие решения $y_{2,3,4}$. Схематически суммарную зависимость $y(\tau)$ можно проиллюстрировать рис. 1 и 2. Надо попутно заметить, что физически такое поведение температуры в неоднородной по составу структуре вовсе не удивительно и, в принципе, было вполне ожидаемо в связи со стохастически меняющимися и накладывающимися друг на друга по времени потоками тепла в результате неоднородного флуктуационного перегрева различных локальных областей внутренней структуры. Подчеркнем, что подобное поведение температуры характерно именно в линейном приближении. Численный анализ уравнения (4) в ряде случаев иллюстрируют рис. 3–13. Надо сказать, что в сильно неоднородных средах, каковыми являются композиты и пористые вещества, поведение температуры является совсем нетривиальным и не имеющим ничего общего с линейными законами эволюции. Все дело здесь должно определяться „игрой“ тепловых потоков, хаотически ориентированных внутри гетерогенной среды и приводящих (по крайней мере такую возможность отбросить нельзя) к резонансному увеличению температуры в некоторые моменты времени. В этой связи наш подход ориентирован в первую очередь на модельное описание эволюции температуры в подобных структурах и является по сути

первым шагом в этом направлении. Численные оценки (рис. 3–13) показывают возможное временное поведение температуры в таких веществах и свидетельствуют о ее нетривиальной зависимости. Соответствие с нашими обозначениями таково $y \equiv x_1$, $y' \equiv x_2$, безразмерное время τ обозначено как t . Рис. 3–9 получены для фиксированных значений K_1, K_3 , рис. 10 — для фиксированных K_1, λ и рис. 11–13 — для фиксированных K_3, λ . Слева представлены фазовые траектории, справа — графики решения уравнения.

Заключение

Выделим основные моменты проведенного исследования.

1. Благодаря феноменологическому подходу оказалось возможным весьма наглядно привести точный вывод нелинейного уравнения теплопроводности в неоднородном и нестационарном случае для структур с хаотически разбросанными по ее основной матрице мелкодисперсными частицами, волокнами, зернами и т.д. Качественный анализ полученного уравнения позволил нам оценить нетривиальные закономерности самоорганизованного (в смысле экстремума вполне конкретного функционала) поведения температуры, учитывающего внутренние „резонансные“ потоки тепла.

2. Как показали численные решения уравнения (4) второго порядка, проиллюстрированные рис. 3–13, несмотря на, казалось бы, явно отсутствующую точку бифуркации, система может уходить на бесконечность благодаря неустойчивости решения. При этом ее поведение носит явно выраженный осциллирующий характер, как было предсказано выше в тексте.

Список литературы

- [1] *Nicolis G., Prigogine I.* Self — organization in Non-equilibrium Systems. NY: John Wiley and Sons, 1977. 491 p. (Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах. От диссипативных структур к упорядочению через флуктуации. М.: Мир, 1979. 512 с).
- [2] *Schuster H.G.* Deterministic Chaos. Weinheim: Physyk-Verlag, 1984. 220 p. (Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988. 253 с.).
- [3] *Schroeder M.R.* Number Theory in Science and Communication: With Applications in Cryptography, Physics, Digital Information, Computing, and Self-Similarity. 2nd enlarged ed. Berlin, NY: Springer, 1990. 374 p.
- [4] *Гладков С.О., Гладышев И.В.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 3. С. 1–8.
- [5] *Гладков С.О., Гладышев И.В.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 4. С. 1–5.
- [6] *Гладков С.О., Токарев А.М.* // ФГВ. 1990. Вып. . С. 30–38.
- [7] *Gladkov S.O.* Dielectric properties of porous media. NY: Springer, 2003. 261 p.
- [8] *Струков Б.А., Леванюк А.П.* Физические основы сегнетоэлектрических явлений в кристаллах. М.: Наука, 1983. 240 с.