03

О поверхностных и внутренних гравитационных волнах в трехслойной несмешивающейся жидкости

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, Л.С. Яковлева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 29 января 2015 г.)

В теоретическом аналитическом исследовании линейной математической модели капиллярно-гравитационного периодического волнового движения в трехслойной слоисто-неоднородной жидкости, когда верхние два слоя имеют конечную толщину, а нижний бесконечно глубокий, выводится дисперсионное уравнение. Найдены аналитические выражения для отношений амплитуд внутренних волн между собой и по отношению к поверхностным. Показано, что отношения внутренних волн к поверхностным при малых различиях в плотностях контактирующих жидкостей могут быть весьма большими.

Введение

В связи с возможностью реализации баро-, хемо-, термоклинной стратификации морской воды представляет интерес проблема исследования поверхностных и внутренних волн в многослойной жидкости. Это актуально и в применении к воздушным течениям. Такие задачи неоднократно подвергались анализу как в линейной, так и в нелинейной постановках [1–8] как для идеальной жидкости, так и с учетом ее вязкости. Тем не менее следует отметить, что рассмотрение, как правило, ограничивалось двухслойной жидкостью [1–9], трехслойная жидкость рассматривалась только в [8]. При обобщении проблемы на случай капиллярных волн (см., например, [5]) появляется возможность применения к многослойным жидкостным покрытиям и гетерогенным системам, что представляет несомненный интерес. Волнам в трехслойной жидкости и посвящена настоящая работа.

Постановка проблемы

Пусть имеется трехслойная жидкая среда (рис. 1). На слое бесконечной глубины $h_3 \sim \infty$, плотностью ρ_3, находятся два жидких слоя с толщиной h_2, плотностью ρ_2 и толщиной h_1, плотностью ρ_1. Все три жидкости несжимаемые, несмешиваемые и идеальные находятся в поле сил тяжести $\mathbf{g}$, ориентированные так, что $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{n}_z$, а $\mathbf{n}_z$ — орт декартовой системы координат. Орт $\mathbf{n}_x$ вводится параллельно границе раздела жидкостей так, чтобы начало системы координат находилось на границе раздела нижней жидкости с массовой плотностью ρ_3 и лежащей на ней жидкости с плотностью ρ_2. При таком введении декартовых координат верхний слой занимает пространство $h_2 \le z \le h_2 + h_1$, средний слой занимает пространство $0 \le z \le h_2$, а нижний $z \le 0$.

При виртуальном возмущении границ раздела жидкостей свободная поверхность верхней жидкости описывается уравнением

$$F_1(x, z, t) \equiv z - \xi_1(x, t) - (h_1 + h_2) = 0,$$

где $\xi_1(x, t)$ — малое отклонение поверхности верхней жидкости от невозмущенного уровня $z = h_1 + h_2$, вторая граница раздела жидкостей описывается уравнением $F_2(x, z, t) = z - \xi_2(x, t) - h_2 = 0$, где $\xi_2(x, t)$ — малое отклонение границы раздела жидкостей от невозмущенного уровня $z = h_2$, $D_3(X, Z, T) \equiv z - \xi_3(x, t) = 0$, где $\xi_3(x, t)$ — малое отклонение границы раздела жидкостей от невозмущенного уровня $z = 0$.

Следует отметить, что модель несмешиваемых жидкостей будет описывать реальную ситуацию, если толщины переходных от жидкости с плотностью ρ_1 к жидкости с плотностью ρ_2 и от жидкости с плотностью ρ_2 к жидкости с плотностью ρ_3 слоев (толщины зон стратификации по плотности), будет много меньше длины волны и толщин слоев выше лежащих жидкостей.

Проанализируем взаимодействие и устойчивость капиллярно-гравитационных волн, порожденных свободной поверхностью и границами раздела сред. Задача решается в предположении потенциальности течения жидкостей.

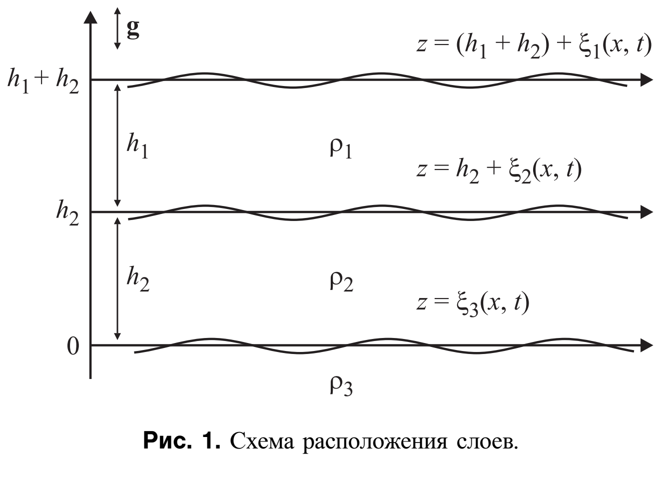

Рис. 1. Схема расположения слоев.

Математическая формулировка задачи состоит из уравнений Эйлера и уравнений неразрывности для трех сред:

$$\frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial t} + (\mathbf{V}_j, \nabla)\mathbf{V}_j = -\frac{1}{\rho_j}\nabla P_j + \mathbf{g},$$
$$\operatorname{div}\mathbf{V}_j = 0, \quad j = (1, 2, 3),$$

и граничных условий к ним:

$$F_1 = 0: \ z = (h_1 + h_2) + \xi_1(x, t),$$
$$\frac{dF_1}{dt} = \left(\frac{dF_1}{dt} + (\mathbf{V}_1, \nabla)F_1\right) = 0,$$
$$P_1 = P_0, \quad V_{1n} = V_{2n},$$
$$F_2 = 0: \ z = h_2 + \xi_2(x, t),$$
$$\frac{dF_2}{dt} = \left(\frac{dF_2}{dt} + (\mathbf{V}_2, \nabla)F_2\right) = 0,$$
$$P_2 = P_1, \quad V_{2n} = V_{3n},$$
$$F_3 = 0: \ z = \xi_3(x, t), \ \ \frac{dF_3}{dt} = \left(\frac{dF_3}{dt} + (\mathbf{V}_3, \nabla)F_3\right) = 0,$$
$$P_2 = P_3, \quad z \to -\infty: \quad \mathbf{V}_3 = 0.$$

Здесь $P_j(\mathbf{r}, t)$ — давление в j-й среде, P_0 — постоянное давление над верхним слоем жидкости: $\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t)$ — поле скоростей течения жидкости в j-й среде: V_{jn} — нормальные компоненты скоростей.

Скаляризация и линеаризация задачи

В рамках модели потенциального течения жидкости

$$\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t) \equiv \nabla\psi_j(\mathbf{r}, t),$$

где $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ — потенциалы поля скоростей движения трех жидкостей соответственно. Поскольку движения всех жидкостей вызваны малыми колебаниями, будем полагать, что $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ имеют тот же порядок малости, что и амплитуды капиллярно-гравитационных волн: $|\psi_i| \sim |\xi_i|$.

Представляя поля скоростей через скалярные потенциалы, запишем

$$\Delta\psi_j(\mathbf{r}, t) = 0, \ \ P_j(\mathbf{r}, t) = -\rho_j\big(\partial_t\psi_j(\mathbf{r}, t) + gz\big) + P_{j,0},$$

где $P_{j,0}$ — константы интегрирования

$$z \to -\infty: \quad \psi_3(\mathbf{r}, t) \to 0,$$
$$z = (h_1 + h_2): \ -\partial_t\xi_1(x, t) + \partial_z\psi_1(\mathbf{r}, t) = 0,$$
$$P_{1,0} = P_{\text{atm}} + \rho_1 g(h_1 + h_2), \ \ \partial_t\xi_1(\mathbf{r}, t) + g\psi_1(x, t) = 0,$$
$$z = h_2: \ -\partial_t\xi_2(x, t) + \partial_z\psi_1(\mathbf{r}, t) = 0,$$
$$\partial_t\xi_2(x, t) + \partial_z\psi_2(\mathbf{r}, t) = 0,$$
$$\rho_1\partial_t\xi_1(\mathbf{r}, t) - \rho_2\partial_t\psi_2(\mathbf{r}, t) + (\rho_1 - \rho_2)g\xi_2(x, t) = 0,$$
$$P_{2,0} = P_{1,0-} + gh_2(\rho_2 - \rho_1),$$
$$z = 0: \ -\partial_t\xi_3(x, t) + \partial_z\psi_2(\mathbf{r}, t) = 0,$$
$$-\partial_t\xi_3(x, t) + \partial_z\psi_3(\mathbf{r}, t) = 0, \ \ P_{3,0} = P_{2,0},$$
$$\rho_2\partial_t\psi_2(\mathbf{r}, t) - \rho_3\partial_t\psi_3(\mathbf{r}, t) - (\rho_3 - \rho_2)g\xi_3(x, t),$$

где ∂_z и ∂_t обозначают частные производные по координатам и времени.

Вывод дисперсионного уравнения

Примем, что

$$\xi_j(x, t) \equiv \mathrm{A}_j(t)\exp(ikx),$$

где $\mathrm{A}_j(t)$ — неизвестные коэффициенты, зависящие от времени.

Решения периодические по переменной x и апериодические по z двумерного уравнения Лапласа (если оставить одну волну из двух, так как они будут идентичными, но бегущими в противоположных направлениях) имеют вид

$$\psi_1(x, z, t) \equiv \big(D_1(t)\exp(kz) + D_2(t)\exp(-kz)\big)\exp(ikz),$$

$$\psi_2(x, z, t) \equiv \big(D_3(t)\exp(kz) + D_4(t)\exp(-kz)\big)\exp(ikz),$$

$$\psi_3(x, z, t) \equiv D_5(t)\exp(kz)\exp(ikz). \tag{1}$$

$D_m(t)$ — неизвестные коэффициенты. Удовлетворяя граничным условиям, найдем связь между $D_m(t)$ и $\mathrm{A}_j(t)$

$$D_1(t) = \frac{-\exp(-kh_1)\mathrm{A}_2'(t) + \mathrm{A}_1'(t)}{2k\exp(kh_2)\operatorname{sh}(-kh_1)},$$

$$D_2(t) = \frac{-\exp(kh_1)\mathrm{A}_2'(t) + \mathrm{A}_1'(t)}{2k\exp(-kh_2)\operatorname{sh}(-kh_1)},$$

$$D_3(t) = \frac{-\exp(-kh_2)\mathrm{A}_3'(t) + \mathrm{A}_2'(t)}{2k\operatorname{sh}(-kh_2)},$$

$$D_4(t) = \frac{-\exp(kh_2)\mathrm{A}_3'(t) + \mathrm{A}_2'(t)}{2\operatorname{sh}(-kh_2)}, \ \ D_5(t) = \frac{1}{k}\mathrm{A}_3'(t),$$

где временную зависимость коэффициентов волновых решений естественно искать в виде гармонических функций времени. Поэтому примем

$$\mathrm{A}_j(t) = \alpha_j\exp(-i\omega t). \tag{2}$$

Подставим полученные коэффициенты $D_m(t)$ в (1) и получим выражения для гидродинамических потенциалов $\psi_j(x, z, t)$, которые в свою очередь подставим в динамические граничные условия (на трех границах раздела), получим систему трех алгебраических уравнений для нахождений трех неизвестных коэффициентов α_j:

$$\alpha_2\omega^2 + \alpha_1\big(-\omega^2\operatorname{ch}(kh_1) + gk\operatorname{sh}(kh_1)\big) = 0, \tag{3}$$

$$-\alpha_1\omega^2\rho_1\operatorname{sh}(kh_2) - \alpha_3\omega^2\rho_2\operatorname{sh}(kh_1)$$
$$+ \alpha_2\Big\{\omega^2\big[\rho_1\operatorname{ch}(kh_1)\operatorname{sh}(kh_2) + \rho_2\operatorname{ch}(kh_2)\operatorname{sh}(kh_1)\big]$$
$$- gk(\rho_2 - \rho_1)\operatorname{sh}(kh_1)\operatorname{sh}(kh_2)\Big\} = 0, \tag{4}$$

$$\alpha_2\omega^2\rho_2 + \alpha_3\Big((\rho_3 - \rho_2)kg\operatorname{sh}(kh_2)$$
$$- \omega^2(\rho_2\operatorname{ch}(kh_2) + \rho_3\operatorname{sh}(kh_2))\Big). \tag{5}$$

Условие разрешимости системы — обращение в нуль определителя, составленного из ее коэффициентов, это и будет дисперсионное уравнение задачи. Получаем

$$\omega^6 \mathrm{A}(k, h_1, h_2) + \omega^4 \mathrm{B}(k, h_1, h_2) + \omega^2 \mathrm{X}(k, h_1, h_2) + \mathrm{H}(k, h_1, h_2) = 0, \quad (6)$$

$$\mathrm{A}(k, h_1, h_2) \equiv -\rho_2^2 \operatorname{ch}(h_1 k) + \big[\rho_1 \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{sh}(h_2 k) + \rho_2 \operatorname{ch}(h_1 k) \operatorname{ch}(h_2 k)\big] \big[\rho_2 \operatorname{ch}(h_2 k) + \rho_3 \operatorname{sh}(h_2 k)\big],$$

$$\mathrm{B}(k, h_1, h_2) \equiv gk \Big\{\rho_2^2 \operatorname{sh}(h_1 k) - (\rho_3 - \rho_2) \times \big[\rho_1 \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{sh}(h_2 k) + \rho_2 \operatorname{ch}(h_1 k) \operatorname{ch}(h_2 k)\big] \operatorname{sh}(h_2 k) - \rho_2 (\rho_2 \operatorname{ch}(h_2 k) + \rho_3 \operatorname{sh}(h_2 k)\big] \operatorname{sh}(h_1 k)\Big\},$$

$$\mathrm{X}(k, h_1, h_2) \equiv g^2 k^2 \big[(\rho_2 - \rho_1)\rho_2 \operatorname{ch}(h_1 k) + \rho_3 \operatorname{sh}(h_2 k)\big] \operatorname{sh}(h_1 k),$$

$$\mathrm{H}(k, h_1, h_2) \equiv \rho_2 (\rho_3 - \rho_2) \operatorname{sh}\big[(h_1 + h_2) k\big] \operatorname{sh}(h_2 k) + g^3 k^3 (\rho_1 - \rho_2)(\rho_3 - \rho_2) \operatorname{sh}(h_1 k) \operatorname{sh}(h_2 k)^2.$$

Несложно видеть, что это неоднородное бикубическое алгебраическое уравнение. Можно выделить три ветви решений, соответствующих волнам, порожденным свободной поверхностью жидкости и двумя границами раздела сред: с плотностью ρ_1 и с ρ_2, с плотностью ρ_2 и с ρ_3. Частоты волн, соответствующих этим ветвям, будут различным образом зависеть от физических параметров системы: ρ_j, h_j, g. Обозначим их соответственно ω_j, где ω_1 соответствует поверхностным волнам, порожденным свободной поверхностью, ω_2 — внутренним волнам, порожденным границей раздела сред с плотностями ρ_1 и ρ_2, а ω_3 — внутренним волнам, порожденным границей раздела сред с плотностями ρ_2 и ρ_3.

Подставляя ω_j в (1) с учетом (2), получим выражения для гидродинамических потенциалов волновых течений в трех средах для каждого из режимов (для каждой из ветвей), определенные с точностью до неопределенной константы. Чтобы найти неизвестные константы, нужно задать начальные условия. В этом случае гидродинамические потенциалы определятся полностью.

Предельный переход к двухслойной жидкости

Для того чтобы убедиться в правильности нашего решения, можно свести задачу к более простой, а именно к двухслойной задаче, решенной ранее. Сравнивая уравнение

$$a_2 \omega^2 + a_1 [gk \operatorname{sh}(h_1 k) - \omega^2 \operatorname{ch}(h_1 k)] = 0$$

с динамическим граничным условием на свободной поверхности из задачи о двухслойной жидкости, видим, что, для того чтобы они совпали, нужно устремить $h_1 \to h$. Таким образом, мы перейдем от нашей задачи к двуслойной. Сравнивая уравнение, полученное нами ранее:

$$a_2 \omega^2 \rho_2 + a_3 \big[gk \operatorname{ch}(h_2 k)(\rho_3 - \rho_2) + \omega^2 (-\operatorname{ch}(h_2 k)\rho_2 - \operatorname{sh}(h_2 k)\rho_3)\big] = 0,$$

с динамическим граничным условием на границе раздела из задачи о двуслойной жидкости, видим, что, для того чтобы они совпадали, нужно устремить $h_2 \to h$ и $\rho_2 \to \rho_1$. При этом второе уравнение (динамическое граничное условие на „лишней“ промежуточной границе) примет вид

$$-a_1 \omega^2 \operatorname{sh}(hk)\rho_1 - a_3 \omega^2 \operatorname{sh}(hk)\rho_1 + 2a_2 \omega^2 \operatorname{ch}(hk) \operatorname{sh}(hk)\rho_1 = 0.$$

Если преобразовать это выражение

$$\omega^2 \rho_1 \operatorname{sh}(hk)\big(a_1 + a_3 - 2a_2 \operatorname{ch}(hk)\big) = 0,$$

то мы увидим, что амплитуда a_2 полностью определяется амплитудами a_1 и a_3:

$$a_2 \to \frac{1}{2}(a_1 + a_3)\operatorname{sech}(hk).$$

Выполним предельный переход в дисперсионном уравнении по правилу $\rho_2 \to \rho_1$ и получим

$$\omega^2 (\omega^2 - gk)\big\{\omega^2 \big(\operatorname{sh}[(h_1 + h_2)k]\rho_1 + \operatorname{ch}[(h_1 + h_2)k]\rho_3\big) - gk \operatorname{sh}[(h_1 + h_2)k](\rho_3 - \rho_1)\big\} = 0. \quad (7)$$

Отбрасываем тривиальный корень

$$\omega^2 \equiv \omega_3^2 = 0 \quad (8)$$

и корень, соответствующий поверхностным волнам:

$$\omega^2 \equiv \omega_1^2 = gk. \quad (9)$$

Выражение, стоящее в (7), в фигурных скобках, полностью совпадет с дисперсионным уравнением для внутренних волн в двуслойной жидкости, у которой верхний слой имеет толщину $h_1 + h_2$ и плотность ρ_1, нижний слой бесконечно глубокий с плотностью ρ_3:

$$\omega^2 \equiv \omega_2^2 = gk \operatorname{th}\big((h_1 + h_2)k\big) \frac{(\rho_3 - \rho_1)}{\operatorname{th}((h_1 + h_2)k)\rho_1 + \rho_3}. \quad (10)$$

Решения дисперсионного уравнения

Чтобы найти решения дисперсионного уравнения (6), будем отталкиваться от дисперсионного уравнения для

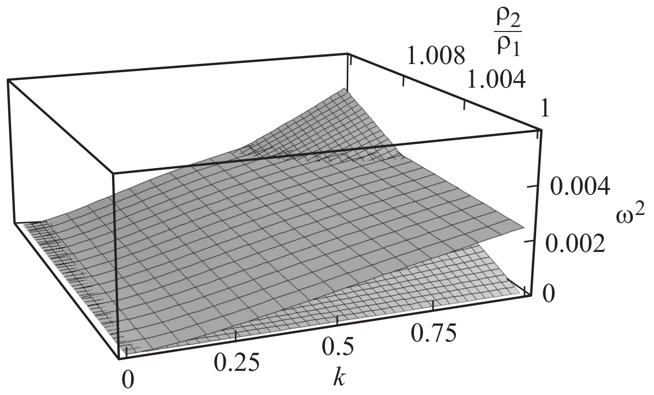

Рис. 2. Соотношение квадратов частот внутренних волн.

двуслойной жидкости [1]. Учтем, что его решения известны [1] (см. также (9) и (10)). Примем во внимание, что отношение ρ_2/ρ_1 весьма близко к единице, и положим $\rho_2/\rho_1 = 1+\varepsilon$, где ε — малый параметр. Решения дисперсионного уравнения для двуслойной жидкости типа (8)–(10) будем принимать за нулевое приближение по ε к точным решениям. В первом приближении по ε из (6) получим

$$\omega_1^2 = gk,$$

$$\omega_2^2 = gk\frac{\operatorname{sh}(h_1k)\operatorname{sh}(h_2k)}{\{\operatorname{sh}[(h_1+h_2)k]\}^3}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right),$$

$$\omega_3^2 = gk\left[\operatorname{th}\big((h_1+h_2)k\big)\frac{(\rho_3-\rho_1)}{\operatorname{th}\big((h_1+h_2)k\big)\rho_1+\rho_3}+G(k)\right],$$

$$G(k) \equiv \frac{\rho_3(\rho_1-\rho_2)}{\rho_1(2\rho_1-\rho_3(1-\operatorname{cth}[(h_1+h_2)k]))}$$

$$\times\frac{\operatorname{sh}(h_1k)\operatorname{sh}(h_2k)}{(\rho_1+\rho_3\operatorname{cth}[(h_1+h_2)k])^2\operatorname{sh}^3[(h_1+h_2)k]}$$

$$\times\Big\{2\big(1+\operatorname{ch}(h_1k)\big)\big(1+\operatorname{cth}[(h_1+h_2)k]\big)\operatorname{sh}^2[(h_1+h_2)k]\rho_1^2$$

$$+\rho_1\rho_3\big(3+\operatorname{cth}(h_1k)]\big)-\rho_3^2\big(1-\operatorname{cth}[(h_1+h_2)k]\big)\Big\}.$$

Видно, что $G(k)$ стремится к нулю при $\rho_2\to\rho_1$.

На рис. 2 приведены зависимости обезразмеренных (на $\rho_1 = h_1 = g = 1$) квадратов частот внутренних волн ω_2 и ω_3 от волнового числа и отношения плотностей (для ω_2 — плотная сетка, для ω_3 — редкая сетка). Видно, что частоты ω_2 и ω_3 близки по величине, хотя различно зависят от аргументов.

Квадрат частоты поверхностных волн $\omega_1^2 = gk$ существенно выше (он определится k, и по порядку будет много больше чем для внутренних волн) и не приведен на рис. 2 ввиду элементарности и несоразмерности.

Соотношение между амплитудами поверхностных и внутренних волн, порожденных различными границами раздела

Имея в виду возможность реализации в описанной системе эффекта „мертвой воды“ [1], найдем отношения амплитуд

$$\chi_{2,1}\equiv\frac{\alpha_2}{\alpha_1},\ \chi_{3,1}\equiv\frac{\alpha_3}{\alpha_1},\ \chi_{3,2}\equiv\frac{\alpha_3}{\alpha_2}.$$

Искомые отношения легко получить из системы (3)–(5). В самом деле из (3) найдем

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \operatorname{ch}(kh_1)-\frac{gk}{\omega^2}\operatorname{sh}(kh_1). \tag{11}$$

Из (5) получим

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{1}{\operatorname{sh}(kh_2)\Big[(\operatorname{cth}(kh_2)+\frac{\rho_3}{\rho_2})-(\frac{\rho_3}{\rho_2}-1)\frac{kg}{\omega^2}\Big]}. \tag{12}$$

И наконец, из (4) найдем

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left\{\left[\frac{\rho_1\operatorname{ch}(kh_1)\operatorname{sh}(kh_2)}{\rho_2\operatorname{sh}(kh_1)}+\frac{\rho_2\operatorname{ch}(kh_2)\operatorname{sh}(kh_1)}{\rho_2\operatorname{sh}(kh_1)}\right]\right.$$

$$\left.-\frac{gk}{\omega^2}\frac{(\rho_2-\rho_1)\operatorname{sh}(kh_1)\operatorname{sh}(kh_2)}{\rho_2\operatorname{sh}(kh_1)}\right\}-\frac{\rho_1\operatorname{sh}(kh_2)}{\rho_2\operatorname{sh}(kh_1)}. \tag{13}$$

С учетом (11) получается окончательное выражение для отношения α_3/α_1, которое мы не будем выписывать ввиду элементарности.

В эти соотношения входит квадрат частоты, имеющий три ветви. Для первой из них, т. е. для поверхностной волны, при $\omega^2 = gk$ из (6) получим

$$\alpha_2/\alpha_1 = \exp(-kh_1).$$

Из (12) при $\omega^2 = gk$ получим

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \left[\left(\operatorname{ch}(kh_2)+\frac{\rho_3}{\rho_2}\operatorname{sh}(kh_2)\right)\right]^{-1}\approx\exp(-kh_2).$$

Из (13) при $\omega^2 = gk$ получим

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \left\{-\frac{\rho_1}{\operatorname{sh}(kh_1)\rho_2}+\exp(-kh_1)\left(\operatorname{cth}(kh_1)\frac{\rho_1}{\rho_2}+\operatorname{cth}(kh_2)\right)\right\}$$

$$\times\operatorname{sh}(kh_2)\approx\exp\big(-k(h_1+h_2)\big).$$

Для второй ветви, т. е. для внутренней волны, при

$$\omega_2^2 = gk\frac{\operatorname{sh}(h_1k)\operatorname{sh}(h_2k)}{(\operatorname{sh}[(h_1+h_2)k])^3}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right),$$

из (11) получим

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \operatorname{ch}(kh_1)-\frac{\rho_1\{\operatorname{sh}[(h_1+h_2)k]\}^3}{(\rho_2-\rho_1)\operatorname{sh}(h_2k)}.$$

Видно, что при $\rho_2\to\rho_1$ это выражение неограниченно увеличивается, как и положено для внутренних волн [1].

Из (12) для третьей ветви получим

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \left[\frac{\rho_3}{\rho_2}\,\mathrm{sh}(kh_2) + \mathrm{ch}(kh_2) - \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{(\rho_3-\rho_2)}{(\rho_2-\rho_1)}\frac{\{\mathrm{sh}[(h_1+h_2)k]\}^3}{\mathrm{sh}(h_1 k)}\right]^{-1}.$$

То есть отношение амплитуды волны на третьей поверхности к амплитуде волны на второй остается конечным. А поскольку амплитуда волны на второй поверхности неограниченно возрастает, то и амплитуда волны на третьей поверхности также неограниченно растет. Это подтверждается нахождением отношения амплитуд внутренней волны на третьей границе раздела к амплитуде поверхностной волны на первой. В самом деле из (13) для второй ветви получим:

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left\{\left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\,\mathrm{cth}(kh_1)\,\mathrm{sh}(kh_2) + \mathrm{ch}(kh_2)\right] - \frac{\rho_1}{\rho_2}\frac{\{\mathrm{sh}[(h_1+h_2)k]\}^3}{\mathrm{sh}(kh_1)}\right\} - \frac{\rho_1\,\mathrm{sh}(kh_2)}{\rho_2\,\mathrm{sh}(kh_1)}.$$

Несложно видеть, что при $\rho_2 \to \rho_1$ это отношение амплитуд неограниченно увеличивается, так же как и выше полученное отношение α_2/α_1.

Таким образом, амплитуды внутренних волн и на второй и на третьей границах раздела (для второй ветви дисперсионного уравнения) могут существенно превышать амплитуду поверхностной волны, различаясь между собой в конечное число раз.

И наконец, для третьей ветви дисперсионного уравнения найдем, что

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \mathrm{ch}(kh_1) - \frac{\mathrm{sh}(kh_1)F(k)}{R(k)+G(k)F(k)},$$

$$R(k) \equiv (\rho_3-\rho_1)\,\mathrm{th}[(h_1+h_2)k],$$

$$F(k) \equiv \mathrm{th}[((h_1+h_2)k)\rho_1+\rho_3].$$

Видно, что это отношение может неограниченно расти только при $\rho_1 \to \rho_2 \to \rho_3$.

Для отношения амплитуд внутренних волн аналогично найдем

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\rho_2[R(k)+G(k)F(k)]}{\mathrm{sh}(kh_2)[(\rho_2\,\mathrm{cth}(kh_2)+\rho_3)\times[R(k)+G(k)F(k)] - (\rho_3-\rho_2)F(k)]},$$

т.е. данное отношение также остается конечным при $\rho_1 \to \rho_2 \to \rho_3$.

Для отношения внутренней волны, порожденной нижней поверхностью раздела к амплитуде поверхностной, найдем

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_1} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left\{\left[\frac{\rho_1}{\rho_2}\,\mathrm{cth}(kh_1)\,\mathrm{sh}(kh_2) + \mathrm{ch}(kh_2)\right] - \frac{(\rho_2-\rho_1)F(k)\,\mathrm{sh}(kh_2)}{[R(k)+G(k)F(k)]\rho_2}\right\} - \frac{\rho_1\,\mathrm{sh}(kh_2)}{\rho_2\,\mathrm{sh}(kh_1)}.$$

При $\rho_1 \to \rho_2 \to \rho_3$ это отношение расходится. Здесь следует отметить, что изменение плотности воды на термо-, галоклинах составляет тысячные доли величины [10,11], а ее изменения в проливах, между водами морей и океанов разной солености или при таянии льда в морях и океанах составляют сотые доли величины [12,13] и вполне обеспечивает увеличение амплитуд внутренних волн по сравнению с поверхностными волнами. Выполнение серии строгих равенств типа $\rho_1 = \rho_2 = \rho_3$ не требуется, а вполне достаточно, чтобы выполнялись приближенные равенства $\rho_1 \approx \rho_2 \approx \rho_3$.

Заключение

Выведено в аналитическом виде дисперсионное уравнение для периодических гравитационных волн в трехслойной несмешивающейся жидкости. Показано, что частоты внутренних волн сравнимы по величине и много меньше частоты поверхностных волн. Как показывает расчет, при малой разности плотностей жидкостей амплитуды внутренних волн много больше амплитуд поверхностных, а отношение внутренних волн остается конечным.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 14–01–00170-а.

Список литературы

[1] *Сретенский Л.Н.* Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 815 с.
[2] *La Rocca M., Sciortino G., Boniforti M.A.* // Nonlinear Oscil. 2003. Vol. 6. N 2. P. 196–204.
[3] *Hanyang Gu, Liejin Guo* // Prog. Nat. Sci. 2005. Vol. 15. N 11. P. 1026–1034.
[4] *Григорьев А.И., Федоров М.С., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 5. С. 130–140.
[5] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Федоров М.С.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 7. С. 8–17.
[6] *Ширяева С.О., Петрушов Н.А., Григорьев А.И., Федоров М.С.* // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 9. С. 31–38.
[7] *Григорьев А.И., Федоров М.С., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2014. № 6. С. 37–44.
[8] *Mercier M.J., Vasseur R., Dauxois T.* // Nonlinear Proc. Geoph. 2011. Vol. 18. P. 193–208.
[9] *Ле Блон П., Майсек Л.* Волны в океане. Т. 1. М.: Мир, 1981. 480 с.
[10] *Федоров К.Н.* Тонкая термохалинная структура вод океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1976. 185 с.
[11] *Архипкин В.С., Добролюбов С.А.* Океанология (Физические свойства морской воды). М.: МАКС-ПРЕСС, 2005. 215 с.
[12] Таблицы физических величин. Справочник / Под ред. акад. И.К. Кикоина. М.: Атомиздат, 1976. 1008 с.
[13] *Бабичев А.П., Бабушкина Н.А., Братковский А.М.* и др. Физические величины. Справочник / Под ред. И.С. Григорьева, Е.З. Мейлихова. М.: Энергоатомиздат, 1991. 1232 с.