

01;03

## Эйлерово-лагранжево описание кавитирующего течения

© У. Ибен<sup>1</sup>, Н.Г. Иванов<sup>2</sup>, И.И. Исаенко<sup>2,3</sup>, А.А. Шмидт<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Dept. CR/ARF Corporate Sector Research and Advance Engineering (CR)  
Robert-Bosch-Campus 1 71272 Renningen, Germany

<sup>2</sup> Санкт-Петербургский политехнический университет, Санкт-Петербург,  
Россия

<sup>3</sup> Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН, Санкт-Петербург,  
Россия

E-mail: alexander.schmidt@mail.ioffe.ru

Поступило в Редакцию 17 апреля 2015 г.

Предложена методика расчета кавитирующих течений, основанная на эйлерово-лагранжевом описании многофазных сред, использующих модель объемной гетерогенной нуклеации для описания образования и роста кавитационных пузырей. Приведены результаты тестовых расчетов, которые показывают эффективность представленной модели.

Проблема течений кавитирующей жидкости представляет большой интерес как с точки зрения развития теоретических моделей, так и для практических приложений [1,2]. Классическая кавитация является результатом падения давления в потоке жидкости ниже уровня давления насыщенных паров  $P_s$ , что сопровождается нуклеацией и развитием пузырьков пара. Реальные жидкости содержат гетерогенные примеси в виде микропузырьков газа или твердых частиц, которые служат „зародышами“, на которых происходит образование паровых пузырьков при падении давления, такой процесс называют объемной гетерогенной нуклеацией. Данная работа посвящена исследованию течения кавити-

рующей жидкости с использованием модели гетерогенной объемной кавитации на основе эйлерово-лагранжева описания двухфазного пузырькового течения.

Согласно экспериментальным исследованиям, проведенным для дистиллированной воды [3], число пузырьков  $N$  определенного радиуса  $R$  может быть выражено формулой

$$N(R) = N_0 \frac{(V/V_*)^2}{1 + (V/V_0)^4}. \quad (1)$$

Здесь  $N_0 = 1.5 \cdot 10^{11} \text{ м}^{-3}$  — оценочное число пузырьков в единице объема жидкости,  $V/V_*$  — отношение объемов пузырьков с текущим радиусом  $R$  и радиусом, соответствующим максимуму распределения (1),  $R_* = 0.85 \text{ мкм}$ .

С падением давления на „зародышах“, размер которых больше или равен размеру „критического“ пузыря  $R_{cr}$  для текущего давления, происходит образование и рост кавитационных пузырей, которые, взаимодействуя друг с другом, образуют кавитационные облака или каверны. С ростом давления происходит обратный процесс — пузырьки и каверны схлопываются, порождая ударные волны и кумулятивные струи, являющиеся причиной кавитационной эрозии.

В последнее время активно развивается эйлерово-лагранжево описание двухфазных сред [4,5], объединяющее модель динамики сплошной среды для расчета движения несущей фазы (жидкости) и модель пробных частиц, используемую для описания движения дисперсной фазы (пузырьков). Такой подход обеспечивает детальное описание динамики гетерогенной среды, в частности, позволяет анализировать влияние распределения дисперсных включений по размерам на их динамику.

Основными этапами эйлерово-лагранжева алгоритма являются: эйлеров этап (решение системы уравнений динамики сплошной среды для расчета полей течения несущей фазы), лагранжев этап (решение уравнений динамики пробных частиц дисперсной фазы), этап обратной связи (пересчет полей течения с учетом межфазного взаимодействия).

Уравнения динамики пробного пузырька, выражающие законы сохранения его массы и энергии, после некоторых преобразований можно записать следующим образом [4]:

$$\frac{dP_v}{dt} = P_v \left( \frac{1}{T_v} \frac{dT_v}{dt} - \frac{3}{R_B} \left[ \frac{dR_B}{dt} - \frac{\eta_{ac} T_v}{P_v} \frac{\sqrt{R_v}}{\sqrt{2\pi}} \left( \frac{P_s(T_l)}{\sqrt{T_l}} - \frac{P_v}{\sqrt{T_v}} \right) \right] \right), \quad (2)$$

$$\frac{dT_v}{dt} = -3 \frac{T_v}{R_v P_v} \left[ (\gamma - 1) \left( P_v + \frac{2\Sigma}{R_B} \right) \frac{dR_B}{dt} + \eta_{ac} P_s(T_l) (T_v - T_l) \sqrt{\frac{R_v}{2\pi T_l}} \right]; \quad (3)$$

здесь  $P_v$ ,  $T_v$ ,  $R_B$  — параметры пузырька (давление и температура пара и радиус),  $T_l$  — температура окружающей жидкости,  $P_s$  — давление насыщенного пара,  $\eta_{ac}$  — коэффициент аккомодации, равный 0.04 для воды,  $R_v$  — газовая постоянная,  $\gamma = 1.4$  — показатель адиабаты,  $\Sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения.

В систему уравнений включается также уравнение Рэлея–Плессе, применимое для описания динамики сферически-симметричного газового пузырька. Это уравнение связывает скорость и ускорение движения межфазной границы с давлением внутри пузырька  $P_v$ , давлением окружающей жидкости  $P$  и ее физическими свойствами (плотность  $\rho_l$ , вязкость  $\nu_l$ , поверхностное натяжение  $\Sigma$ ):

$$R_B \frac{d^2 R_B}{dt^2} + \frac{3}{2} \left( \frac{dR_B}{dt} \right)^2 = \left( \frac{P_v - P}{\rho_l} \right) - \frac{4\nu_l}{R_B} \dot{R}_B - \frac{2\Sigma}{\rho_l R_B}. \quad (4)$$

В данной работе, одной из целей которой является сравнение эйлерова описания кавитации в потоке с лагранжевым, не рассматривается влияние параметров дисперсной фазы, полученных на лагранжевом этапе на течение несущей фазы.

Движение пробного пузырька в двумерном случае описывается следующей системой уравнений:

$$d\mathbf{X}/dt = \mathbf{F}, \quad (5)$$

здесь  $\mathbf{X} = [x, y, V_x, V_y]'$  и  $\mathbf{F} = [V_x, V_y, F_x/m, F_y/m]'$  — векторы, содержащие координаты частиц, компоненты их скорости и действующих массовых сил. Учитывая малость характерных чисел Стокса (отношение времени релаксации частиц к масштабному времени течения) и скоростей всплытия пузырьков по сравнению со скоростью течения [4], массовые силы можно исключить из рассмотрения и описывать движение пузырьков в соответствии с полем течения несущей жидкости.

В качестве начальных условий для системы (5) используются параметры (координаты и скорость) в выбранных начальных точках.

На каждом временном шаге производятся перемещение пробной частицы в соответствии с уравнениями (5) и расчет критического

радиуса в текущей точке

$$R_{cr} = 2\Sigma / (P_s - P_\infty). \quad (6)$$

Определение числа активных в данный момент пузырьков (с радиусом больше текущего критического  $R_{cr}$ ) и их начальной объемной доли с учетом их исходного распределения по размерам производится интегрированием функции распределения пузырьков в пределах от  $R_{cr}$  до  $R_m = 6 \mu\text{m}$  [5,6]

$$N = \int_{R_{cr}}^{R_m} \frac{dN(R)}{dR} dR. \quad (7)$$

Для определения характеристик пробного пузырька в данной точке решается система уравнений (2)–(4).

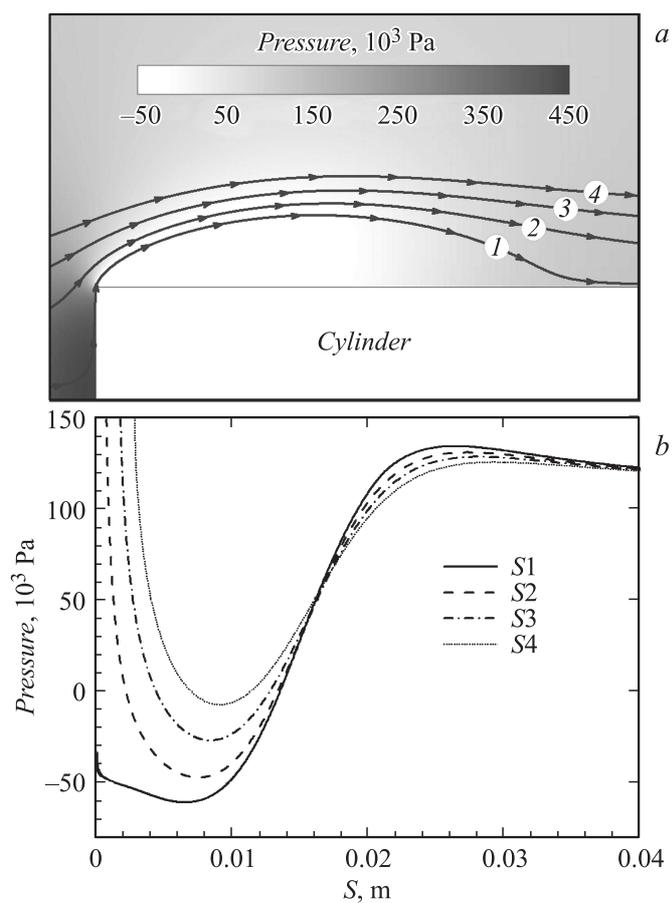
На основании рассчитанного по формуле (7) числа активных пузырьков и их размеров, полученных в ходе решения уравнения Рэлея–Плессе, вычисляется распределение объемной доли пара. При этом распределение зародышей по размерам аппроксимируется кусочно-постоянной функцией, для каждого значения которой вводится свой набор пробных пузырей.

Предполагается, что пробные пузыри сохраняют сферическую форму, распределение параметров внутри пузырька однородно; газ считается идеальным. При значении радиуса  $i$ -й частицы  $R_i > R_{cr}$  модель „включается“ и работает до схлопывания последнего пробного пузырька, „замораживая“ параметры пузырьков по достижении значения объемной доли пара  $\alpha = 1$ .

Система уравнений решалась методом Гаусса–Зейделя; для продвижения по времени использовалась неявная схема Адамса второго порядка.

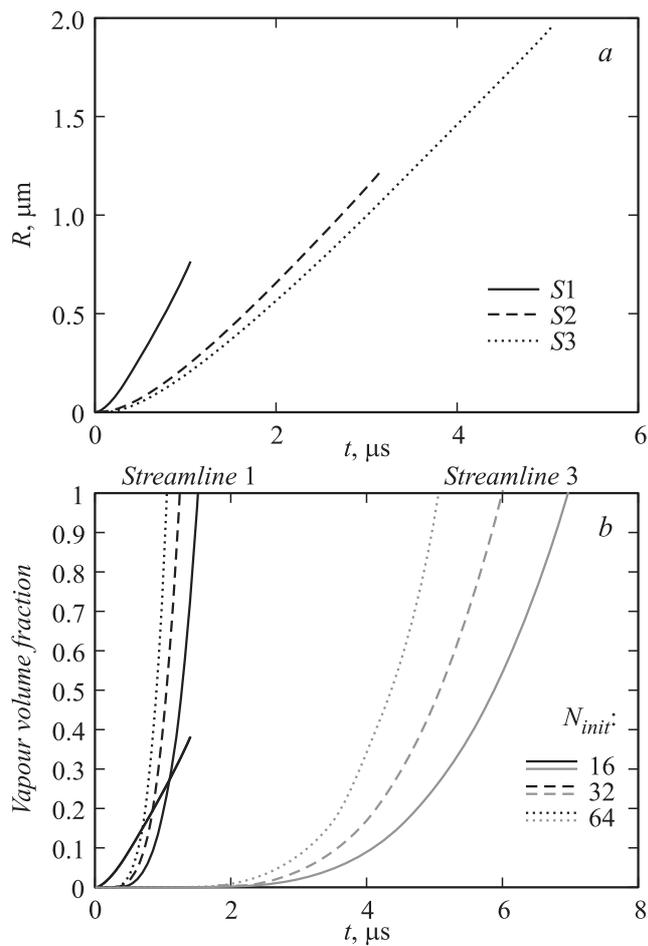
При тестировании модели рассматривалось возникновение и развитие кавитации при продольном обтекании цилиндра водой. Число Рейнольдса  $Re = 136\,000$ , температура воды  $25^\circ\text{C}$ . Поле течения без учета кавитации рассчитывалось с помощью программного пакета ANSYS CFX.

На рис. 1, *a* для рассматриваемого течения показано распределение давления и характерные линии тока. Рис. 1, *b* демонстрирует изменение давления вдоль выбранных линий тока. Видно, что для рассмотренных линий тока существует область, в которой давление падает ниже давления насыщенного пара.



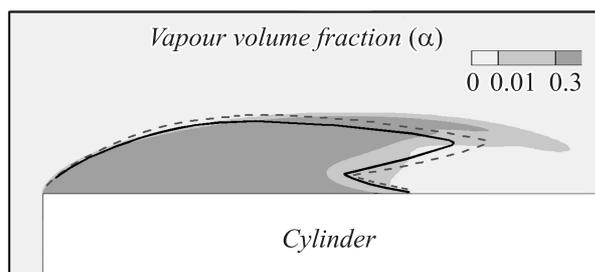
**Рис. 1.** *a* — поле давления и линии тока при продольном обтекании цилиндра (здесь и далее величина давления отсчитывается от нулевого уровня). *b* — распределения давления вдоль линий тока.

Рис. 2, *a* отображает эволюцию пробного пузырька радиусом  $6\ \mu\text{m}$  вдоль первых трех линий тока (падение давления вдоль четвертой оказалось недостаточным для развития пузырьков такого размера), рассчитанную до момента равенства объемной доли пузырьков  $\alpha = 1$ .



**Рис. 2.**  $a$  — рост пузырьков с течением времени вдоль линий тока.  $b$  — изменение объемной доли паровой фазы вдоль 1-й и 3-й линий тока для разного количества пробных пузырей  $N_{init}$ .

Видно, что после определенного периода радиус пузырька растет со временем линейно, т.е. можно пренебречь второй производной радиуса по времени в уравнении Рэлея–Плессе. Причем чем больше



**Рис. 3.** Распределение объемной доли пара, полученное с помощью программного пакета ANSYS CFX, изолинии показывают результаты эйлерово-лагранжево описания кавитирующего потока (сплошная линия —  $\alpha = 0.3$ , пунктирная линия —  $\alpha = 0.01$ ).

падение давления, тем меньше длительность нелинейного роста пузыря. Поскольку при больших падениях давления увеличивается и число „активных“ пузырьков, время их роста до момента достижения значения объемной доли пара  $\alpha = 1$  уменьшается.

На рис. 2, *b* показано изменение объемной доли паровой фазы вдоль характерных линий тока в зависимости от количества интервалов кусочно-постоянного представления функции распределения зародышей по размерам ( $N_{init}$ ). Видно, что с ростом давления жидкости в области кавитации роль количества интервалов разбиения растет. При таких давлениях это, по-видимому, связано с переоценкой вклада зародышей большего размера при малых значениях  $N_{init}$ . Отметим, что этот параметр не влияет на характер роста отдельных пузырьков, изменяя лишь относительный вклад зародышей разных размеров.

На рис. 3 показаны изолинии объемной доли пара 1 и 30%, которые могут рассматриваться как характеристики положения и формы кавитационной каверны, и распределение объемной доли пара, полученное с использованием пакета ANSYS CFX на основе модели кавитации [7]. Видно, что развитая в данной работе модель достаточно точно определяет переднюю границу кавитационной каверны и обеспечивает качественное совпадение формы и положения ее задней границы при сравнении с результатами расчетов в коммерческом пакете. При этом развитая модель позволяет анализировать динамику кавитационных пузырей в поле меняющегося давления жидкости и их распределение

по размерам, что невозможно сделать, используя существующие полу-эмпирические модели кавитации.

Проведенные тестовые расчеты показывают эффективность представленной модели кавитации, основанной на эйлерово-лагранжевом описании многофазных сред, и на модели гетерогенной нуклеации. Следует отметить, что перспективным направлением может явиться разработка гибридных методов моделирования кавитации, основанных на комбинировании методов Эйлера–Эйлера и Эйлера–Лагранжа.

## Список литературы

- [1] *Iben U.* Modeling of Cavitation // SAMS. 2002. V. 42. N 9. P. 1283–1307.
- [2] *Liu D.-M. et al.* // Thermal Science. 2011. V. 15. Suppl. 1. P. S95–S101.
- [3] *Kedrinskii V.K.* Hydrodynamics of Explosion: Experiments and Models. Berlin: Springer, 2005.
- [4] *Kumzerova E.Yu., Schmidt A.A.* // Proc. of 5th International Conference on Multiphase Flow. ICMF'04. Yokohama, Japan, May 30–June 4, 2004. Paper N 309 (on CD).
- [5] *Петров Н.В., Шмидт А.А.* // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. В. 10. С. 1–8.
- [6] *Petrov N.V., Schmidt A.A.* // Experimental Thermal and Fluid Science. 2015. V. 60. P. 367–373.
- [7] *Bakir F., Rey R., Gerber A.G., Belamri T., Hutchinson B.* // Int. J. Rotating Machinery. 2004. V. 10. N 1. P. 15–25.