01;03

Уравнение турбулентного движения в трубах

© Л.Э. Меламед

Центр физико-технических проектов „Атомэнергомаш“, Москва
E-mail: melamedl@yandex.ru

Поступило в Редакцию 7 февраля 2015 г.

Впервые предложено уравнение турбулентного движения в круглом цилиндрическом канале, не содержащее эмпирических величин. Его решение описывает профиль осредненной скорости во всем диапазоне турбулентных чисел Рейнольдса и во всех областях сечения канала. Расчетная модель основана на учете внутреннего распределенного сопротивления, создаваемого турбулентной „вихревой засыпкой“.

Круглая труба является не только распространенным техническим устройством (наряду с рычагом и колесом), но и основным гидродинамическим примером. Однако „для турбулентного движения в трубах точного теоретического решения не существует и все формулы и закономерности получены либо непосредственно из опыта, либо имеют полуэмпирический характер“ [1]. Но и эти экспериментальные результаты и закономерности в самое последнее время подвергаются проверке, существенному уточнению и модификации [2,3]. Расчетные модели турбулентности (см., например, [4]) опираются в основном на понятие о турбулентной вязкости. Лишь небольшая часть работ рассматривает внутреннее сопротивление. Наиболее близкой по тематике к данной статье является работа [5]. В этом исследовании в правую часть уравнения Навье–Стокса добавлена сила сопротивления в виде бесконечного степенного ряда по скоростям с коэффициентами, определяемыми по экспериментальным данным. Подробно рассмотрены круглый и плоский каналы. В плоском случае использованы линейный и квадратичный члены, в цилиндрическом — только линейный. Получены аналитические решения. В отличие от этой работы в данной статье предложено уравнение турбулентного движения в трубе, не содержащее эмпирических параметров и не требующее введения в рассмотрение дополнительных переменных. Численное решение этого уравнения близко соответствует экспериментальным данным. В качестве таких эталонных данных выбрана формула Рейхардта [6]. Результаты данной работы помогут, в частности, в разработке таких исследований, как, например, [7–9], в которых турбулентность является лишь одним из рассматриваемых факторов и ее учет не должен сопровождаться излишними вычислительными трудностями.

Турбулентное течение можно представить себе как ламинарное течение между жидкими, движущимися и вращающимися вихрями переменных размеров. Поступательно вихри двигаются с чуть меньшей скоростью, чем свободный поток, и обтекаются им. Это и создает сопротивление для потока. Предлагаемая расчетная модель основана на рассмотрении внутреннего распределенного сопротивления как сопротивления, создаваемого турбулентной „вихревой засыпкой“.

Термин „вихревая засыпка“ связан с задачами о течениях через засыпки из твердых частиц. Такие задачи возникают в атомной энергетике, химической и других отраслях промышленности [10,11]. В них течения рассматриваются как преодолевающие внутренние объемные сопротивления. Априорного теоретического способа определения таких сопротивлений в настоящее время не существует. Тем не менее, как будет показано ниже, такая модель способствует построению аналитического выражения для турбулентного сопротивления потока.

Уравнение ламинарного течения в круглой цилиндрической трубе при наличии распределенного сопротивления F имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\mu r\frac{dw}{dr}\right) = P - F$$

или (после преобразования)

$$y'' + \frac{y'}{x} = \frac{PR^2}{\mu w_a}\left(1 - \frac{F}{P}\right). \qquad (1)$$

Здесь w — скорость, m/s; $y = w/w_a$ — относительная скорость; w_a — средняя скорость потока, m/s; r — радиус, m; $x = r/R$ — относительный радиус; R — радиус канала, m; μ — динамическая вязкость, Pa·s; $P = \partial p/\partial z$ — градиент давления, Pa/m; p — давление, Pa; z — направление по оси потока, m; F — градиент давления от распределенного сопротивления, Pa/m.

Покажем, что существует функция $F/P = \gamma(x, y)$, при которой это уравнение определяет профиль осредненной скорости турбулентного стационарного потока. Рассмотрим величину P как полное сопротивление турбулентного потока и величину F как сопротивление „вихревой засыпки". В общем виде они соответственно равны

$$P = \frac{\xi}{2R} \rho \frac{w_a^2}{2} \quad \text{и} \quad F = \frac{\xi_s}{d_s} \rho \frac{w_a^2}{2}, \tag{2}$$

где ρ — плотность, kg/m^3; d_s — характерный диаметр зерна „засыпки", m. Оценим отношение $\gamma = F/P$, входящее в уравнение (1). Для определения параметров, влияющих на величину γ, была проведена серия вариантных расчетов, в которых менялись число Re и гипотетически возможные параметры „вихревой засыпки". Коэффициент турбулентного сопротивления потока ξ в его зависимости от числа $\mathrm{Re} = 2Rw_a\rho/\mu$ известен. Коэффициент сопротивления засыпки ξ_s, рассматриваемый в технических приложениях [10,11], зависит от пористости засыпки и диаметра ее „зерна". Расчеты показали, что по порядку величин градиенты давления P и F близки друг другу. Было найдено, что значение величины γ хорошо описывается формулой $\gamma = (y/y_c)^2$, где y — искомая скорость, а $y_c = y(0)(1 - x^2/2)^{0.5}$ — универсальный профиль, с большой точностью описывающий скорость турбулентного потока в его центральной части. В такой форме величина γ (доля общих потерь, приходящаяся на засыпку) меняется по радиусу и зависит только от формы профиля скорости, а не от ее амплитуды.

Уравнение (1) преобразуем следующим образом. Заменим величину γ выражением $(y/y_c)^2$ и обозначим $PR^2/\mu w_a = G$. Введем коэффициент $\theta = \theta(x)$ — характеристическую функцию, значение которой определяется зоной течения. Коэффициент θ полагаем равным единице в турбулентном ядре и нулю в вязком подслое, около стенки. В переходной зоне величину θ в первом приближении можно принять равной 0.5. Положение точек перемены значений θ зависит, таким образом, только от числа Re.

В результате получим уравнение движения

$$y'' + \frac{y'}{x} = G\left(1 - \theta(x)\,\frac{y^2}{y^2(0)\left(1 - \frac{x^2}{2}\right)}\right).$$
$$0 \le x \le x_i, \qquad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{3}$$

Эквивалентом уравнения неразрывности в нашем случае является интегральное соотношение для объемного расхода

$$2\pi \int_0^R w(r) r dr = w_a \pi R^2$$

или (после преобразования)

$$2 \int_0^1 y x dx = 1.$$

Эти соотношения определяют полный расход через все сечение и при известном расходе — среднюю скорость w_a.

При рассмотрении отдельных зон течения соотношение для расхода приобретет вид

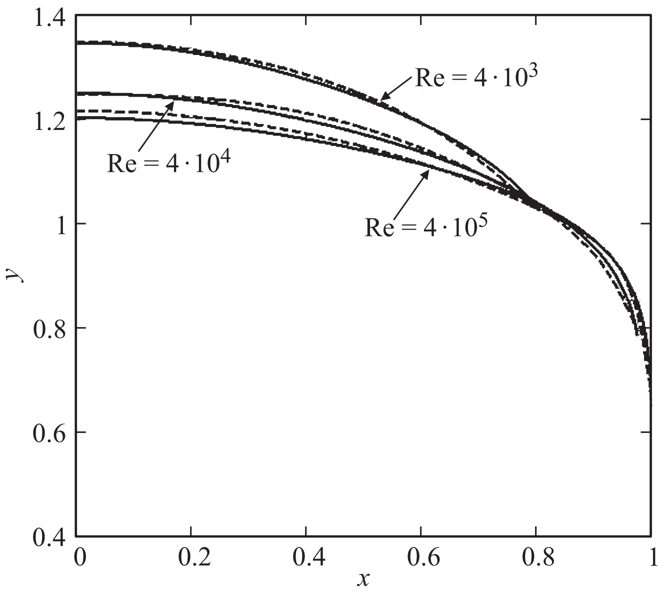
$$2 \int_0^{x_i} y_i x dx = 2 \int_0^{x_i} \varphi x dx = J_i, \qquad i = 1,\ 2,\ 3, \tag{4}$$

где J_i — относительный расход, а $\varphi(x)$ — принятое эталонное распределение скоростей. В нашем случае это распределение по формуле Рейхардта, приведенной к виду $\varphi(x) = w/w_a$. Положение точек x_i, разделяющих подобласти, определяется трехслойной схемой Кармана. Может быть выбрана и иная схема потока.

Постановка задачи приобретает теперь окончательный вид и содержит уравнение движения (3), уравнение неразрывности (4) и граничные условия: на левой границе (при $x = 0$) $y_i'(0) = 0$, на правой границе (при $x = x_i$) $y_i = y_i^*$.

Расчет поля скоростей может производиться как для всех зон течения последовательно, от стенки к оси, так и для каждой зоны отдельно (без расчета остальных). В этом случае граничные условия для них можно получить из любого эталонного решения. В пристенной зоне, где $\theta = 0$, решение соответствует известному параболическому закону.

Рассмотрим нахождение профиля скорости в ядре турбулентного потока. Интегральное условие (4) заменяется эквивалентным дифференциальным (с соответствующим краевым условием), после чего



Расчетные (пунктирные) и эталонные (сплошные) профили скоростей турбулентного ядра потока в трубе при различных числах Re (x — относительный радиус, y — относительная скорость).

задача сводится к системе трех обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка. Величина $y(0)$ определяется итерационно. Ее начальное значение берется из известного диапазона значений 1.15–1.4. Эталонное распределение φ, как отмечено выше, определяется формулой Рейхардта. Коэффициент θ в ядре потока равняется единице. Величина G с учетом первой из формул (2) и знака градиента равна $G = -\xi(\mathrm{Re})\mathrm{Re}/8$.

Результаты расчетов профиля скоростей течения в турбулентном ядре потока представлены на рисунке. Расчетные и эталонные скорости достаточно близки. Осевые скорости как при $\mathrm{Re} = 4 \cdot 10^3$, так и при $\mathrm{Re} = 4 \cdot 10^4$ оказались практически идентичными, при $\mathrm{Re} = 4 \cdot 10^5$ их расхождение не превысило 1.4%.

Эта же задача, но уже для всего поля течения, была решена с помощью компьютерной системы Comsol Multiphysics, в которой есть возможность в уравнении ламинарного течения задать дополнительное сопротивление F аналитически, а именно в виде

$$F = \theta \frac{\partial p}{\partial z} \frac{v^2}{v(0)^2 \left(1 - \frac{r^2}{2}\right)}, \tag{5}$$

где v, m/s — скорость в направлении оси z трубы.

Уравнение неразрывности изменений не потребовало. Таким образом, можно констатировать, что турбулентное течение в трубе описывается „стандартным" уравнением Навье–Стокса с объемной силой F, соответствующей выражению (5). Единственным параметром, полностью определяющим расчет скорости, является число Re (точнее, входящие в него величины).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-08-00442а).

Список литературы

[1] *Повх И.Л.* Техническая гидромеханика. Л.: Машиностроение, 1970. 524 с.
[2] *Zagarola M.V., Smits A.J.* // J. Fluid Mech. 1998. V. 373. P. 33.
[3] *Баренблатт Г.И., Корин А.Дж., Простокишин В.М.* // УФН. 2014. Т. 184. № 3. С. 265.
[4] *Cebeci T.* Turbulence Models and Their Application. California: Horizons Publishing Inc. Long Beach, 2004. 120 p.
[5] *Заволженский М.В., Руткевич П.Б.* Развитая турбулентность в трубах. М.: ИКИ РАН, 2007. № 2140. 38 с.
[6] *Reichardt H.* // Z. Angew. Math. Mech. 1951. Bd. 31. Nr. 7. S. 208.
[7] *Жиленко Д.Ю., Кривоносова О.Э.* // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. В. 1. С. 12–19.
[8] *Приходько А.А., Алексеенко С.В.* // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40. В. 19. С. 75–82.
[9] *Кузнецов Г.В., Стрижак П.А.* // Письма в ЖТФ. 2014. Т. 40. В. 12. С. 11–18.
[10] *Аэров М.Э., Тодес О.М.* Гидравлические и тепловые основы работы аппаратов со стационарным и кипящим зернистым слоем. Л.: Химия, 1968. 510 с.
[11] *Филиппов Г.А., Меламед Л.Э., Мастюкин В.П., Кондитеров М.В., Тропкина А.И.* // ТВТ. 2004. Т. 42. № 6. С. 954.