

03

О линейном по безразмерной амплитуде осцилляций взаимодействии мод несферической заряженной капли во внешнем электростатическом поле

© С.О. Ширяева, Н.А. Петрушов, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 31 марта 2015 г.)

В нелинейных асимптотических расчетах четвертого порядка по величине эксцентриситета сфероидальной капли и первом порядке по безразмерной амплитуде ее осцилляций рассчитана устойчивость сильно заряженной капли в слабом внешнем однородном электростатическом поле (в котором равновесная форма капли может считаться вытянутой сфероидальной). Обнаружено, что с увеличением порядка приближений по эксцентриситету увеличивается количество мод, взаимодействующих с изначально возбужденной. Показано, что в указанном порядке малости выделенная (изначально возбужденная) мода взаимодействует с восьмью ближайшими. Неустойчивость капли реализуется, когда ее претерпит вторая мода.

1. Введение

Исследование устойчивости поверхностей капель во внешних силовых полях представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями. Так, заряженная капля во внешнем электрическом поле является основным элементом грозовых облаков, ионно-кластерно-капельных пучков, получающихся при электродиспергировании жидкости в жидкометаллических источниках ионов, устройствах для масс-спектрометрии термически нестабильных и нелетучих жидкостей, при электрораспылении лакокрасочных материалов, горючего и инсектицидов (см., например, обзоры [1–3]). Отдельный интерес представляет исследование устойчивости поверхностей капель в левитаторах (бесконтактных подвесах) различного типа: акустического, аэродинамического, электромагнитного, электростатического и их всевозможных комбинаций [4–10]. Широкое использование левитаторов связано с современными технологиями получения высокочистых веществ, а также с неоднократными попытками проверки справедливости критерия Рэлея устойчивости капли по отношению к собственному заряду [4–11].

Равновесная форма заряженной капли в условиях электростатического подвеса была вычислена в [12], когда внешнее однородное электростатическое поле и коллинеарное ему гравитационное удерживают ее в подвешенном состоянии. Условия устойчивости заряженной капли в однородном электростатическом и гравитационном полях теоретически были получены в [13], а нелинейные поправки к частоте осцилляций основной моды в квадратичном приближении по амплитуде осцилляций, опять же теоретически, в [14].

Зададимся целью исследовать устойчивость осцилляций сильно (до предела) заряженной капли, находящейся в слабом электростатическом поле, выделяющем лишь заданное направление, в котором поляризацией капли можно пренебречь.

2. Постановка задачи

Рассмотрим каплю идеальной несжимаемой электропроводной жидкости с плотностью ρ , коэффициентом поверхностного натяжения σ , несущую заряд Q . Примем, что капля находится в электростатическом подвесе, когда коллинеарные противоположно направленные внешнее однородное электростатическое поле напряженностью E_0 и гравитационное поле g удерживают ее в неподвижном положении. В отсутствие электростатического и гравитационного полей капля имеет сферическую форму радиуса R .

Будем решать задачу о расчете осцилляций выше описанной капли в сферической системе координат с началом в центре масс капли. Все решение будем проводить в безразмерных переменных, в которых $\rho = \sigma = R = 1$.

Рассмотрим сильно заряженную каплю в слабом электростатическом поле, коллинеарном гравитационному полю, при этом капля имеет равновесную форму, близкую (в линейном приближении по квадрату эксцентриситета) к вытянутому вдоль электростатического поля сфероиду. Свободная поверхность такой капли описывается в указанных безразмерных переменных выражением [12]

$$r(\theta) = 1 + a_0^{(4)}P_0(\mu) + (a_2^{(2)} + a_2^{(4)})P_2(\mu) + a_3^{(3)}P_3(\mu) + a_4^{(4)}P_4(\mu), \quad (1)$$

$$a_2^{(2)} = \frac{3w}{1-W}, \quad a_3^{(3)} = \frac{108\sqrt{Ww^3}}{5(1-W)(5-4W)},$$

$$a_0^{(4)} = -\frac{9w^2}{5(1-W)^2},$$

$$a_2^{(4)} = \frac{9w^2(79 - 84W + 8W^2)}{7(1-W)^3(5-4W)},$$

$$a_4^{(4)} = \frac{54w^2(65 - 33W - 28W^2)}{35(1-W)^2(3-2W)(5-4W)},$$

$$w = \frac{E_0^2}{16\pi}, \quad w = \frac{Q^2}{16\pi}, \quad \mu \equiv \cos \theta,$$

где W и w — параметры Рэлея и Тейлора соответственно.

Математическая постановка задачи о расчете осцилляций капли в указанных условиях имеет вид

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p_{in} + \mathbf{g}, \quad \operatorname{div} \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{E}_0,$$

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0,$$

$$r = 1 + h(\theta) + \xi(\theta, t): \quad \frac{dF(\mathbf{r}, t)}{dt} = 0,$$

$$F(\mathbf{r}, t) \equiv r - 1 - h(\theta) - \xi(\theta, t),$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_s, \quad p_q(\mathbf{r}, t) + p_{in}(\mathbf{r}, t) - p_0 - p_\sigma(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$p_q = \frac{E^2}{8\pi}, \quad p_\sigma = \operatorname{div} \mathbf{n}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{n}(\mathbf{r}, t) \equiv \frac{\nabla F}{|\nabla F|},$$

где $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ и $p_{in}(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей и давление в капле, $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ — напряженность электрического поля в окрестности капли, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал электрического поля: $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t)$, $p_\sigma(\mathbf{r}, t)$ — капиллярное давление на поверхность капли, $p_q(\mathbf{r}, t)$ — давление на поверхность капли внешнего электростатического поля и электрического поля собственного заряда, p_0 — постоянное внешнее давление, $h(\theta)$ — отклонение равновесной сферической формы капли от исходной сферической (1):

$$h(\theta) = a_0^{(4)} P_0(\mu) + (a_2^{(2)} + a_2^{(4)}) P_2(\mu) + a_3^{(3)} P_3(\mu) + a_4^{(4)} P_4(\mu).$$

Дополним задачу условиями сохранения объема и заряда капли и условием неподвижности ее центра масс

$$\iiint_V dV = \frac{4}{3} \pi, \quad \iint_S (\mathbf{n}, \mathbf{E}) dS = 4\pi Q, \quad \iiint_V \mathbf{r} dV = 0,$$

$$S \equiv \{r = 1 + h(\theta) + \xi(\theta, t); \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$V \equiv \{0 \leq r \leq 1 + h(\theta) + \xi(\theta, t); \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

3. Расчет осцилляций капли

Используя модель потенциального течения жидкости, перейдем от вектора скорости к скалярному гидродинамическому потенциалу $\psi(\mathbf{r}, t)$ и от вектора напряженности к потенциалу электростатического поля $\Phi(\mathbf{r}, t)$

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \nabla \psi(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{r}, t).$$

Задачу будем решать асимптотически, в линейном приближении по безразмерной амплитуде осцилляций

$\xi \sim |\xi|$ капли и в четвертом порядке малости по эксцентриситету ее равновесной формы с сохранением слагаемых $\sim \xi^4$. Так как движение внутри капли обусловлено наличием возмущения ее поверхности, то в указанных безразмерных переменных $\psi \sim \xi$. Примем во внимание, что заряд сам по себе не вызывает деформации сферической капли, а квадрат эксцентриситета сферической капли пропорционален квадрату напряженности внешнего поля [13], поэтому полученные решения будем записывать, учитывая что:

$$w \sim E_0^2 \sim e^2, \quad W \sim Q^2 \sim e^0.$$

Электростатический потенциал представим в виде разложения

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_0(\mathbf{r}) + \Phi_1(\mathbf{r}, t) + O(\xi^2),$$

где $\Phi_0(\mathbf{r})$ — электростатический потенциал в окрестности капли равновесной формы, $\Phi_1(\mathbf{r}, t)$ — поправка к электростатическому потенциалу равновесной формы капли, возникающая в результате возмущения поверхности. Подставив разложение электростатического потенциала в задачу, разобьем ее на нулевой и первый порядки малости.

В нижеследующих рассуждениях зависимостью искомых величин от азимутального угла φ будем пренебрегать. Это допущение, не снижая общности рассуждений, сократит объем необходимых математических выкладок.

Задача нулевого порядка малости описывает невозможную (равновесную) поверхность капли и является задачей на расчет электростатического поля в окрестности равновесной капли

$$\Delta \Phi_0(r, \theta) = 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad -\nabla \Phi_0(r, \theta) \rightarrow E_0 - \mathbf{e}_z,$$

$$r \rightarrow 1 + h(\theta): \quad \Phi(r, \theta, t) = \Phi_s,$$

$$\iint_S (\mathbf{n}, \nabla \Phi_0) dS = -4\pi Q,$$

$$S \equiv \{r = 1 + h(\theta); \quad 0 \leq \theta \leq \pi; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}.$$

Потенциал электрического поля в нулевом приближении по безразмерной амплитуде осцилляций с точностью до слагаемых $\sim e^4$ будет иметь вид

$$\Phi_0(r, \theta) = \frac{4\sqrt{\pi W}}{r} + \sqrt{w} A_1 + w A_2 + \sqrt{w^3} A_3 + w^2 A_4,$$

$$A_1 \equiv 4\sqrt{\pi} \left(\frac{1}{r^2} - r \right) P_1(\mu), \quad A_2 \equiv \frac{12\sqrt{\pi W}}{r^3(1-W)} P_2(\mu),$$

$$A_3 \equiv \frac{36\sqrt{\pi} (2r^2(5-4W)P_1(\mu) + 15P_3(\mu))}{5r^4(1-W)(5-4W)},$$

$$A_4 \equiv \frac{36\sqrt{\pi W}}{5r(1-W)^2} + \frac{108\sqrt{\pi W}(201-272W+76W^2)}{35r^3(1-W)^3(5-4W)} P_2(\mu)$$

$$+ \frac{216\sqrt{\pi W}(227-285W+68W^2)}{835r^5(1-W)^2(3-2W)(5-4W)} P_4(\mu).$$

Выпишем задачу первого порядка малости

$$\Delta\Phi_1(r, \theta, t) = 0, \quad \Delta\psi(r, \theta, t) = 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \Phi_1(r, \theta, t) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0: \psi(r, \theta, t) \rightarrow 0,$$

$$r = 1 = h(\theta): -\partial_1 \xi(\theta, t) - \frac{\partial_\theta h(\theta) \partial_\theta \psi(r, \theta, t)}{r^2} + \partial_r \Psi(r, \theta, t) = 0, \quad (2)$$

$$\Phi_1(r, \theta, t) + \xi(\theta, t) \partial_r \Phi_0(r, \theta) = 0, \quad (3)$$

$$p_{in}^{(1)} + p_{EQ}^{(1)} + p_g^{(1)} - p_\sigma^{(1)} = 0, \quad (4)$$

$$p_{in}^{(1)} = f_1(t) - \partial_t \psi(r, \theta, t),$$

$$p_g^{(1)} = -g(\xi(0, t) - \xi(\theta, t) \cos \theta),$$

$$p_{EQ}^{(1)}(r, \theta, t) = r \partial_\theta \Phi_0(r, \theta) \partial_\theta \Phi_1(r, \theta, t) + r^3 \partial_r \Phi_3(r, \theta) \partial_r \Phi_1(r, \theta, t) + \frac{\xi(\theta, t)}{4\pi r^3} \left(-(\Phi_0(r, \theta))^2 + r \partial_\theta \Phi_0(r, \theta) \partial_{r,\theta} \Phi_0(r, \theta) + r^3 \partial_r \Phi_0(r, \theta) \partial_{r,r} \Phi_0(r, \theta) \right);$$

$$p_\sigma^{(1)} = \frac{1}{r^2 \sqrt{r^2 + (\partial_\theta h(\theta))^2}} \times \left[(2r^5 + 5r^3 (\partial_\theta h(\theta))^2 + 2r^4 \partial_\theta h(\theta) - r^2 (\partial_\theta h(\theta))^2) \partial_{\theta,\theta} h(\theta) + (2r^4 \partial_\theta h(\theta) + 3r^2 (\partial_\theta h(\theta))^3 + (\partial_\theta h(\theta))^5) \operatorname{ctg} \theta \right] \xi(\theta, t) + r^3 (r^2 + (\partial_\theta h(\theta))^2) \partial_{\theta,\theta} \xi(\theta, t) + \left(r^3 (r^2 + (\partial_\theta h(\theta))^2) \operatorname{ctg} \theta - 3r^2 ((\partial_\theta h(\theta))^2 + r \partial_{\theta,\theta} h(\theta)) \partial_\theta h(\theta) \right) \partial_\theta \xi(\theta, t) \Big] = 0.$$

Символами ∂_z и $\partial_{z,x}$ обозначаются производные первого и второго порядков по аргументу z или по аргументам z и x ; $f_1(t)$ — константа интегрирования по пространственным координатам, в общем случае являющаяся функцией времени.

Решения уравнений Лапласа в сферической системе координат с началом в центре масс капли, удовлетворяющие граничным условиям, условиям сохранения объема капли и неподвижности ее центра масс, имеют вид

$$\Phi_1(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} r^{-(1+n)} A_n(t) P_n(\mu), \quad (5)$$

$$\psi(r, \theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} r^n B_n(t) P_n(\mu), \quad (6)$$

где $P_n(\mu)$ — осесимметричные полиномы Лежандра порядка n [15].

Возмущение поверхности капли $\xi(\theta, t)$ следует искать в виде [14]

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\mu), \quad (7)$$

где $A_n(t)$, $B_n(t)$ и $\alpha_n(t)$ — неизвестные функции времени и других физико-химических параметров задачи.

Подставляя выписанные проекты решений (5)–(7) в уравнения (2)–(4), перегруппируем слагаемые так, чтобы уравнения представляли собой разложения по полиномам Лежандра. Тогда уравнениям (2)–(4) можно удовлетворить, положив равными нулю коэффициенты при каждом из полиномов Лежандра. Сохраняя слагаемые с точностью до $\sim e^4$, получим следующие соотношения между коэффициентами решений (5)–(7) кинематического условия (2):

$$e^4 K_{n\pm 4}^{(1)} B_{n\pm 4}(t) + e^3 K_{n\pm 3}^{(2)} B_{n\pm 3}(t) + \left(e^2 K_{n\pm 2}^{(3)} + e^4 K_{n\pm 2}^{(4)} \right) B_{n\pm 2}(t) + e^3 K_{n\pm 1}^{(5)} B_{n\pm 1}(t) + \left(K_n^{(6)} + e^2 K_n^{(7)} + e^4 K_n^{(8)} \right) B_n(t) - \partial_1 \alpha_n(t) = 0. \quad (8)$$

Из условия эквипотенциальности (3) получим

$$e^4 E_{n\pm 4}^{(1)} A_{n\pm 4}(t) + e^3 E_{n\pm 3}^{(2)} A_{n\pm 3}(t) + \left(e^2 E_{n\pm 2}^{(3)} + e^4 E_{n\pm 2}^{(4)} \right) A_{n\pm 2}(t) + e^3 E_{n\pm 1}^{(5)} A_{n\pm 1}(t) + \left(E_n^{(6)} + e^2 E_n^{(7)} + e^4 E_n^{(8)} \right) A_n(t) + e^4 E_{n\pm 4}^{(9)} \alpha_{n\pm 4}(t) + \left(e^2 E_{n\pm 2}^{(11)} + e^4 E_{n\pm 2}^{(12)} \right) \alpha_{n\pm 2}(t) + e^3 E_{n\pm 3}^{(10)} \alpha_{n\pm 3}(t) + \left(e E_{n\pm 1}^{(13)} + e^3 E_{n\pm 1}^{(14)} \right) \alpha_{n\pm 1}(t) + \left(E_n^{(15)} + e^2 E_n^{(16)} + e^4 E_n^{(17)} \right) \alpha_n(t) = 0. \quad (9)$$

Из динамического условия (4)

$$D_n^{(1)} A_n(t) + D_{n\pm 1}^{(1)} A_{n\pm 1}(t) + D_{n\pm 2}^{(1)} A_{n\pm 2}(t) + D_{n\pm 3}^{(1)} A_{n\pm 3}(t) + D_{n\pm 4}^{(1)} A_{n\pm 4}(t) + D_n^{(2)} \alpha_n(t) + D_{n\pm 1}^{(2)} \alpha_{n\pm 1}(t) + D_{n\pm 2}^{(2)} \alpha_{n\pm 2}(t) + D_{n\pm 3}^{(2)} \alpha_{n\pm 3}(t) + D_{n\pm 4}^{(2)} \alpha_{n\pm 4}(t) + D_n^{(3)} \partial_t B_n(t) + D_{n\pm 1}^{(3)} \partial_t B_{n\pm 1}(t) + D_{n\pm 2}^{(3)} \partial_t B_{n\pm 2}(t) + D_{n\pm 3}^{(3)} \partial_t B_{n\pm 3}(t) + D_{n\pm 4}^{(3)} \partial_t B_{n\pm 4}(t) = 0, \quad (10)$$

где $K_n^{(j)}$, $E_n^{(j)}$ и $D_n^{(j)}$ — некоторые функции, которые здесь не приводятся ввиду отсутствия необходимости и их большой громоздкости (их определение займет пять страниц сплошных формул).

Амплитуды гидродинамического и электростатического потенциалов будем искать в виде разложения по

эксцентриситету e

$$A_n(t) = \sum_{j=0}^4 e^j A_n^{(j)}(t) + O(e^5),$$

$$B_n(t) = \sum_{j=0}^4 e^j B_n^{(j)}(t) + O(e^5).$$

Из уравнений (8) и (9) найдем связь амплитуд $A_n^{(j)}(t)$ и $B_n^{(j)}(t)$ с $\alpha_n(t)$ и, подставив полученные соотношения в уравнение (10), получим систему связанных эволюционных уравнений для амплитуд мод, выписанную с точностью до слагаемых $\sim e^4$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \alpha_n(t)}{\partial t^2} + \omega_n^2 \alpha_n(t) = & e N_{n\pm 1}^{(1)} \alpha_{n\pm 1}(t) \\ & + e^2 \left(N_{n\pm 2}^{(2)} \alpha_{n\pm 2}(t) + N_{n\pm 2}^{(3)} \frac{\partial^2 \alpha_{n\pm 2}(t)}{\partial t^2} \right) \\ & + e^3 \left(N_{n\pm 1}^{(4)} \alpha_{n\pm 1}(t) + N_{n\pm 3}^{(5)} \alpha_{n\pm 3}(t) \right. \\ & \left. + N_{n\pm 1}^{(6)} \frac{\partial^2 \alpha_{n\pm 1}(t)}{\partial t^2} + N_{n\pm 3}^{(7)} \frac{\partial^2 \alpha_{n\pm 3}(t)}{\partial t^2} \right) \\ & + e^4 \left(N_{n\pm 2}^{(8)} \alpha_{n\pm 2}(t) + N_{n\pm 4}^{(9)} \alpha_{n\pm 4}(t) \right. \\ & \left. + N_{n\pm 2}^{(10)} \frac{\partial^2 \alpha_{n\pm 2}(t)}{\partial t^2} + N_{n\pm 4}^{(11)} \frac{\partial^2 \alpha_{n\pm 4}(t)}{\partial t^2} \right), \quad (11) \end{aligned}$$

где $N_n^{(j)}$ — некоторые коэффициенты, зависящие от физико-химических параметров задачи, ω_n — частота n -й моды:

$$\omega_n^2 = \omega_{n,0}^2 + e^2 \delta \omega_n^2, \quad \omega_{n,0}^2 = n(n-1)(2+n-4W).$$

Нелинейная поправка к частоте $e^2 \delta \omega_n^2$, возникающая из-за отличия равновесной формы капли от сферы, имеет вид

$$e^2 \delta \omega_n^2 \equiv e^2 (\omega_{n,1}^2 + e^2 \omega_{n,2}^2),$$

$$\begin{aligned} \omega_{n,1}^2 = & \frac{9nw}{(3+2n)(2n+1)(2n-1)(1-W)} \\ & \times (2-4W+n(7-8W)+n^2(17-8W) \\ & - 3n^3(7-8W)-n^4(23-16W)-2n^5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{n,2}^2 = & \frac{9nw^2}{70(2n-1)^2(2n+1)^2(2n-3)(2n+3)^2 \times} \\ & \times (2n+5)(1-W)^2(3-2W)(4W-5) \\ & \times (F_0 + nF_1 + n^2F_2 + n^3F_3 + n^4F_4 + n^5F_5 \\ & + n^6F_6 + n^7F_7 + n^8F_8 + n^9F_9 + n^{10}F_{10}), \end{aligned}$$

$$F_0 = -113400 + 59940W + 1167480W^2$$

$$-1866240W^3 + 760320W^4,$$

$$F_1 = -2044980 + 4149702W - 677232W^2$$

$$-2747592W^3 + 1327392W^4,$$

$$F_2 = -9724680 + 27254148W - 33657954W^2$$

$$+ 22609272W^3 - 6551616W^4,$$

$$F_3 = 648270 + 2188407W - 15970115W^2$$

$$+ 20836068W^3 - 7761760W^4,$$

$$F_4 = 358002900 - 94550217W + 100229475W^2$$

$$- 55488828W^3 + 14199360W^4,$$

$$F_5 = 25382070 - 68637261W + 80457363W^2$$

$$- 51529884W^3 + 14478912W^4,$$

$$F_6 = -17623620 + 35928201W - 26025201W^2$$

$$+ 11511204W^3 - 3953664W^4,$$

$$F_7 = -16873920 + 35203248W - 28142160W^2$$

$$+ 14271552W^3 - 4592640W^4,$$

$$F_8 = 1360800 - 2111688W + 771240W^2$$

$$- 376992W^3 + 384000W^4,$$

$$F_9 = 3094560 - 5336496W + 2646224W^2$$

$$- 788544W^3 + 418816W^4,$$

$$F_{10} = 5040000 - 827184W + 304560W^2 + 24384W^3.$$

Как видно из (11), в пределах используемой нами точности $\sim \xi e^4$, вместе с n -й модой на поверхности капли будут возбуждаться еще восемь связанных с ней мод. Решение (11), полученное методом последовательных приближений, имеет вид

$$\begin{aligned} \alpha_n(t) = & \beta_n \cos(\omega_n t) + \beta_n \Lambda_1 \cos \left(t \sqrt{\omega_{n,0}^2 + e^2 \omega_{n,1}^2} \right) \\ & + \beta_{n\pm 1} \Lambda_2 \cos \left(t \sqrt{\omega_{n\pm 1,0}^2 + e^2 \omega_{n\pm 1,1}^2} \right) \\ & + \beta_{n\pm 2} \Lambda_3 \cos \left(t \sqrt{\omega_{n\pm 2,0}^2 + e^2 \omega_{n\pm 2,1}^2} \right) \\ & + \beta_n \Lambda_4 \cos(\omega_n t) + \beta_{n\pm 1} \Lambda_5 \cos(\omega_{n\pm 1,0} t) \\ & + \beta_{n\pm 2} \Lambda_6 \cos(\omega_{n\pm 2,0} t) + \beta_{n\pm 3} \Lambda_7 \cos(\omega_{n\pm 3,0} t) \\ & + \beta_{n\pm 4} \Lambda_8 \cos(\omega_{n\pm 4,0} t), \quad (12) \end{aligned}$$

$$\Lambda_1 = \frac{e^{-2} M_n^{(1)} + M_n^{(2)} + e^2 M_n^{(3)} + e^4 M_n^{(4)}}{(\omega_{n-1,0}^2 - \omega_{n,0}^2)(\omega_{n+1,0}^2 - \omega_{n,0}^2)},$$

$$\Lambda_2 = \frac{eM_{n\pm 1}^{(5)} + e^3M_{n\pm 1}^{(6)}}{(\omega_{n\pm 2,0}^2 - \omega_{n\pm 1,0}^2)(\omega_{n\pm 1,0}^2 - \omega_{n,0}^2)},$$

$$\Lambda_3 = \frac{e^2M_{n\pm 1}^{(7)} + e^4M_{n\pm 1}^{(8)}}{(\omega_{n\pm 3,0}^2 - \omega_{n\pm 2,0}^2)(\omega_{n\pm 2,0}^2 - \omega_{n\pm 1,0}^2)(\omega_{n\pm 2,0}^2 - \omega_{n,0}^2)},$$

$$\Lambda_4 = \frac{M_n^{(9)} + e^2M_n^{(10)} + e^4M_{11}^{(11)}}{(\omega_{n-1,0}^2 - \omega_{n,0}^2)(\omega_{n+1,0}^2 - \omega_{n,0}^2) \times (\omega_{n-2,0}^2 - \omega_{n,0}^2)(\omega_{n+2,0}^2 - \omega_{n,0}^2)},$$

$$\Lambda_5 = \frac{eM_{n\pm 1}^{(12)} + e^3M_{n\pm 1}^{(13)}}{(\omega_{n\pm 2,0}^2 - \omega_{n\pm 1,0}^2)(\omega_{n\pm 1,0}^2 - \omega_{n,0}^2)(\omega_{n\pm 1,0}^2 - \omega_{n\pm 1,0}^2)},$$

$$\Lambda_6 = \frac{e^2M_{n\pm 2}^{(14)} + e^4M_{n\pm 2}^{(15)}}{(\omega_{n\pm 3,0}^2 - \omega_{n\pm 2,0}^2)(\omega_{n\pm 2,0}^2 - \omega_{n\pm 1,0}^2) \times (\omega_{n\pm 2,0}^2 - \omega_{n,0}^2)(\omega_{n\pm 2,0}^2 - \omega_{n\pm 1,0}^2)},$$

$$\Lambda_7 = \frac{e^3M_{n\pm 3}^{(16)}}{(\omega_{n\pm 3,0}^2 - \omega_{n\pm 2,0}^2)(\omega_{n\pm 3,0}^2 - \omega_{n\pm 1,0}^2)(\omega_{n\pm 3,0}^2 - \omega_{n,0}^2)},$$

$$\Lambda_8 = \frac{e^4M_{n\pm 4}^{(17)}}{(\omega_{n\pm 4,0}^2 - \omega_{n\pm 3,0}^2)(\omega_{n\pm 4,0}^2 - \omega_{n\pm 2,0}^2) \times (\omega_{n\pm 4,0}^2 - \omega_{n\pm 1,0}^2)(\omega_{n\pm 4,0}^2 - \omega_{n,0}^2)},$$

где β_n — константы интегрирования, $M_n^{(j)}$ — коэффициенты, зависящие от прочих физико-химических параметров системы, не выписанные из-за громоздкости. Выражения для амплитуд нулевой и первой мод, которые носят компенсационный характер, получим, удовлетворяя условиям сохранения объема капли и неподвижности ее центра масс, в виде

$$\alpha_0(t) = \frac{18w}{7(9w^2 + 5(1 - W)^2)} (\alpha_2(t) + \alpha_4(t)), \quad (13)$$

$$\alpha_1(t) = m_2\alpha_2(t) + m_3\alpha_3(t) + m_4\alpha_4(t) + m_5\alpha_5(t), \quad (14)$$

$$m_2 = \frac{2916w^{3/2}(1 - W)^2\sqrt{W}}{5((126w + 35(1 - W))(1 - W)^2(5 - 4W) + 54w^2(89 - 102W + 16W^2)) - 27w(21(1 - W)^2(15 - 22W + 8W^2) + w(3283 - 6028W + 3028W^2 - 256W^3))},$$

$$m_3 = \frac{432w^{3/2}(1 - W)^2\sqrt{W}}{7(3 - 2W)((126w + 35(1 - W))(1 - W)^2 \times (5 - 4W) + 54w^2(89 - 102W + 16W^2))},$$

$$m_4 = \frac{432w^{3/2}(1 - W)^2\sqrt{W}}{(126w + 35(1 - W))(1 - W)^2(5 - 4W) + 54w^2(89 - 102W + 16W^2)},$$

$$m_5 = \frac{-270w^3(110 - 209W + 95W^2 + 4W^3)}{11(3 - W)((126w + 35(1 - W))(1 - W)^2 \times (5 - 4W) + 54w^2(89 - 102W + 16W^2))}.$$

4. Обсуждение полученных результатов

Коэффициенты β_n в выражении (12), являясь константами интегрирования, определяются из начальных условий. Именно они определяют характер взаимодействия между различными модами, а также степень вклада каждой моды в форму поверхности капли.

Как уже было сказано выше, в пределах рассматриваемой точности $\sim \xi e^4$ каждая возбужденная мода возбуждает еще восемь соседних мод (по четыре с каждой стороны). В расчетах $\sim \xi e^2$ для близких по физическому смыслу было получено, что возбужденная в начальный момент мода взаимодействует с двумя или четырьмя ближайшими модами в зависимости от задачи (задачи об электростатической устойчивости уединенной заряженной сфероидальной капли или незаряженной капли во внешнем однородном электростатическом поле).

Рассмотрим ситуацию, когда в начальный момент времени возбуждена только одна мода. В этом случае система начальных условий имеет вид

$$\alpha_n(0) = \xi, \quad \alpha_{n\pm 1}(0) = 0, \quad \alpha_{n\pm 2}(0) = 0,$$

$$\alpha_{n\pm 3}(0) = 0, \quad \alpha_{n\pm 4}(0) = 0,$$

$$\frac{d\alpha_n}{dt}(0) = 0, \quad \frac{d\alpha_{n\pm j}}{dt}(0) = 0, \quad (j = 1, \dots, 4). \quad (15)$$

Подставляя решения (12) эволюционной системы уравнений в начальные условия (15) и сохраняя слагаемые $\sim \xi e^4$, получим систему девяти уравнений (для нулевой и первой мод используем выражения (13) и (14) соответственно). Находя из полученной системы коэффициенты β_n и подставляя их в (12), получим окончательные выражения для амплитуд $\alpha_n(t)$, определяющие временные эволюции девяти связанных мод.

При численных расчетах были взяты околос критические значения параметра Рэлея $W = 0.9772$ и параметра Тейлора $w = 1.283 \cdot 10^{-4}$ для капли радиуса $R = 0.1$ см. Речь идет о комбинации параметров Рэлея и Тейлора, при которых капля устойчива и неподвижно висит в подвесе [13]. Отметим, что критическое значение параметра Рэлея для изолированной заряженной капли есть $W = 1$, а значение параметра Тейлора для незаряженной капли в однородном электростатическом поле $w \approx 0.05$ [13]. Плотность жидкости принималась $\rho = 1$ г/см³, коэффициент поверхностного натяжения $\sigma = 73$ дун/см (характеристики воды), амплитуда начального возмущения $\xi = 0.1R$. Эксцентриситет равновесной формы капли рассчитывался по формуле $e^2 = 9w(1 - W)$ и составил $e^2 \approx 0.0506$. Величина безразмерного ускорения свободного падения g (при указанном обезразмеривании) определится как $g = 980.7(\rho R^2/\sigma) \approx 0.134$.

На рис. 1, а представлена временная эволюция амплитуд возбужденной в начальный момент времени основной моды α_2 и связанных с ней мод $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ при значении параметра Рэлея W на 0.0002 меньше критического ($W = 0.9774$), и при значении параметра Тейлора w , удовлетворяющем условию подвеса

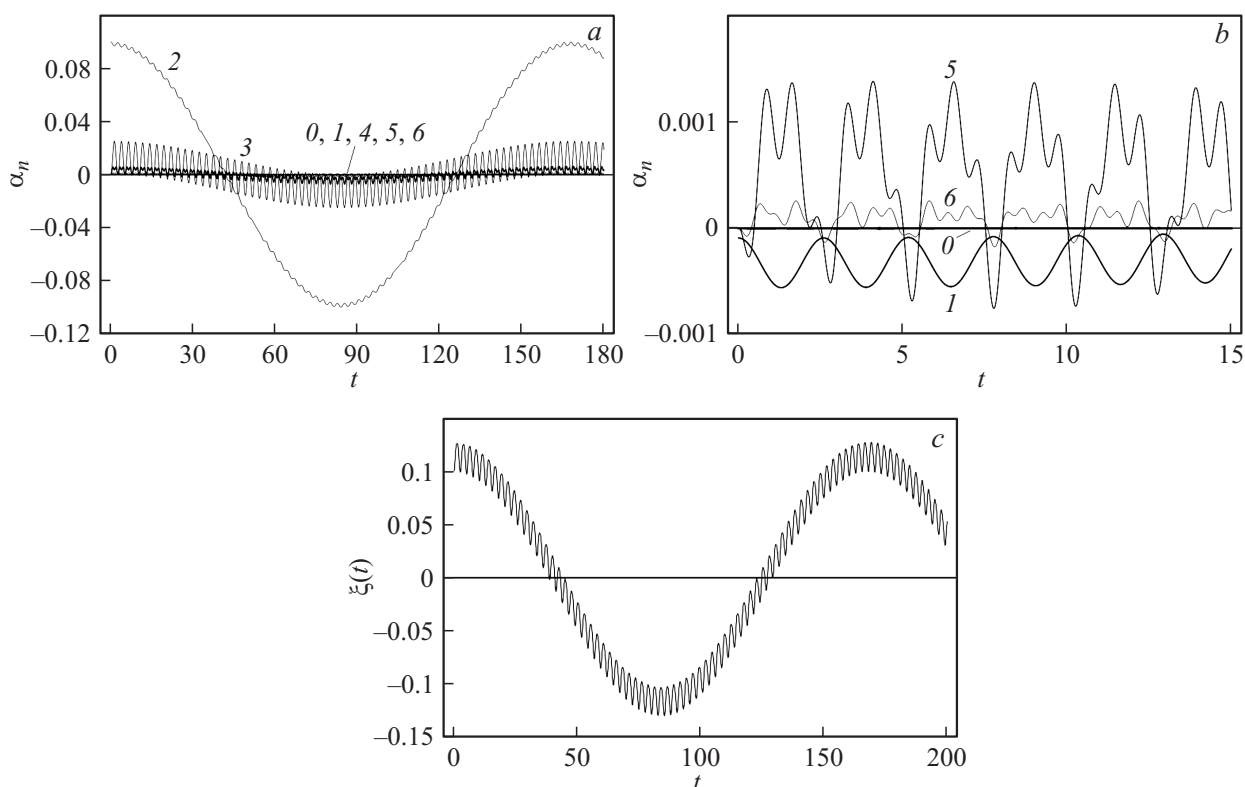


Рис. 1. Временная эволюция амплитуд возбужденной в начальный момент времени второй моды и мод, связанных с ней: *a* — общая картина временной эволюции амплитуд всех мод, *b* — временная эволюция амплитуд только мод, связанных с возбужденной в начальный момент, *c* — общий вид возмущения поверхности капли $\xi(t)$ при начальном возбуждении второй моды (номер у кривой совпадает с номером моды).

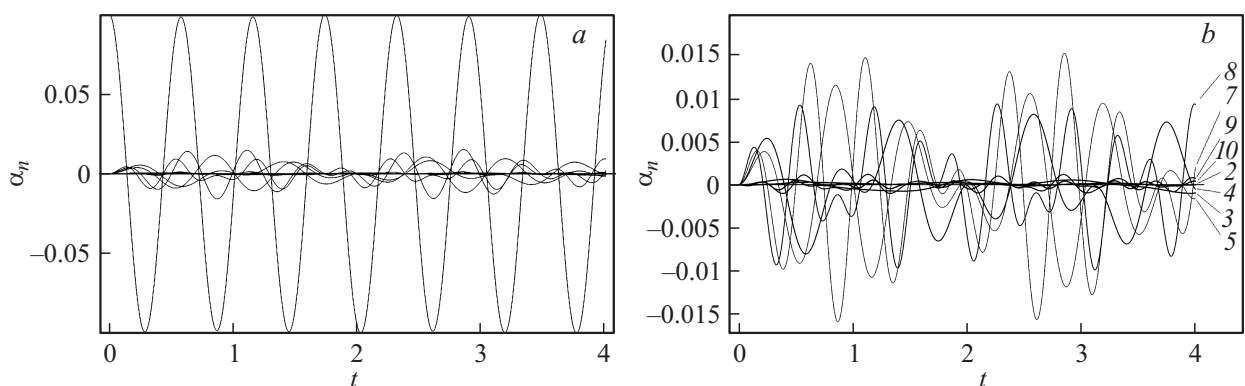


Рис. 2. Временная эволюция возбужденной в начальный момент времени шестой моды и мод, связанных с ней: *a* — общая картина временной эволюции амплитуд всех мод, *b* — временная эволюция амплитуд только мод, связанных с возбужденной в начальный момент. Расчет проведен при тех же значениях прочих величин, что и на рис. 1. На рис. 2, *b* и на всех последующих номер u кривой совпадает с номером моды.

$w = 1.283 \cdot 10^{-4}$ для принятого W . Видно, что амплитуда третьей моды примерно в 3 раза меньше амплитуды второй моды, а амплитуда четвертой примерно в 3 раза меньше амплитуды третьей моды. Амплитуды всех остальных мод весьма малы и практически сливаются с осью абсцисс. На рис. 1, *b* временная эволюция этих мод приведена при увеличенном на два порядка масштабе по оси ординат и на меньшем промежутке времени, но и в этом случае амплитуда нулевой моды практи-

чески сливается с осью абсцисс. Следует отметить, что возбуждение нулевой и первой мод носит компенсационный характер, поэтому их амплитуды отрицательны. Рис. 1, *c* иллюстрирует временную эволюцию возмущения поверхности капли $\xi(t)$ при начальном возбуждении второй моды. Видно, что из-за наличия взаимодействия второй моды с соседями, энергия начальной деформации перераспределяется между всеми модами, с которыми имеется взаимодействие.

На рис. 2, *a* представлены временные эволюции амплитуд возбужденной в начальный момент времени шестой моды α_6 и связанных с ней соседних мод $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8, \alpha_9, \alpha_{10}$ при тех же внешних условиях, что и на рис. 1, *a*. Максимальную амплитуду имеет шестая мода, а амплитуды связанных с ней мод малы, как это видно из рис. 2, *b*. На рис. 2, *b* представлены временные эволюции мод $n = 2-10$, только связанных с изначально возбужденной шестой модой в более крупном (в 10 раз большем) масштабе. Чем дальше рассматриваем мода стоит от возбужденной в начальный момент времени, тем слабее связь с ней и меньше ее вклад в форму поверхности, что ожидаемо и очевидно из решения (12), а также наблюдается и на рис. 1, *a*.

Наибольший интерес представляет развитие неустойчивости связанных мод. На рис. 3, *a* представлена временная эволюция амплитуд возбужденной в начальный момент времени второй моды α_2 и связанных с ней мод $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ при значении параметра Рэля $W = 0.9774$ и значении параметра Тейлора $w = 1.282 \cdot 10^{-4}$ (удовлетворяющем условию неподвижности капли), при которых вторая мода теряет устойчивость. Как видно из рис. 3, моды, связанные со второй, несмотря на докритический для себя заряд капли, также становятся неустойчивыми, причем неустойчивость

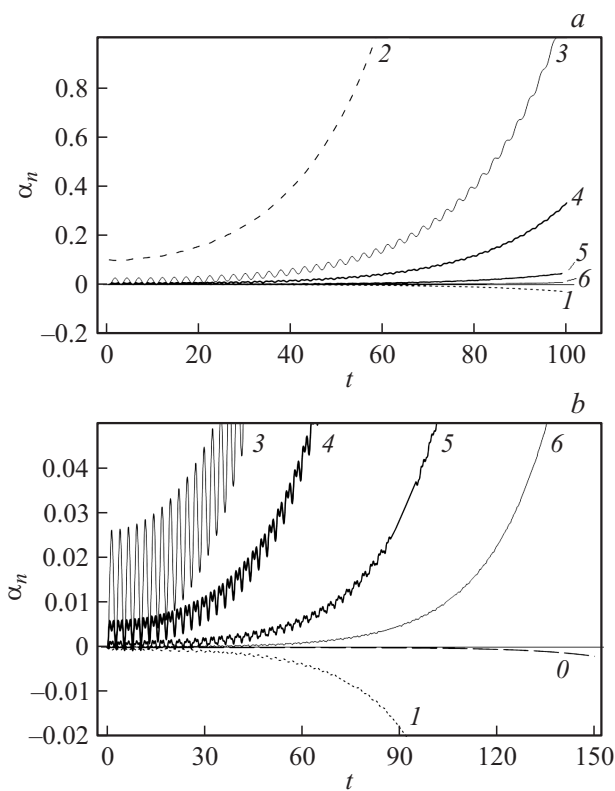


Рис. 3. *a* — то же, что на рис. 1, но при докритической для второй моды комбинации значений параметров Рэля и Тейлора $W = 0.9774, w = 1.283 \cdot 10^{-4}$, которые являются докритическими для остальных мод, связанных с изначально возбужденной второй; *b* — то же, что на рис. 3, *a*, но в большем масштабе по оси ординат.

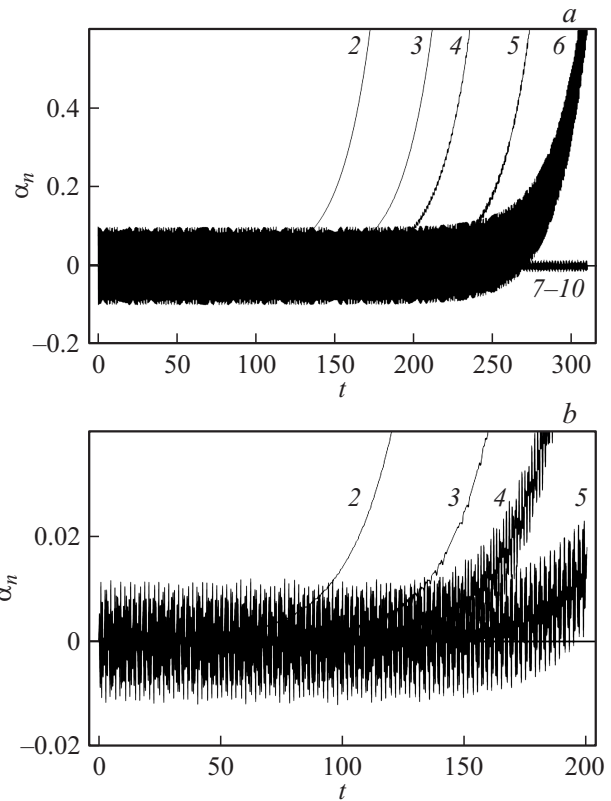


Рис. 4. *a* — то же, что на рис. 2, но при докритических для второй моды значениях параметров Рэля и Тейлора $W = 0.9774, w = 1.283 \cdot 10^{-4}$, которые являются докритическими для остальных мод, связанных с изначально возбужденной шестой, *b* — то же, что на рис. 4, *a*, но в большем масштабе по оси ординат отдельно для второй, третьей, четвертой и пятой мод.

носит колебательный характер. Это происходит потому что амплитуды мод, связанных с основной (второй) модой, выражаются через ее амплитуду. На рис. 3, *b* изображены только связанные моды $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$ в более крупном масштабе.

На рис. 4, *a* представлены амплитуды возбужденной в начальный момент шестой моды ($n = 6$) и связанных с ней мод, при тех же значениях параметров Рэля $W = 0.9774$ и Тейлора $w = 1.282 \cdot 10^{-4}$, что и на рис. 3. Ясно, что при указанных значениях параметров Рэля и Тейлора вторая мода будет неустойчива, а остальные моды должны быть устойчивыми. Но, как видно из рис. 4, амплитуды мод (со второй по шестую) начинают расти колебательным образом. Изначально возбуждаемая шестая мода также теряет устойчивость при указанных докритических для нее значениях параметров Рэля и Тейлора за счет взаимодействия со второй неустойчивой модой. Таким образом, неустойчивость второй моды приводит к неустойчивости всех связанных с ней в данном приближении $\sim \xi e^4$ мод, т.е. мод с $n = 0-6$. Остальные моды (с α_7 по α_{10}) остаются устойчивыми. На рис. 4, *b* в большем масштабе изображена эволюция амплитуд мод $\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ при тех же условиях, что и на рис. 4, *a*.

Похожие закономерности взаимодействия мод на пороге потери устойчивости были ранее описаны в [16] для сфероидальной заряженной капли в отсутствие внешнего электростатического поля.

Следует отметить, что количество мод, связанных с возбужденной в начальный момент времени, увеличивается с ростом неоднородности поля (читай, с увеличением порядков приближений по e для сфероидальной капли в однородном поле), т.е. с увеличением степени неоднородности электростатического поля, вокруг капли [17]. Коэффициент связи мод уменьшается по мере удаления номера моды, за которой ведется наблюдение, от моды возбужденной в начальный момент времени [18].

5. Заключение

Показано, что с увеличением точности расчетов (с увеличением порядков приближений по эксцентриситету e) растет связность мод (по числу взаимодействующих мод). Интенсивность межмодового взаимодействия ослабевает по мере удаления номера моды от изначально возбужденной. При расчетах устойчивости капли необходимо учитывать наличие всех связанных мод, так как в момент распада капли (на пороге ее устойчивости) в зависимости от внешних условий повлиять на характер распада могут даже те моды, которые оказывают ничтожно малый вклад в формообразование поверхности капли. Неустойчивость капли реализуется, когда неустойчивость претерпевает наиболее низкая из ее мод, вовлеченных в межмодовое взаимодействие.

Работа выполнена в рамках при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170 и 14-08-00240.

Список литературы

- [1] *Габович М.Д.* // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
- [2] *Bailey A.G.* // Atomization Spray. Т. 1986. Vol. 2. P. 95–134.
- [3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Жаров А.Н., Коромылов В.А.* // ЭОМ. 2005. № 3. С. 25–36.
- [4] *Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B.* // J. Coll. Sci. 1964. Vol. 19. P. 136–143.
- [5] *Berg T.G.O., Trainor R.J., Vaughan U.* // J. Atmosph. Sci. 1970. Vol. 27. N 11. P.1173–1181.
- [6] *Schweizer J.D., Hanson D.N.* // J. Coll. Int. Sci. 1971. Vol. 35. N 3. P. 417–423.
- [7] *Rouilleau M., Desbois M.* // J. Atmosph. Sci. 1972. Vol. 29. N 4. P. 565–569.
- [8] *Duft D., Lebbeus H., Huber B.A.* // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. N 8. P. 1–4.
- [9] *Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al.* // Nature. 2003. Vol. 421. P. 128.
- [10] *Grimm R.L., Beauchamp J.L.* // J. Phys. Chem. B. 2005. Vol. 109. P. 8244–8250.
- [11] *Rayleigh (Strutt J.W.)* // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [12] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 10. С. 32–40.
- [13] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
- [14] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 93–95.
- [15] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
- [16] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Корниенко Д.О.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 11. С. 11–20.
- [17] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 5. С. 50–60.
- [18] *Рабинович М.И., Трубецков Д.И.* Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука, 1984. 432 с.