Журнал технической физики, 2015, том 85, вып. 12

03

Об отклике стратифицированной жидкости на резонансные воздействия

© Л.Х. Ингель

Научно-производственное объединение „Тайфун“,
249038 Обнинск, Калужская область, Россия
e-mail: lev.ingel@gmail.com

(Поступило в Редакцию 17 марта 2015 г.)

Аналитически решена задача об отклике устойчиво стратифицированной жидкой (газообразной) среды на воздействие вытянутых по вертикали источников тепла и количества движения, гармонически меняющихся со временем. Обращено внимание на особую чувствительность таких сред по отношению к воздействиям с частотами, близкими к частоте плавучести. Это может быть полезно для некоторых практических приложений.

Введение

Жидкие и газообразные геофизические среды в поле силы тяжести (атмосфера, водоемы) чаще всего устойчиво стратифицированы — плотность убывает с высотой. (Хотя обратные ситуации, например нагрев атмосферы снизу, также нередки, но возникающие в подобных ситуациях конвективные неустойчивости при отсутствии стабильных поддерживающих источников имеют тенденцию к быстрой релаксации). Хорошо известное свойство устойчиво стратифицированых сред — колебания смещенных по вертикали объемов относительно положения равновесия с „частотой плавучести“ („частотой Брента–Вяйсяля“). В настоящей работе обращается внимание на относительную чувствительность таких сред к механическим и термическим воздействиям вблизи резонанса — с частотами, близкими к частоте плавучести.

Это может представлять определенный интерес, например, в связи с известной проблематикой активных воздействий на некоторые атмосферные процессы (см., например, [1–3]). Давно прорабатывается, например, идея стимулирования атмосферной конвекции (вертикальных движений в атмосфере) с помощью искусственных интенсивных вертикальных струй („метеотрон“ [1,2,4]). Такие струи можно стимулировать как интенсивным тепловыделением (свободная конвекция), так и воздействием источников количества движения („напорные“ струи, forced jets); в общем случае и то, и другое. Представляет интерес также искусственная конвекция в водоемах, стимулируемая всплыванием пузырьков газа. В литературе обычно рассматриваются модели со стационарными (после момента „включения“) источниками плавучести и (или) количества движения. Достигнутые к настоящему времени амплитуды эффектов в атмосфере пока обычно весьма ограничены, поскольку вертикальные движения против архимедовых сил требуют больших затрат энергии. В настоящей работе обращается внимание на то, что амплитуды эффектов могут быть заметно больше, если источники меняются с частотой, близкой к собственной частоте среды — частоте плавучести.

1. Постановка задачи

С целью максимально прозрачной демонстрации упомянутого резонансного эффекта ограничиваемся здесь одномерной моделью с наиболее простой геометрией задачи. Рассматривается неограниченная устойчиво стратифицированная среда, в которой действуют источники тепла (плавучести) и количества движения, сосредоточенные на вертикальной плоскости $x = 0$, где x — одна из горизонтальных координат (от других координат задача не зависит). Интенсивность этих источников можно записать в виде $E\delta(x)$ и $P\delta(x)$, где δ — символ дельта-функции Дирака, амплитуды E, P имеют размерность $\mathrm{W/m^2}$ и $\mathrm{kg/m \cdot s^2}$ соответственно. Одномерная система уравнений гидродинамики и переноса тепла в приближении Буссинеска имеет вид [5,6]

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha g \theta + \frac{P}{\rho}\delta(x), \tag{1}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \gamma w = \kappa \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{E}{c_p \rho}\delta(x). \tag{2}$$

Здесь w — вертикальная составляющая скорости (другие составляющие в данной задаче отсутствуют), t — время, ν — кинематический коэффициент вязкости, κ — коэффициент температуропроводности, α — термический коэффициент расширения среды, g — ускорение свободного падения, θ — отклонение температуры (в воздухе — потенциальной температуры [7]), γ — ее вертикальный градиент (предполагается постоянным), ρ — средняя (отсчетная) плотность среды, c_p — ее теплоемкость.

Из соображений симметрии можно, очевидно, ограничиться рассмотрением полуограниченной области $x > 0$, описывая влияние источников посредством краевых условий:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha g \theta = 0, \tag{3}$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}+\gamma w=\kappa\,\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}=-\frac{P}{2\nu\rho},\quad \frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{E}{2\kappa c_p\rho}\quad \text{при}\quad x=0. \tag{5}$$

Вдали от источников ($x\to\infty$) предполагается затухание возмущений.

Отметим, что линейность системы (3), (4) обусловлена высокой степенью симметрии задачи и при постоянных значениях параметров не связана с ограничениями на амплитуду возмущений.

Поставленная задача имеет общие черты с рассмотренной в работе [8], где исследовались возмущения, вызываемые продольными колебаниями наклонной плоскости в стратифицированной среде. Но в данном случае исследуется влияние не только источников количества движения, но и тепла и, кроме того, рассматриваются другие краевые условия (2-го, а не 1-го рода, как в [8]). Это приводит к существенным отличиям свойств решений.

2. Возмущения, вызываемые стационарными источниками

Рассмотрим сначала решение стационарной задачи. Без производных по времени система (3), (4) представляет собой линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая легко решается. Четыре корня характеристического уравнения имеют вид

$$q_j=\pm\frac{1\pm i}{\sqrt{2}}\sqrt[4]{\frac{N^2}{\kappa\nu}}. \tag{6}$$

С учетом краевых условий выбираются два корня с отрицательными реальными частями. Решение при удалении от источников убывает на масштабах порядка $l\equiv\sqrt[4]{4\kappa\nu/N^2}$ и имеет вид

$$w=\frac{l}{2\sqrt{2}\nu\rho}\left(P^2+\hat{E}^2\right)^{1/2}\exp(-x/l)\cos(x/l+\upsilon), \tag{7}$$

$$\theta=-\frac{\left(P^2+\hat{E}^2\right)^{1/2}}{\sqrt{2}l\alpha g\rho}\exp(-x/l)\sin(x/l+\upsilon). \tag{8}$$

Здесь введены обозначения

$$\hat{E}=\left(\frac{\nu}{\kappa}\right)^{1/2}\frac{\alpha gE}{2c_pN},\quad \upsilon=\arcsin\frac{P-\hat{E}}{\left[2\left(P^2+\hat{E}^2\right)\right]^{1/2}}.$$

3. Случай источников, гармонически меняющихся со временем

Пусть теперь $P=P_0\sin\omega t$, $E=E_0\sin\omega t$. Для упрощения расчетов ниже будем предполагать одинаковыми значения коэффициентов переноса тепла и количества движения: $\kappa=\nu=K$ (это распространенное приближение при описании турбулентного обмена в атмосфере и водоемах [7]). Ищем также гармонически меняющиеся со временем решения в виде

$$w(x,t)=W_1(x)\sin\omega t+W_2(x)\cos\omega t, \tag{9}$$

$$\theta(x,t)=\Theta_1(x)\sin\omega t+\Theta_2(x)\cos\omega t, \tag{10}$$

где амплитудные функции при $x=0$ должны удовлетворять краевым условиям

$$\frac{dW_1}{dx}=-\frac{P_0}{2K\rho},\quad \frac{dW_2}{dx}=0,$$

$$\frac{d\Theta_1}{dx}=-\frac{E}{2Kc_p\rho},\quad \frac{d\Theta_2}{dx}=0 \tag{11}$$

и затухать вдали от плоскости $x=0$.

Исключение θ из системы (3), (4) приводит к уравнению

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}-\frac{2}{K}\frac{\partial^3 w}{\partial x^2\partial t}+\frac{1}{K^2}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{N^2}{K^2}w=0, \tag{12}$$

где $N=(\alpha g\gamma)^{1/2}$ — частота плавучести. Для амплитуд $W_1(x)$, $W_2(x)$ получается система уравнений

$$\frac{d^4W_1}{dx^4}+\frac{2\omega}{K}\frac{d^2W_2}{dx^2}+\frac{N^2-\omega^2}{K^2}W_1=0,$$

$$\frac{d^4W_2}{dx^4}-\frac{2\omega}{K}\frac{d^2W_1}{dx^2}+\frac{N^2-\omega^2}{K^2}W_2=0, \tag{13}$$

которая сводится к одному уравнению

$$\frac{d^8W_2}{dx^8}+\frac{2(N^2+\omega^2)}{K^2}\frac{d^4W_2}{dx^4}+\frac{\left(N^2-\omega^2\right)^2}{K^4}W_2=0. \tag{14}$$

Решение стандартным образом ищется в виде линейной комбинации экспонент

$$W_2=\sum_{i=1}^{8}C_i\exp(q_ix), \tag{15}$$

где q_i — корни характеристического уравнения

$$q^8+\frac{2(N^2+\omega^2)}{K^2}q^4+\frac{\left(N^2-\omega^2\right)^2}{K^4}=0.$$

С учетом условия затухания возмущений при $x\to\infty$ в сумме (15) присутствуют лишь четыре слагаемых, отвечающих корням q_i с отрицательными реальными частями. Ниже для определенности рассматривается случай $\omega\le N$, когда

$$q_{1,2}=-\frac{(1\pm i)}{\sqrt{2}l_+},\quad q_{3,4}=-\frac{(1\pm i)}{\sqrt{2}l_-},$$

$$l_+=\sqrt{\frac{K}{N+\omega}},\quad l_-=\sqrt{\frac{K}{N-\omega}}. \tag{16}$$

Масштаб l_+ при $\omega\sim N$ по порядку величины совпадает с l в стационарном решении, а l_- вблизи резонанса, когда разность $N-\omega$ мала, может быть гораздо больше.

Поэтому уже из (16) видно, что вблизи резонанса решение приобретает качественно новые свойства: появляются слагаемые с медленно затухающими экспонентами, что соответствует аномально глубокому проникновению возмущений в среду (по сравнению со стационарным решением).

Зная выражение для W_2 из второго уравнения (13), нетрудно выразить W_1

$$W_1 = \frac{K}{2\omega}\sum_{i=1}^{4} C_i q_i^2 \exp(q_i x) + \frac{N^2-\omega^2}{2\omega K}\sum_{i=1}^{4}\frac{C_i}{q_i^2}\exp(q_i x).$$

С учетом краевых условий (11) получаем первые два уравнения для коэффициентов C_i

$$\sum_{i=1}^{4} C_i q_i = 0, \tag{17}$$

$$\sum_{i=1}^{4} C_i q_i^3 + \frac{N^2-\omega^2}{K^2}\sum_{i=1}^{4}\frac{C_i}{q_i} = -\frac{\omega P_0}{\rho K^2}. \tag{18}$$

Выразив отклонение температуры через w и используя краевые условия для θ, легко получить два других уравнения. С учетом того что

$$\frac{N^2-\omega^2}{K^2} = (q_1 q_4)^2 = (q_2 q_3)^2, \quad q_1^2 = -q_2^2, \quad q_3^2 = -q_4^2, \tag{19}$$

простыми преобразованиями система для коэффициентов C_i, помимо (17), сводится к уравнениям

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{C_i}{q_i} = \frac{\omega P_0}{2\rho K^2 (q_1 q_3)^2},$$

$$\sum_{i=1}^{4} C_i q_i^3 = -\frac{\omega P_0}{2\rho K^2},$$

$$\sum_{i=1}^{4} C_i q_i^5 = \frac{\alpha g \omega E_0}{c_p \rho K^3}. \tag{20}$$

4. Оценка амплитуды скорости вблизи резонанса

Определитель однородной системы удается свести к простому выражению $\Delta = (8\omega N/K^2)^2$. Остальные определители полученной системы в общем случае выражаются весьма громоздко. Но если ставить целью исследование особенностей решения (амплитуды возмущений и глубины их проникновения в среду) вблизи резонанса $\omega = N$, то задача существенно упрощается благодаря наличию в ней малого параметра $\varepsilon \equiv |(\omega - N)/(\omega + N)| \approx |(\omega - N)/2N|$. В этом случае в (16)

$$l_+ \ll l_-, \quad |q_{1,2}| \gg |q_{3,4}|, \quad |q_{3,4}/q_{1,2}| = \varepsilon^{1/2}. \tag{21}$$

В этом приближении коэффициенты C_1, C_2 оказываются много меньше (на фактор $\varepsilon^{1/2}$), чем C_3, C_4, выражения для которых можно представить в виде

$$C_{3,4} \approx -\frac{(P_0 \pm i\hat{E}_0)}{8\rho K q_{4,3}} = \sqrt{\frac{K}{N-\omega}}\,\frac{(1\pm i)(P_0 \pm i\hat{E}_0)}{8\sqrt{2}\rho K}, \tag{22}$$

где введено обозначение $\hat{E}_0 = \alpha g E_0 / c_p N$. Таким образом, две медленно затухающие (с x) вблизи резонанса экспоненты к тому же входят в решение с большим весом. Сохраняя в выражении для W_2 эти основные слагаемые, нетрудно получить

$$W_2 \approx \frac{l_-}{4\rho K}\left(P^2 + \hat{E}_0^2\right)^{1/2} \times \exp\left(-x/\sqrt{2}l_-\right)\cos\left(x/\sqrt{2}l_- + \upsilon_0\right), \tag{23}$$

где фаза υ_0 отличается от υ в (7), (8) заменой $\hat{E}$ на $\hat{E}_0$.

Далее нетрудно получить выражения для w и θ, но уже из (23) видно, что в сравнении с (7) вместо масштаба l в выражении для вертикальной скорости фигурирует много больший (с коффициентом порядка $\varepsilon^{-1/2}$) масштаб $\sqrt{2}l_-$. Тем самым видно, что вблизи резонанса увеличивается как амплитуда установившихся колебаний, так и глубина их проникновения в среду (и то, и другое увеличиваются с упомянутым коэффициентом порядка $\varepsilon^{-1/2}$).

Заключение

Таким образом, на простом примере продемонстрированы качественные особенности отклика стратифицированных сред на воздействия с частотами, близкими к частоте Брента–Вяйсяля. Отметим качественное сходство этого явления с резонансом между суточными вариациями ветра и связанными с эффектами планетарного вращения инерционными колебаниями в атмосфере и водоемах („diurnal-inertial resonance“ [9,10]). Но в настоящем случае речь идет о частотах, примерно на три порядка бóльших, и возмущения распространяются не по вертикали, а по горизонтали.

Список литературы

[1] *Качурин Л.Г.* Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеоиздат, 1990. 463 с.

[2] *Вульфсон Н.И., Левин Л.М.* Метеотрон как средство воздействия на атмосферу. М.: Гидрометеоиздат, 1987. 131 с.

[3] *Свиркунов П.Н.* // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1979. Т. 15. № 9. С. 907–911.

[4] *Ингель Л.Х.* // Инженерно-физический журнал. 2010. Т. 83. № 1. С. 111–117.

[5] *Ингель Л.Х., Калашник М.В.* // УФН. 2012. Т. 182. № 4. С. 379–406.

[6] *Ингель Л.Х.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. № 2. С. 43–47.

[7] *Гилл А.* Динамика атмосферы и океана. Т. 1. М.: Мир, 1986. 397 с.

[8] *Байдулов В.Г.* // МЖГ. 2010. № 6. С. 3–11.

[9] *Shibuya R., Sato K., Nakanishi M.* // J. Atmos. Sci. 2014. Vol. 71. N 2. P. 767–781.

[10] *Ингель Л.Х.* // МЖГ. 2015. № 4. С. 37–43.