

05

О характере деформаций на свободной поверхности упругого тела

© Н.В. Чертова

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, Томск

E-mail: chertova@ispms.tsc.ru

Поступило в Редакцию 17 июня 2015 г.

В ходе решения задачи отражения упругих волн на свободной поверхности получены аналитические выражения, определяющие ее деформацию. Найдены коэффициенты отражения, которые позволили записать и проанализировать выражения для различных мод деформации и поворота свободной поверхности в зависимости от угла падения первичной волны и упругих параметров среды. Рассмотрены особенности деформаций свободной поверхности для падающих продольных и поперечных волн.

Свободные поверхности, определяющие границы тела при некоторых схемах внешнего нагружения и являющиеся характерной особенностью пористых материалов и сред при наличии трещин, оказывают существенное влияние на процессы деформации и разрушения [1,2]. В последние десятилетия актуальность изучения роли свободных поверхностей определяется интенсивными исследованиями и разработками наноструктурных материалов, в частности пористой нанокерамики [3–5]. Чтобы установить, какие особенности процессов деформирования могут быть обусловлены наличием свободных поверхностей, рассмотрим закономерности отражения плоской гармонической волны от свободной поверхности. Традиционной целью аналогичных исследований является нахождение коэффициентов отражения, которые связывают амплитуды отраженных волн с амплитудой падающей волны, и определение потоков энергии первичной и вторичных волн [6,7]. В данной работе коэффициенты отражения будут использованы для анализа различных мод деформации, характеризующих формоизменение бесконечно малого элемента среды и его поворот. Если считать, что скорость упругого поворота является вихрем среды, то повороты, сопровождающие распространение гармонической волны, определяют вихревые моды деформации.

Предположим, что на свободную поверхность, определяемую нормалью $n \parallel z$, падает продольная волна, направление распространения которой образует некоторый угол с осью z в плоскости yz . Продольная волна, сопровождаемая деформациями растяжения-сжатия в системе координат, связанной с направлением распространения волны, называется волной расширения [7]. Упругая среда, расположенная в области $z < 0$, характеризуется параметрами μ , λ , ρ . Вектор смещений первичной волны расширения в системе координат xuz имеет компоненты

$$U_z^0 = A_l^0 \cos \theta_l^0 \exp(ik_l^0 r^0), \quad U_y^0 = A_l^0 \sin \theta_l^0 \exp(ik_l^0 r^0), \quad (1)$$

где A_l^0 — амплитуда, θ_l^0 — угол падения, k_l^0 — волновой вектор, $r^0 = z \cos \theta_l^0 + y \sin \theta_l^0$ — радиус-вектор падающей волны. При записи (1) множитель $\exp(-i\omega t)$ опущен, здесь ω — частота, t — время. Дифференцируя (1) по координатам, получим выражения для компонент тензора упругих дисторсий, которые определяют деформации и поворот:

$$\begin{aligned} U_{z,z}^0 &= E_{z,z}^0 = ik_l^0 A_l^0 (\cos \theta_l^0)^2 \exp(ik_l^0 r^0), \\ U_{y,y}^0 &= E_{y,y}^0 = ik_l^0 A_l^0 (\sin \theta_l^0)^2 \exp(ik_l^0 r^0), \\ U_{z,y}^0 &= U_{y,z}^0 = ik_l^0 A_l^0 \cos \theta_l^0 \sin \theta_l^0 \exp(ik_l^0 r^0), \\ E_{zy}^0 &= (U_{z,y}^0 + U_{y,z}^0)/2 = U_{z,y}^0, \\ E_v^0 &= E_{z,z}^0 + E_{y,y}^0 = ik_l^0 A_l^0 \exp(ik_l^0 r^0), \\ W_{zy}^0 &= (U_{z,y}^0 - U_{y,z}^0)/2 = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Поскольку на свободной поверхности при произвольном угле падения продольной или поперечной волны возникают отраженные волны обеих поляризований [6], смещения для отраженной волны задаются выражениями

$$\begin{aligned} U_z^- &= -A_l^- \cos \theta_l^- \exp(ik_l^- r_l^-) - A_t^- \sin \theta_t^- \exp(ik_t^- r_t^-), \\ U_y^- &= A_l^- \sin \theta_l^- \exp(ik_l^- r_l^-) - A_t^- \cos \theta_t^- \exp(ik_t^- r_t^-). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь $A_{l(t)}^-$ — амплитуды, $\theta_{l(t)}^-$ — углы отражения, $r_{l(t)}^- = -z \cos \theta_{l(t)}^- + y \sin \theta_{l(t)}^-$ — радиус-векторы, $k_{l(t)}^-$ — волновые вектора отраженных

волн, $k_l^0 = k_l^- = \omega/C_l$, $k_t^- = \omega/C_t$, C_l , C_t — скорости упругих волн. Углы падения и отражения связаны равенствами, известными как законы отражения

$$\theta_l^0 = \theta_t^-, \quad \sin \theta_t^- = C_t/C_l \sin \theta_l^0. \quad (4)$$

Компоненты деформаций для отраженной волны примут вид

$$\begin{aligned} E_{zz}^- &= ik_l^- A_t^- (\cos \theta_t^-)^2 \exp(ik_l^- r_t^-) + ik_t^- A_t^- \sin \theta_t^- \cos \theta_t^- \exp(ik_t^- r_t^-), \\ E_{yy}^- &= ik_l^- A_t^- (\sin \theta_t^-)^2 \exp(ik_l^- r_t^-) - ik_t^- A_t^- \cos \theta_t^- \sin \theta_t^- \exp(ik_t^- r_t^-), \\ E_{zy}^- &= (-ik_l^- A_t^- \sin 2\theta_t^- \exp(ik_l^- r_t^-) + ik_t^- A_t^- \cos 2\theta_t^- \exp(ik_t^- r_t^-))/2, \\ W_{zy}^- &= ik_t^- A_t^- \exp(ik_t^- r_t^-)/2, \quad E_v^- = ik_l^- A_t^- \exp(ik_l^- r_t^-). \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно (1), (3), суммарные смещения на границе определяются выражениями

$$U_z = (A_l^0 - A_t^-) \cos \theta_l^0 - A_t^- \sin \theta_t^-, \quad U_y = (A_l^0 + A_t^-) \sin \theta_l^0 - A_t^- \cos \theta_t^-,$$

соответствующие деформации будут равны

$$\begin{aligned} E_{zz} &= ik_l^0 (A_t^- + A_l^0) (\cos \theta_l^0)^2 + ik_t^- A_t^- \sin \theta_t^- \cos \theta_t^-, \\ E_{yy} &= ik_l^0 (A_t^- + A_l^0) (\sin \theta_l^0)^2 - ik_t^- A_t^- \cos \theta_t^- \sin \theta_t^-, \\ E_{zy} &= [ik_l^0 (A_l^0 - A_t^-) \sin 2\theta_l^0 + ik_t^- A_t^- \cos 2\theta_t^-]/2, \\ W &= ik_t^- A_t^- /2, \quad E_v = ik_l^0 (A_t^- + A_l^0). \end{aligned} \quad (6)$$

Граничные условия на свободной поверхности предполагают равенство нулю напряжений, действующих на эту поверхность:

$$\sigma_{zz} = 2\mu E_{zz} + \lambda E_v = 0, \quad \sigma_{zy} = 2\mu E_{zy} = 0. \quad (7)$$

Подставляя (6) в (7), получим систему уравнений относительно коэффициентов отражения продольной и поперечной волны, решение

которой имеет вид

$$R_{ll} = \frac{C^2 \sin 2\theta_t^- \sin 2\theta_l^0 - (\cos 2\theta_t^-)^2}{C^2 \sin 2\theta_t^- \sin 2\theta_l^0 + (\cos 2\theta_t^-)^2}, \quad (8)$$

$$R_{tl} = -\frac{2C \cos 2\theta_t^- \sin 2\theta_l^0}{C^2 \sin 2\theta_t^- \sin 2\theta_l^0 + (\cos 2\theta_t^-)^2},$$

где $R_{ll} = A_t^-/A_l^0$, $R_{tl} = A_t^-/A_l^0$, $C = C_t/C_l$. При нормальном падении, когда $\theta_l^0 = 0$, отраженная волна является продольной, поскольку $R_{ll} = -1$, $R_{tl} = 0$. С учетом (8) выражения для компонент деформаций (6) могут быть записаны следующим образом:

$$E_{zz} = \frac{(2C^2 - 1) \sin 2\theta_t^- \sin 2\theta_l^0}{C^2 \sin 2\theta_t^- \sin 2\theta_l^0 + (\cos 2\theta_t^-)^2} A,$$

$$E_{yy} = \frac{\sin 2\theta_t^- \sin 2\theta_l^0}{C^2 \sin 2\theta_t^- \sin 2\theta_l^0 + (\cos 2\theta_t^-)^2} A,$$

$$E_{zy} = 0, \quad W = R_{tl}A/2C, \quad E_v = (1 + R_{ll})A, \quad A = ik_l^0 A_l^0. \quad (9)$$

Если на свободную поверхность падает поперечная волна, известная как волна искажения или сдвига [7], смещения в координатах xuz определяются выражениями

$$U_z^0 = -A_t^0 \sin \theta_t^0 \exp(ik_t^0 r^0), \quad U_y^0 = A_t^0 \cos \theta_t^0 \exp(ik_t^0 r^0), \quad (10)$$

где A_t^0 — амплитуда, θ_t^0 — угол падения, k_t^0 — волновой вектор, $r^0 = z \cos \theta_t^0 + y \sin \theta_t^0$ — радиус-вектор падающей волны. Дифференцируя (10) по координатам, получим

$$E_{zz}^0 = -ik_t^0 A_t^0 \sin(2\theta_t^0) \exp(ik_t^0 r^0)/2, \quad E_{yy}^0 = ik_t^0 A_t^0 \sin(2\theta_t^0) \exp(ik_t^0 r^0)/2,$$

$$E_v^0 = 0, \quad E_{zy}^0 = ik_t^0 A_t^0 \cos(2\theta_t^0) \exp(ik_t^0 r^0)/2, \quad W_{zy}^0 = ik_t^0 A_t^0 \exp(ik_t^0 r^0)/2. \quad (11)$$

Компоненты смещений и деформаций отраженной поперечной волны определяются выражениями (3), (5). Углы падения и отражения удовлетворяют равенствам

$$\theta_t^0 = \theta_t^-, \quad \sin \theta_t^- = C_l/C_t \sin \theta_t^0. \quad (12)$$

Суммарные смещения и деформации на границе для падающей волны сдвига имеют вид

$$\begin{aligned}
 U_z &= -(A_t^0 + A_t^-) \sin \theta_t^0 - A_t^- \cos \theta_t^-, \\
 U_y &= (A_t^0 - A_t^-) \cos \theta_t^0 + A_t^- \sin \theta_t^-, \\
 E_{zz} &= ik_t^0(A_t^- - A_t^0) \sin \theta_t^0 \cos \theta_t^0 + ik_t^- A_t^- (\cos \theta_t^-)^2, \\
 E_{yy} &= ik_t^0(A_t^0 - A_t^-) \cos \theta_t^0 \sin \theta_t^0 + ik_t^- A_t^- (\sin \theta_t^-)^2, \\
 E_{zy} &= [ik_t^0(A_t^- + A_t^0) \cos 2\theta_t^0 - ik_t^- A_t^- \sin 2\theta_t^-]/2, \\
 W &= ik_t^0(A_t^0 + A_t^-), \quad E_v = ik_t^- A_t^-.
 \end{aligned} \tag{13}$$

Подставляя (13) в граничные условия (7), получим систему уравнений относительно коэффициентов отражения падающей поперечной волны $R_{tt} = A_t^-/A_t^0$, $R_{tt} = A_t^-/A_t^0$, из которой следует, что

$$\begin{aligned}
 R_{tt} &= \frac{C^2 \sin 2\theta_t^0 \sin 2\theta_t^- - (\cos 2\theta_t^0)^2}{C^2 \sin 2\theta_t^0 \sin 2\theta_t^- + (\cos 2\theta_t^0)^2}, \\
 R_{tt} &= \frac{2C \cos 2\theta_t^0 \sin 2\theta_t^0}{C^2 \sin 2\theta_t^0 \sin 2\theta_t^- + (\cos 2\theta_t^0)^2}.
 \end{aligned} \tag{14}$$

В случае $\theta_t^0 = 0$, $R_{tt} = -1$, $R_{tt} = 0$ отраженная волна является поперечной. С учетом (14) компоненты деформаций (13) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned}
 E_{zz} &= \frac{(2C^2 - 1) \sin 2\theta_t^0 \cos 2\theta_t^0}{C^2 \sin 2\theta_t^0 \sin 2\theta_t^- + (\cos 2\theta_t^0)^2} B, \\
 E_{yy} &= \frac{\sin 2\theta_t^0 \cos 2\theta_t^0}{C^2 \sin 2\theta_t^0 \sin 2\theta_t^- + (\cos 2\theta_t^0)^2} B, \\
 E_{zy} &= 0, \quad W = (1 + R_{tt})B/2, \quad E_v = CR_{tt}B, \quad B = ik_t^0 A_t^0.
 \end{aligned} \tag{15}$$

Полученные аналитические выражения позволяют проанализировать зависимости коэффициентов отражения и различных компонент деформации от угла падения волны и параметров среды. На рис. 1–3

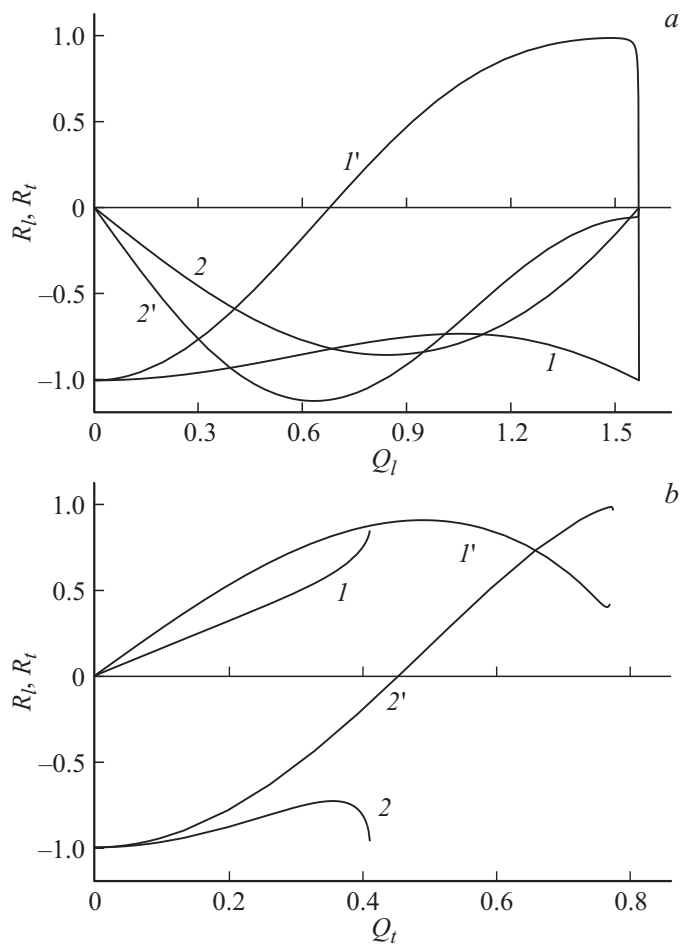


Рис. 1. Коэффициенты отражения продольных (I, I') и поперечных волн ($2, 2'$) для падающей волны расширения (a) и сдвига (b) при $C_t/C_l = 0.4$ ($I, 2$) и $C_t/C_l = 0.7$ ($I', 2'$).

для падающей продольной и поперечной волны приведены угловые зависимости коэффициентов отражения, компонент деформаций на границе и амплитуд деформации сдвига и поворота отраженной волны.

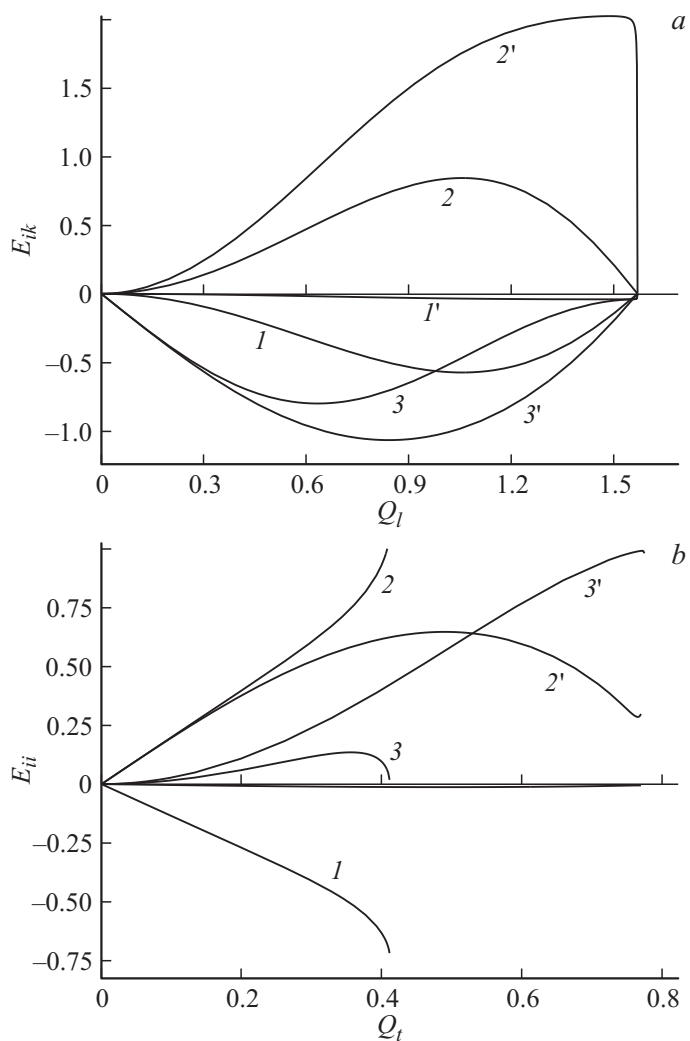


Рис. 2. Компоненты деформаций на свободной поверхности E_{zz} ($1, 1'$), E_{yy} ($2, 2'$) и $E_{[zy]}$ ($3, 3'$) для падающей продольной (a) и поперечной волны (b) при $C_t/C_l = 0.4$ ($1, 2, 3$) и $C_t/C_l = 0.7$ ($1', 2', 3'$).

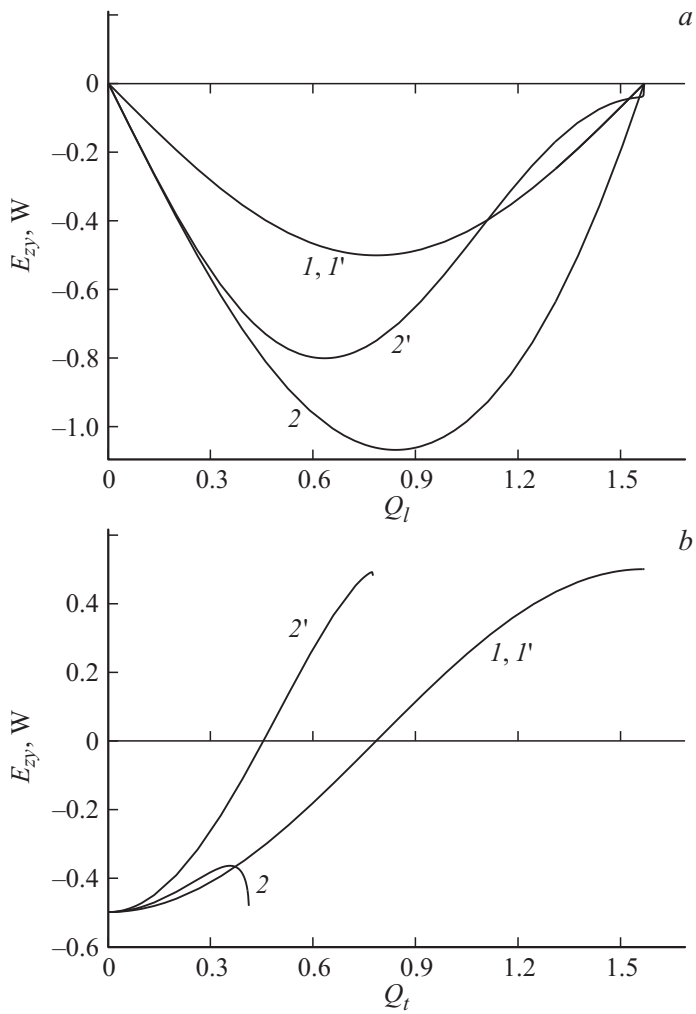


Рис. 3. Деформация сдвига $E_{z\gamma}$ ($1, 1'$) и поворот W ($2, 2'$) отраженной волны для падающей продольной (a) и поперечной волны (b) при $C_t/C_l = 0.4$ ($1, 2$) и $C_t/C_l = 0.7$ ($1', 2'$).

В случае первичной волны расширения отраженные волны существуют при $0 \leq \theta_i^0 \leq 90^\circ$. Падающая на свободную поверхность волна сдвига отражается в интервале углов $0 \leq \theta_i^0 \leq \theta_i^*$, где $\theta_i^* = \arcsin C$ — предельный угол полного отражения. В случае $\theta_i^0 \geq \theta_i^*$ отраженная волна расширения становится неоднородной волной и распространяется вдоль свободной поверхности, затухая по экспоненте в глубь среды. При этом $|R_{tt}| = 1$ и вся энергия от свободной поверхности переносится волной сдвига. Найденные выражения (8), (14) позволяют определить углы падения, при которых коэффициенты отражения волн, имеющих поляризацию падающей волны, равны нулю при некоторых значениях $C = C_t/C_l$. Для первичной волны сдвига можно найти выражение в явном виде

$$C = \sqrt{(\sin \theta_{i*}^0)^2 + ((\cos 2\theta_{i*}^0)^2 / (2 \sin 2\theta_{i*}^0 \sin \theta_{i*}^0))^2}, \quad (16)$$

для волны расширения имеет место трансцендентное уравнение

$$(1 - 2(\sin \theta_{i*}^0 C)^2)^2 - 2C^2 \sin \theta_{i*}^0 \sin 2\theta_{i*}^0 \sqrt{1 - (\sin \theta_{i*}^0 C)^2} = 0. \quad (17)$$

Падающая под углом θ_{i*}^0 волна сдвига отражается в виде продольной волны, первичная продольная волна при $\theta_i^0 = \theta_{i*}^0$ отражается в виде сдвиговой. В теории электромагнитных волн аналогичные углы известны как углы полной поляризации, или углы Брюстера.

Характер деформаций на свободной поверхности определяется граничными условиями. Из равенства нулю напряжений на свободной поверхности следует равенство нулю деформаций сдвига. Удлинения, не равные нулю на границе в общем случае, обуславливают объемные изменения, которые выражаются через коэффициенты отражения продольной волны при падении волны любой поляризации (9), (15). При углах $\theta_i^0 = 0.90^\circ$ и $\theta_i^0 = 0.45^\circ$ деформации E_{zz} , E_{yy} обращаются в нуль, удлинение $E_{zz} = 0$ также в случае $C = \sqrt{1/2}$. Выполнение граничных условий (7) обеспечивается конверсией волн на свободной поверхности [7], поэтому отраженная волна всегда имеет поперечную составляющую. Распространение отраженной поперечной волны сопровождается деформацией сдвига и поворотом. В отличие от сдвиговой деформации, равной нулю на границе, поворот отличен от нуля и определяется коэффициентами отражения поперечных волн (9), (15).

Таким образом, свободная поверхность в процессе деформации является областью объемных изменений и поворотов. Объемные деформации, оказывающие существенное влияние на процессы диффузии, теплопроводности, абсорбции и т. д., определяют многие особенности поведения материалов при наличии свободных поверхностей. Поворот и деформация сдвига, сопровождающие распространение отраженных волн, являются величинами одного порядка, что указывает на необходимость рассмотрения обеих величин при описании деформации материалов и сред, имеющих поры, трещины и свободные поверхности в качестве границ.

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований РАН на 2013–2020 гг. В части обоснования появления вихревых мод деформации при отражении волн на свободной поверхности работа поддержана Российским научным фондом (грант 14-19-00718).

Список литературы

- [1] *Мамонова М.В., Прудников В.В., Прудникова И.А.* Физика поверхности. Теоретические модели и экспериментальные методы. М.: Физматлит, 2011. 400 с.
- [2] Поверхностные слои и внутренние границы раздела в гетерогенных материалах / Ред. Панин В.Е. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2006. 520 с.
- [3] *Gleiter H.* // Acta Mater. 2000. V. 48. N 1. P. 1–29.
- [4] *Андреевский Р.А., Глезер А.М.* // УФН. 2009. Т. 179. № 4. С. 338–358.
- [5] *Нагорнов Ю.С.* // Письма в ЖТФ. 2015. Т. 41. В. 18. С. 35–47.
- [6] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория упругости // Теоретическая физика. Т. VII. М.: Наука, 1987. 244 с.
- [7] *Кольский Г.* Волны напряжения в твердых телах. М.: Изд-во иностр. лит., 1955. 194 с.