

01.3

Индукцированная шумом потеря мультифрактальности в динамике автоколебательных систем

© А.Н. Павлов^{1,2}, О.Н. Павлова¹, Г.М. Шихалов¹¹ Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского² Саратовский государственный технический университет им. Гагарина Ю.А.

E-mail: pavlov.alexeyn@gmail.com

Поступило в Редакцию 6 июля 2015

Рассматривается эффект индуцированной шумом потери мультифрактальности в динамике нелинейных систем, демонстрирующих наличие сосуществующих режимов автоколебаний. Обсуждается возможность разделения режимов детерминированной и стохастической динамики с применением метода мультифрактального формализма, основанного на вейвлет-преобразовании.

Нетривиальная роль шума в динамике нелинейных систем являлась предметом многочисленных исследований, которые позволили установить, что флуктуации могут приводить к увеличению регулярности колебаний, улучшению отношения сигнал/шум, появлению режимов динамики, которые не реализуются в отсутствие шума и т.д. К числу хорошо изученных эффектов, свидетельствующих о нетривиальном поведении нелинейных зашумленных систем, можно отнести, например, эффект стохастического резонанса [1]. В условиях мультистабильности шум индуцирует переходы между сосуществующими аттракторами в фазовом пространстве динамической системы, что приводит к изменению статистических характеристик режимов сложной динамики. Соответствующие изменения могут быть незначительными с точки зрения таких характеристик, как спектр мощности или показатели Ляпунова, однако при этом может существенно измениться структура сигнала, отражением чего служит изменение спектра сингулярностей [2]. Меры мультифрактальности являются чувствительными характеристиками режимов динамики, позволяющими выявлять изменения статистических свойств процессов, которые могут не диагностироваться с помощью стандартных методов цифровой обработки сигналов [3–5]. Это, в

частности, обеспечивает возможность предлагать эффективные диагностические критерии, применимые в исследованиях динамики живых систем [6–8].

В данной работе анализируется эффект индуцированной шумом потери мультифрактальности в сложной динамике автоколебательных систем. В качестве примера модели со сложным поведением была выбрана модель связанных систем Ресслера

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\omega_1 y_1 - z_1 + \gamma(x_2 - x_1) + I\xi(t), \\ \frac{dy_1}{dt} &= \omega_1 x_1 + a y_1, \quad \frac{dz_1}{dt} = b + z_1(x_1 - c), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\omega_2 y_2 - z_2 + \gamma(x_1 - x_2), \\ \frac{dy_2}{dt} &= \omega_2 x_2 + a y_2, \quad \frac{dz_2}{dt} = b + z_2(x_2 - c) \end{aligned} \quad (1)$$

со следующими значениями параметров $\omega_1 = 1.0093$, $\omega_2 = 0.9907$, $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 7.2$, $\gamma = 0.02$. Интенсивность I нормально распределенного случайного процесса $\xi(t)$ варьировалась для исследования изменений в статистических характеристиках последовательностей времен возврата в секущую Пуанкаре, заданную уравнением $x_2 + y_1 = 0$. Соответствующие последовательности анализировались с применением метода мультифрактального формализма, основанного на вейвлет-преобразовании [3]. Для анализа были выбраны последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре, содержащие 5000 отсчетов. На первом этапе метода [3] проводилось вейвлет-преобразование последовательностей времен возврата $x(i)$

$$W(a, k) = \frac{1}{\sqrt{a}} \sum_{i=0}^N x(i) \psi^* \left(\frac{i-k}{a} \right) \quad (2)$$

с использованием в качестве базисной функции ψ вейвлета МНАТ

$$\psi(t) = (1 - t^2) \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right). \quad (3)$$

Параметры масштаба a и смещения k вейвлет-функции ψ варьировались в широких пределах. В точках сингулярного поведения $x(k^*)$ на поверхности вейвлет-коэффициентов $W(a, k)$ формируются линии локальных экстремумов, вдоль которых коэффициенты вейвлет-

преобразования демонстрируют экспоненциальную зависимость от масштаба $W(a, k^*) \sim a^h$. Показатель степени (показатель Гельдера) является характеристикой корреляционных свойств процесса. Для сигналов сложной структуры проводится вычисление спектра показателей Гельдера $h(q)$, где с помощью выбора индекса q анализируется диапазон малых ($q < 0$) или больших ($q > 0$) масштабов. Для более точного расчета спектра $h(q)$ на втором этапе метода [3] применяют подход, основанный на построении обобщенных статистических функций [2]. С этой целью выделяются линии локальных экстремумов $W(a, k)$ или скелетон вейвлет-преобразования $L(a)$. Обобщенные статистические функции

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} |W(a, k_l(a))|^q \sim a^{\tau(q)} \quad (4)$$

также демонстрируют степенную зависимость от масштаба наблюдения. В формуле (4) $k_l(a)$ характеризует расположение максимума модуля вейвлет-коэффициентов на линии скелетона с номером l . Спектр показателей Гельдера определяется путем дифференцирования величин $\tau(q)$

$$h(q) = \frac{d\tau(q)}{dq}. \quad (5)$$

Рассмотрим применение данного подхода для исследования динамики модели (1). На рис. 1 приведены результаты интегрирования уравнений этой модели и расчета спектров мощности режимов динамики в отсутствие шума ($I = 0$) и при наличии флуктуаций, аддитивно добавляемых в уравнения ($I = 0.04$). В соответствии с рис. 1 заметные различия в детерминированной ($I = 0$) и стохастической ($I > 0$) динамике системы (1) отсутствуют. Расчеты одной из наиболее информативных характеристик сложной динамики — старшего показателя Ляпунова, проведенные по последовательности времен возврата в секущую Пуанкаре с применением метода [9], также свидетельствуют о том, что рассматриваемые режимы почти идентичны ($\lambda_1 = 0.053$ и $\lambda_1 = 0.052$).

Однако применение мультифрактального формализма, позволяющего обнаруживать более „тонкие“ изменения структуры сигналов, выявило существенные отличия в спектре показателей Гельдера для случаев детерминированной и стохастической динамики модели (1) — рис. 2. В первом случае динамика характеризуется четко выраженной

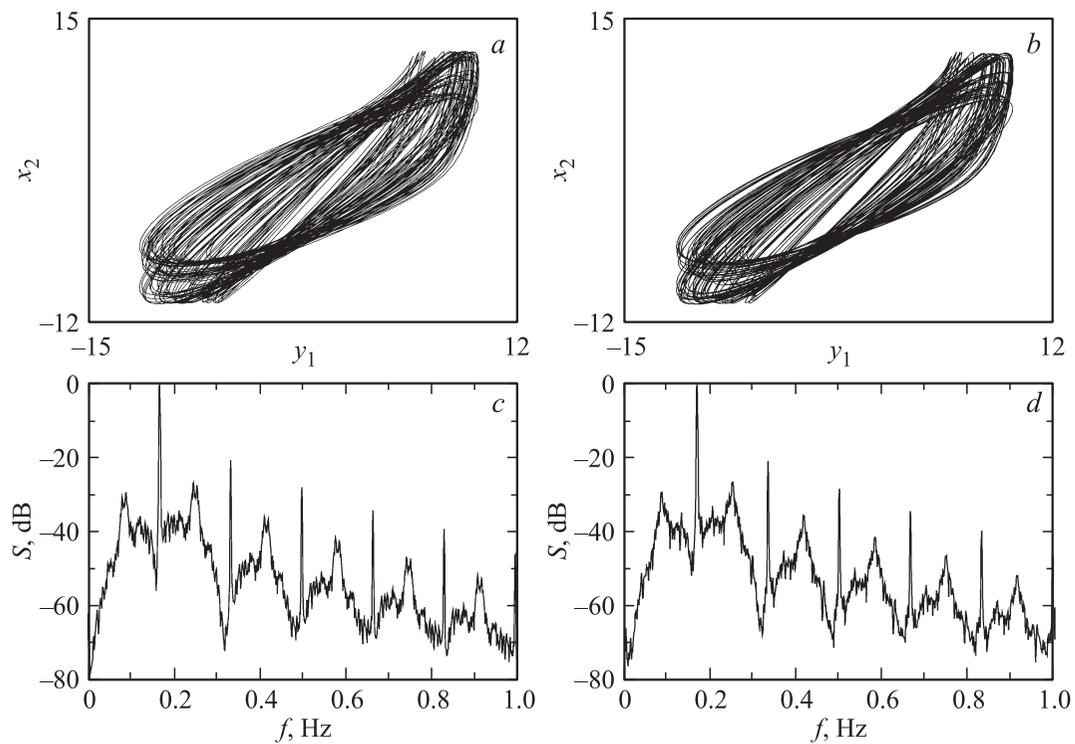


Рис. 1. Фазовые портреты и спектры мощности режимов детерминированной (*a, c*) и стохастической (*b, d*) динамики модели двух связанных систем Ресслера (1).

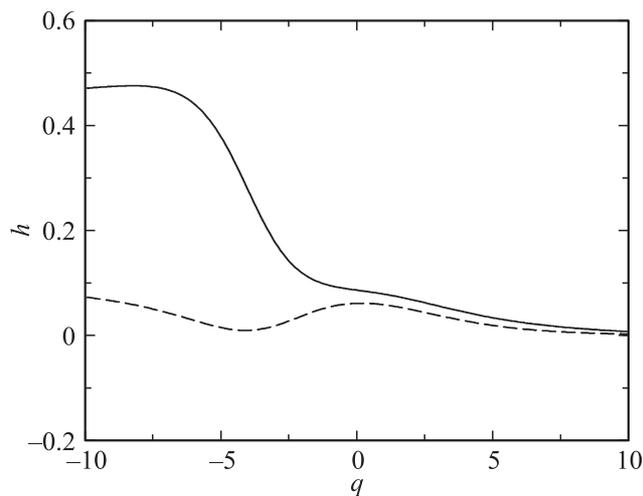


Рис. 2. Спектры показателей Гельдера режимов детерминированной (сплошная линия) и стохастической (пунктирная линия) динамики.

мультифрактальностью (скейлинговые характеристики для малых и больших флуктуаций существенно отличаются), тогда как во втором случае происходит „выравнивание“ показателей скейлинга, и процесс становится более однородным. Соответствующие изменения можно интерпретировать как потерю мультифрактальности, индуцированную шумом. Аналогичный эффект обнаруживается при стохастическом резонансе [10], но случай стохастического резонанса в бистабильной системе, находящейся под внешним периодическим и шумовым воздействием, является существенно более простым по сравнению с рассматриваемыми в данной работе индуцированными шумом переходами между сосуществующими нерегулярными режимами динамики.

Следует отметить ряд важных обстоятельств. В отличие от стохастического резонанса, изменения меры мультифрактальности при изменении интенсивности шума не демонстрируют четко выраженных резонансных зависимостей, поэтому изучение закономерностей индуцированной шумом потери мультифрактальности от интенсивности присутствующих флуктуаций требует дополнительных исследований. Однако диагностика соответствующих изменений может быть проведена по

выборкам сравнительно малой длительности. В частности, достоверные изменения режима динамики на основе метода [3] могут быть зафиксированы по последовательностям, содержащим порядка 200–300 отсчетов [8]. Это позволяет рассматривать одно из возможных применений данного подхода в задачах передачи информации в защищенном режиме, применяющих хаотические несущие сигналы [11,12]. Переключения между режимами динамики, представленными на рис. 1, достоверно не диагностируются на основе стандартных методов цифровой обработки нерегулярных сигналов, но привлечение метода мультифрактального формализма, основанного на вейвлет-преобразовании, позволяет четко разделить соответствующие режимы динамики (рис. 1) по сравнительно небольшому объему выборки.

Исследование выполнено при поддержке грантов РФФИ № 14-52-12002 и SFB-910, а также грантов Министерства образования и науки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности № 3.23.2014/К (тема СГТУ-157) и базовой части государственного задания (тема СГТУ-141).

Список литературы

- [1] *Benzi R., Sutera A., Vulpiani A.* // J. Phys. A. 1981. V. 14. P. L453.
- [2] *Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.* // Int. J. Bifurcation & Chaos. 1994. V. 4. P. 245.
- [3] *Muzy J.F., Bacry E., Arneodo A.* // Phys. Rev. E. 1993. V. 47. P. 875.
- [4] *Stanley H.E., Nunes Amaral L.A., Goldberger A.L. et al.* // Physica A. 1999. V. 270. P. 309.
- [5] *Павлов А.Н., Анищенко В.С.* // Успехи физических наук. 2007. Т. 177. С. 859; *Pavlov A.N., Anishchenko V.S.* // Phys. Usp. 2007. V. 50. P. 819.
- [6] *Ivanov P.Ch., Nunes Amaral L.A., Goldberger A.L. et al.* // Nature. 1999. V. 399. P. 461.
- [7] *Pavlov A.N., Ziganshin A.R., Klimova O.A.* // Chaos, Solitons & Fractals. 2005. V. 24. P. 57.
- [8] *Pavlov A.N., Semyachkina-Glushkovskaya O.V., Lychagov V.V. et al.* // Chaos, Solitons & Fractals. 2015. V. 77. P. 6.
- [9] *Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A.* // Physica D. 1985. V. 16. P. 285.
- [10] *Silchenko A., Hu C.K.* // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 041 105.
- [11] *Pecora L.M., Carroll T.L.* // Phys. Rev. Lett. 1990. V. 64. P. 821.
- [12] *Короновский А.А., Москаленко О.И., Храмов А.Е.* // Успехи физических наук. 2009. Т. 179. С. 1281; *Koronovskii A.A., Moskalenko O.I., Hramov A.E.* // Phys. Usp. 2009. V. 52. P. 1213.