

03

Электростатическая устойчивость поверхности слоя жидкости на цилиндрической смачиваемой твердой основе

© С.О. Ширяева, Д.Е. Леснугина, Н.А. Петрушов, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 31 марта 2015 г.)

В аналитических расчетах первого порядка малости по безразмерному возмущению свободной поверхности решена задача расчета волнового движения в цилиндрическом слое идеальной электропроводной жидкости на поддерживаемом при постоянном электростатическом потенциале твердом стержне и реализации электростатической неустойчивости свободной поверхности слоя. Выведено дисперсионное уравнение. Показано, что диапазон неустойчивых волн зависит только от величины электрического поля у свободной поверхности, а инкременты неустойчивости капиллярных волн с уменьшением толщины слоя жидкости снижаются. Влияние твердого стержня становится заметным лишь при значениях его радиуса порядка толщины слоя жидкости.

Хорошо известно и из общефизических соображений понятно, что энергопотери на высоковольтных линиях электропередач во время дождя многократно увеличиваются, достигая десятков процентов от передаваемой энергии. Эти потери могут быть связаны как с коронным разрядом с гребней капиллярных волн на поверхности жидкого слоя [1,2], так и с реализацией электростатической неустойчивости свободной поверхности жидкости [3,4]. При этой неустойчивости с боковой поверхности сильно заряженной струи выбрасываются существенно более тонкие струйки, распадающиеся на отдельные капельки, как это зафиксировано в [5]. Ранее такая неустойчивость наблюдалась в [6,7]. Этот вид неустойчивости связан с неустойчивостью деформационной моды струи [3,4]. В основном в научной литературе содержатся данные об исследовании трех первых мод осцилляций свободной поверхности струй. Если обозначить азимутальное число струи буквой m , то $m = 0$ соответствует осесимметричной моде, $m = 1$ — изгибной моде, $m = 2$ — деформационной. Они возбуждаются последовательно по мере увеличения электрического потенциала струи [3,4].

В связи со сказанным в настоящей работе представляется интерес рассчитать устойчивость капиллярных волн с $m = 2$ на поверхности слоя жидкости, покрывающего поддерживаемый при высоком электрическом потенциале металлический провод. Конечно, реальные ситуации лишь косвенно моделируются подобной идеализацией, но определенные выводы можно будет сделать.

Этой проблеме и посвящена настоящая работа.

Постановка задачи

Будем решать задачу о расчете устойчивости капиллярных волн на цилиндрической заряженной поверхности бесконечной струи с радиусом R идеальной

несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения σ . Примем, что внутри струи помещен электропроводный стержень с радиусом r_0 . Задачу будем рассматривать в системе координат, движущейся с несущей скоростью струи. В такой системе координат поле скоростей будет связано только с волновыми движениями свободной поверхности струи. Будем пользоваться цилиндрической системой координат, ось Z которой совпадает с осью струи, и полагать, что заряд на поверхности струи обусловлен тем, что стержень внутри струи поддерживается при постоянном электрическом потенциале Φ_0 . В итоге это обеспечивает наличие в окружающем струю пространстве радиального электрического поля $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \equiv E_0(\mathbf{r})\mathbf{e}_r$.

Уравнение свободной поверхности струи, возмущенной тепловым капиллярным волновым движением весьма малой амплитуды, запишем в виде

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - R - \xi(\varphi, z, t) = 0,$$

где $\xi(\varphi, z, t)$ — возмущение поверхности струи: $|\xi(\varphi, z, t)/R| \ll 1$, представляющая собой суперпозицию большого количества капиллярных волн. Такое возмущение (порождаемое уже тепловым движением молекул [8]) имеет амплитуду $\sim \sqrt{\kappa T/\sigma}$ (κ — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура). Для любых жидкостей от сжиженных газов до расплавленных металлов величина $\sqrt{\kappa T/\sigma}$, определяющая амплитуды таких волн, меньше ангстрема, поэтому для струй любых реальных радиусов соотношение $|\xi(\varphi, z, t)/R| \ll 1$ будет выполняться. В связи со сказанным волны тепловой природы, как правило, называют волнами бесконечно малой амплитуды. Подобная идеализация, естественная на пределе применимости модели жидкости как сплошной среды, широко используется в линейных по малой амплитуде аналитических расчетах, когда основным объ-

ектом, подлежащим исследованию, является дисперсионное уравнение.

Выпишем основные уравнения гидродинамики идеальной несжимаемой жидкости [9]: уравнение неразрывности и уравнение Эйлера для поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ и поля давлений $P(\mathbf{r}, t)$:

$$\operatorname{div}\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P(\mathbf{r}, t). \quad (2)$$

Напряженность электрического поля \mathbf{E} в окрестности искаженной капиллярным волновым движением бесконечно малой амплитуды [8] поверхности струи определяется уравнениями

$$\operatorname{div}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla\Phi(\mathbf{r}, t), \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (3)$$

где $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал электрического поля.

Система граничных условий состоит из условия непротекания на поверхности стержня

$$r = r_0: \quad U_n = (\mathbf{n}, \mathbf{U}) = U_r = 0, \quad (4)$$

условия убывания напряженности электрического поля на бесконечности

$$r \rightarrow \infty: \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad \nabla\Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad (5)$$

условий на свободной поверхности струи $r = R + \xi(\varphi, z, t)$: кинематического

$$\frac{dF(\mathbf{r}, t)}{dt} = 0, \quad (6)$$

динамического

$$P(\mathbf{r}, t) - P_0 + P_E(\mathbf{r}, t) - P_\sigma(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (7)$$

$$P_E(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t)}{8\pi} = \frac{(-\nabla\Phi(\mathbf{r}, t))^2}{8\pi},$$

$$P_\sigma(\mathbf{r}, t) = \sigma \operatorname{divn}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) = \frac{\nabla F}{|\nabla F|},$$

условия эквипотенциальности поверхности струи

$$\Phi = \Phi_S, \quad (8)$$

условия сохранения заряда на длине струи, равной длине волны

$$\int_S (\mathbf{E}, \mathbf{n}) dS = 4\pi\chi\lambda, \quad (9)$$

$$S \equiv \{r = 1 + \xi(\varphi, z, t), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad z_0 \leq z \leq z_0 + \lambda\},$$

где $P(\mathbf{r}, t)$ — давление в струе, P_0 — атмосферное давление, $P_E(\mathbf{r}, t)$ — давление электрических сил, $P_\sigma(\mathbf{r}, t)$ — давление капиллярных сил, $\mathbf{n}(\mathbf{r}, t)$ — вектор нормали к свободной поверхности, Φ_S — постоянный вдоль поверхности струи потенциал, χ — равновесное значение поверхностной плотности заряда, которая

определяется нормальной компонентой напряженности электрического поля у поверхности струи [10]

$$\chi \equiv \frac{E_n}{4\pi}.$$

Все расчеты будем проводить в безразмерных переменных, в которых $\rho = R = \sigma = 1$. При этом все остальные физические величины будут выражены в долях своих характерных размеров

$$[U] = \sqrt{\frac{\sigma}{\rho R}}, \quad [P] = \frac{\sigma}{R}, \quad [t] = \sqrt{\frac{\rho R^3}{\sigma}}, \quad [E] = \sqrt{\frac{\sigma}{R}}.$$

За всеми безразмерными величинами сохраним прежние обозначения. С точки зрения математики решаемая задача полностью эквивалентна задаче о сплошной струе [9]. Меняется только одно граничное условие: условие обращения в нуль нормальной компоненты поля скоростей на оси струи заменяется условием обращения в нуль нормальной компоненты поля скоростей на поверхности твердого стержня.

Линеаризация и скаляризация задачи

Для решения задачи воспользуемся моделью потенциального течения. Поле скоростей выразится через гидродинамический потенциал $\psi(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \nabla\psi(\mathbf{r}, t).$$

Тогда уравнение неразрывности (1) преобразуется к следующему виду:

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0.$$

Решать задачу будем асимптотическим методом, в качестве малого параметра примем модуль максимума безразмерной амплитуды возмущения $\varepsilon \sim |\max \xi| \ll 1$. Так как поправка к электростатическому потенциалу и гидродинамическому потенциалу вызвана наличием малого возмущения на поверхности струи, справедливо считать, что $\Phi^{(1)} \sim \psi^{(1)} \sim \xi \sim \varepsilon$. Решения для формы возмущения, гидродинамического потенциала, давлений и электростатического потенциала будем искать в виде разложения по малому параметру с точностью до слагаемых порядка $\sim \varepsilon$ [11]:

$$\xi(\varphi, z, t) = \varepsilon \xi^{(1)}(\varphi, z, t) + O(\varepsilon^2),$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \varepsilon \psi^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2),$$

$$P(\mathbf{r}, t) = P^{(0)}(\mathbf{r}) + \varepsilon P^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2),$$

$$P_\sigma(\mathbf{r}, t) = P_\sigma^{(0)} + \varepsilon P_\sigma^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2),$$

$$P_E(\mathbf{r}, t) = P_E^{(0)} + \varepsilon P_E^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2),$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi^{(0)}(\mathbf{r}) + \varepsilon \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^2),$$

где верхний индекс означает порядок малости соответствующей величины. Подстановка разложений (10) в (1)–(9) позволяет разбить задачу на две задачи нулевого и первого порядков малости.

Задача нулевого порядка малости

Уравнения задачи нулевого порядка малости описывают невозмущенную струю

$$\Delta\Phi^{(0)}(\mathbf{r}) = 0, \quad \nabla\Phi^{(0)}|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \Phi^{(0)}|_{r=1} = \Phi_S,$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} \partial_r \Phi^{(0)}|_{r=1} d\varphi dz = 2\pi\chi\lambda,$$

$$P^{(0)} - P_0 + P_E^{(0)} - P_\sigma^{(0)} = 0, \quad P_E^{(0)} = 2\pi\chi^2, \quad P_\sigma^{(0)} = 1.$$

Решение задачи нулевого порядка малости позволяет определить равновесное гидродинамическое давление $P^{(0)}$ и электростатический потенциал поля вокруг невозмущенной струи

$$P^{(0)} = P_0 + 1 - 2\pi\chi^2, \quad \Phi^{(0)}(r) = -4\pi\chi \ln r + \Phi_S. \quad (11)$$

Задача первого порядка малости

Задача первого порядка малости имеет вид

$$\Delta\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (12)$$

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \left. \frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0, \quad (13)$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial r} = \frac{\partial\xi(\varphi, z, t)}{\partial t}, \quad (14)$$

$$P^{(1)}(\mathbf{r}, t) + P_E^{(1)}(\mathbf{r}, t) - P_\sigma(\varphi, z, t) = 0, \quad (15)$$

$$P^{(1)}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial\psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t},$$

$$P_\sigma^{(1)}(\varphi, z, t) = -\xi(\varphi, z, t) - \frac{\partial^2\xi(\varphi, z, t)}{\partial\varphi^2} - \frac{\partial^2\xi(\varphi, z, t)}{\partial z^2},$$

$$P_E^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{8\pi} \left(\xi(\varphi, z, t) \frac{\partial(\nabla\Phi^{(0)})^2}{\partial r} + 2(\nabla\Phi^{(0)}) \left(\nabla\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) \right) \right),$$

$$r = 1; \quad \Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \xi(\varphi, z, t) \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r} = 0, \quad (16)$$

$$-\frac{1}{4\pi} \int_{z_0}^{z_0+\lambda} \int_0^{2\pi} r \left(\xi(\varphi, z, t) \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r} \right) d\varphi dz = 0. \quad (17)$$

Решения уравнений Лапласа с граничными условиями (12) и (13) в цилиндрических координатах имеют вид

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) = K_m(kr)A(t) \cos(m\varphi) \exp(ikz) + \text{с.с.}, \quad (18)$$

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \left(\frac{I_m(kr)}{I'_m(kr_0)} - \frac{K_m(kr)}{K'_m(kr_0)} \right) B(t) \cos(m\varphi) \exp(ikz) + \text{с.с.}, \quad (19)$$

$I_m(kr)$ и $K_m(kr)$ — модифицированные цилиндрические функции Бесселя первого и второго рода, аббревиатура

„с.с.“ — означает сопряженные, комплексно сопряженные к выписанным. Здесь и далее штрих у функции означает производную по аргументу.

Исходя из уравнения (14) решение для формы поверхности следует искать в виде

$$\xi(\varphi, z, t) = \alpha(t) \cos(m\varphi) \exp(ikz) + \text{с.с.} \quad (20)$$

Подставив проекты решений (18)–(20) в уравнения (14) и (16), выразим коэффициенты $B(t)$ и $C(t)$ через $\alpha(t)$

$$A(t) = \frac{4\pi\chi}{K_m(k)} \alpha(t), \quad (21)$$

$$B(t) = \frac{I'_m(kr_0)K'_m(kr_0)}{kI'_m(k)K'_m(kr_0) - kK'_m(k)I'_m(kr_0)} \alpha'(t). \quad (22)$$

Поставляя решения (18)–(20) с учетом соотношений (21) и (22) в динамическое условие первого порядка малости (15), получим для $m = 2$ эволюционное уравнение относительно амплитуды возмущения $\alpha(t)$

$$\frac{I_2(k)K'_2(kr_0) - K_2(k)I'_2(kr_0)}{kI'_2(k)K'_2(kr_0) - kK'_2(k)I'_2(kr_0)} \alpha''(t) + \left(3 + k^2 + 4\pi\chi^2 \left(1 + \frac{kK'_2(k)}{K_2(k)} \right) \right) \alpha(t) = 0. \quad (23)$$

Решение полученного эволюционного уравнения (23) имеет вид

$$\alpha(t) = a \exp(\pm i\omega t), \quad (24)$$

где ω — частота (в общем случае комплексная), определяемая дисперсионным уравнением

$$\omega^2 = \left(3 + k^2 + w \left(1 + \frac{kK'_2(k)}{K_2(k)} \right) \right) \times \frac{kI'_2(k)K'_2(kr_0) - kK'_2(k)I'_2(kr_0)}{I_2(k)K'_2(kr_0) - K_2(k)I'_2(kr_0)}, \quad (25)$$

где $w \equiv 4\pi\chi^2$ — полевой параметр, характеризующий внешнее радиальное электростатическое поле и устойчивость свободной поверхности жидкости струи по отношению к его давлению.

Решение (20) с учетом (24) имеет вид бегущих волн. Будем рассматривать волну, бегущую в положительном направлении оси OZ . При этом функция, описывающая возмущение свободной поверхности струи, будет иметь вид

$$\xi(z, \varphi, t) = a \cos(2\varphi) \exp(ikz - i\omega t). \quad (26)$$

Из выражения (26) следует, что если $\omega^2 > 0$, следовательно, ω — вещественная, а функция ξ гармонически зависит от времени. Если $\omega^2 < 0$, а функция ξ зависит от времени экспоненциально $\xi \sim \exp(\mp\gamma t)$. Экспонента с отрицательным показателем $\exp(-\gamma t)$ быстро затухает, а с положительным показате-

лем $\exp(\gamma t)$ растет и приводит к реализации неустойчивости, инкремент которой определится соотношением

$$\gamma \equiv |\text{Im}\omega| \equiv \left| \text{Im} \left[\sqrt{\left(3 + k^2 + w \left(1 + \frac{kK_2'(k)}{K_2(k)} \right) \right) \frac{kI_2'(k)K_2'(kr_0) - kK_2'(k)I_2'(kr_0)}{I_2(k)K_2'(kr_0) - K_2(k)I_2'(kr_0)}} \right] \right|.$$

Условие $\omega^2 = 0$ разграничивает устойчивые и неустойчивые решения.

Анализ результатов

На рис. 1, *a* приведены зависимости квадрата частоты ω^2 для деформационной моды (при $m = 2$) от волнового числа k при разных значениях радиуса стержня r_0 и фиксированном закритическом значении полевого параметра w (критическое значение полевого параметра,

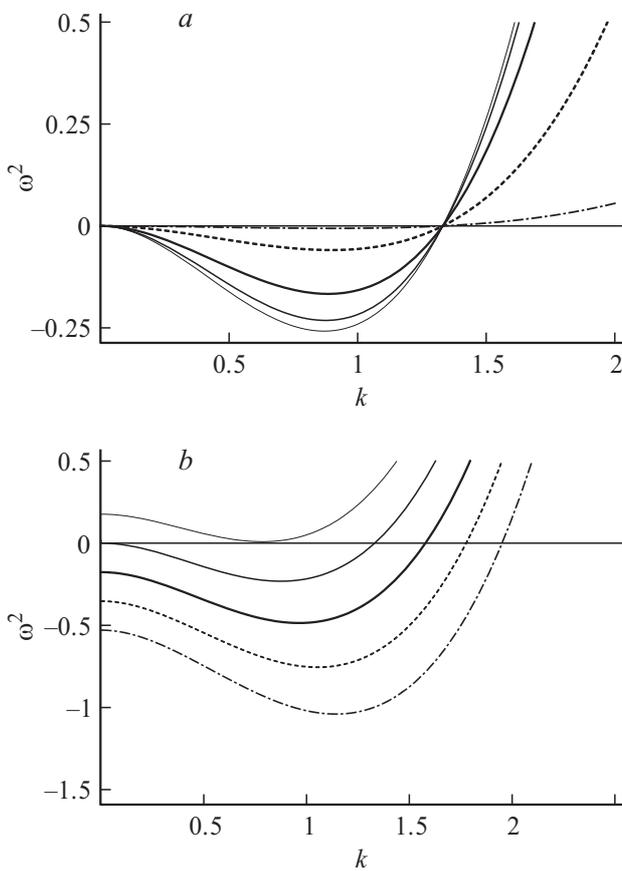


Рис. 1. *a* — зависимости от безразмерного волнового числа k квадрата безразмерной частоты ω^2 для деформационной моды ($m = 2$) при разных значениях радиуса стержня r_0 и значении полевого параметра $w = 3$: $r_0 = 0$ — тонкая линия, $r_0 = 0.5$ — средняя линия, $r_0 = 0.7$ — толстая линия, $r_0 = 0.9$ — штриховая линия, $r_0 = 0.99$ — штрихпунктирная линия; *b* — зависимости от безразмерного волнового числа k квадрата безразмерной частоты ω^2 для деформационной моды при разных значениях электрического поля w и значении радиуса стержня $r_0 = 0.5$: $w = 2.9$ — тонкая линия, $w = 3$ — средняя линия, $w = 3.1$ — толстая линия, $w = 3.2$ — штриховая линия, $w = 3.3$ — штрихпунктирная линия.

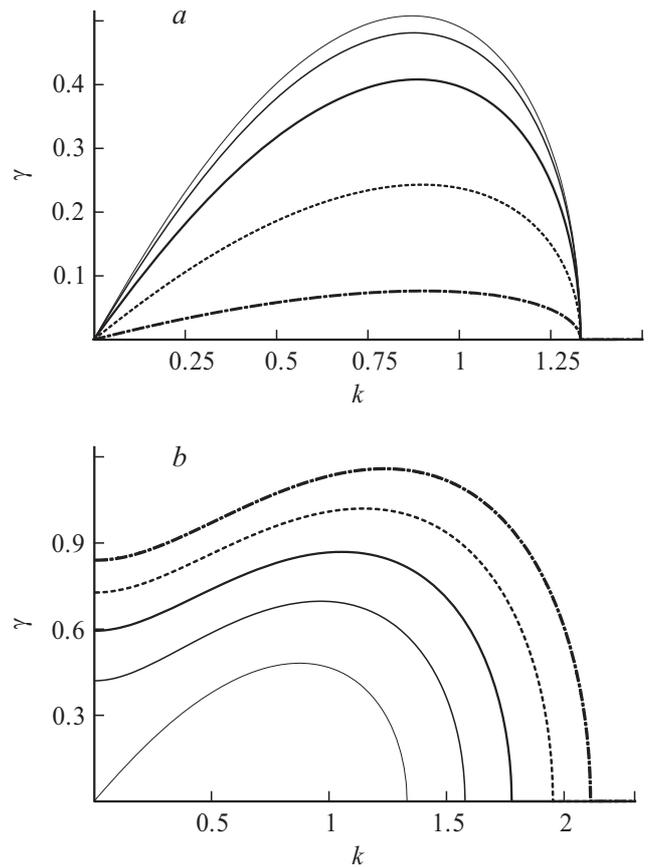


Рис. 2. *a* — зависимость величины безразмерного инкремента γ деформационной моды $m = 2$ от безразмерного волнового числа k при $w = 3$ и разных значениях радиуса стержня: $r_0 = 0$ — тонкая линия, $r_0 = 0.5$ — средняя линия, $r_0 = 0.7$ — толстая линия, $r_0 = 0.9$ — штриховая линия, $r_0 = 0.99$ — штрихпунктирная линия; *b* — зависимость величины безразмерного инкремента γ деформационной моды $m = 2$ от безразмерного волнового числа k при $r_0 = 0.5$ и разных значениях полевого параметра: $w = 3$ — тонкая линия, $w = 3.1$ — средняя линия, $w = 3.2$ — толстая линия, $w = 3.3$ — штриховая линия, $w = 3.4$ — штрихпунктирная линия.

при котором реализуется неустойчивость деформационной моды струи, согласно [3,4], определяется условием $w_{cr} \geq 2.905$). Видно, что в области волновых чисел $0 < k < 1.35$, квадрат частоты отрицателен, что соответствует неустойчивым волнам. При $k > 1.35$ квадрат частоты положителен и волны устойчивы. Наличие в середине струи твердого стержня сказывается лишь на

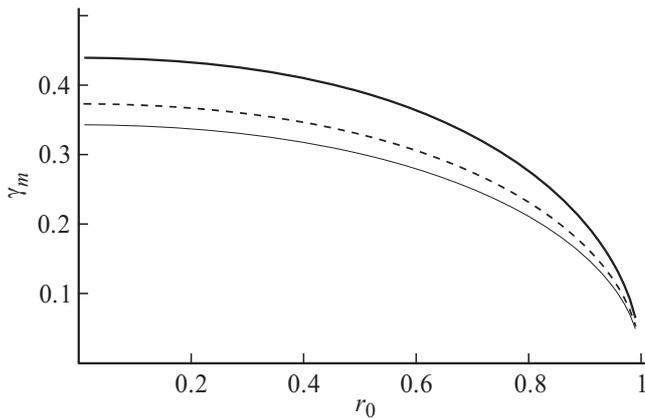


Рис. 3. Зависимости величины максимального по k значения безразмерного инкремента деформационной моды от безразмерного радиуса стержня r_0 при различных значениях полевого параметра w . Тонкая линия $w = 3$, штриховая линия $w = 3.1$, толстая линия $w = 3.2$.

величине инкрементов, снижающихся с уменьшением толщины слоя. Диапазон неустойчивых длин волн от толщины слоя жидкости не зависит.

На рис. 1, *b* приведены зависимости ω^2 для той же моды от волнового числа k при разных значениях напряженности полевого параметра w и фиксированном значении радиуса стержня. Из рисунка видно, что сама неустойчивость реализуется лишь при достаточно высоком значении полевого параметра (напряженности поля в окрестности струи), когда квадрат частоты волн становится отрицательным. Видно также, что с увеличением напряженности электрического поля увеличиваются размер области реализации неустойчивости и величина инкремента. Данный вид неустойчивости в литературе называется электростатической.

На рис. 2 представлены рассчитанные по (27) зависимости величины инкремента деформационной моды ($m = 2$) от волнового числа. На рис. 2, *a* приведены зависимости при фиксированной напряженности поля и разных значениях радиуса стержня. Видно, что максимальным инкрементом обладает струя жидкости без твердого стержня, наличие твердой сердцевинки снижает инкременты, с уменьшением толщины слоя жидкости на стержне величина инкремента снижается.

На рис. 2, *b* приведены зависимости при фиксированном значении радиуса стержня и разных значениях полевого параметра w . Видно, что с увеличением параметра w растут диапазоны неустойчивых волн и максимальные значения инкремента.

На рис. 3 приведены зависимости величины максимального по k значения инкремента γ деформационной моды от радиуса стержня r_0 , при различных значениях полевого параметра w . Видно, что с ростом полевого параметра растут и инкременты наиболее неустойчивых волн. Диапазон неустойчивости не зависит от радиусов r_0 и значений полевого параметра w . Влияние

стержня становится существенным при значениях его безразмерного радиуса $r_0 \geq 0.5$.

Заключение

В линейных по безразмерной амплитуде капиллярных волн расчетах показано, что изменение радиуса провода (твердого сердечника) не влияет на диапазон значений неустойчивых волновых чисел. Наличие твердого стержня оказывает стабилизирующее влияние на капиллярные волны: уменьшается инкремент неустойчивости, т. е. неустойчивость развивается медленнее. Наличие радиального электрического поля является дестабилизирующим фактором. С ростом напряженности электрического поля расширяется диапазон неустойчивых волновых чисел, а значения инкрементов нарастания неустойчивости увеличиваются. Наличие стержня снижает дестабилизирующее влияние радиального электрического поля, но не компенсирует его полностью. Влияние твердого стержня становится заметным лишь при значениях его радиуса не меньше половины радиуса струи.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170-а и 14-08-00240-а.

Список литературы

- [1] Райзер Ю.П. Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 592 с.
- [2] Климов А.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 5. С. 80–87.
- [3] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 4. С. 36–45.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЭОМ. 2009. Т. 45. № 6. С. 35–41.
- [5] Kim O.V., Dunn P.F. // Langmuir. 2010. Vol. 26. P. 15807–15813.
- [6] Cloupeau M., Prunet Foch B. // J. Electrostat. 1989. Vol. 22. P. 135–159.
- [7] Jaworek A., Krupa A. // J. Aerosol Sci. 1999. Vol. 30. N 7. P. 873–893.
- [8] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [9] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [10] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Том VIII. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1992. 661 с.
- [11] Нейфэ А. Введение в методы возмущений. М.: Мир, 1984. 535 с.