

01

## Математическое моделирование охлаждения шлакового расплава системой металлических шаров

© В.В. Виноградов,<sup>1</sup> А.Г. Шакуров,<sup>1</sup> И.Л. Тяжелникова,<sup>1</sup> Е.П. Виноградова,<sup>2</sup> В.С. Есенбеков<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Центральный научно-исследовательский институт черной металлургии им. И.П. Бардина, 107005 Москва, Россия

<sup>2</sup> ИПУ им. В.А. Трапезникова РАН, 117806 Москва, Россия

<sup>3</sup> Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 105005 Москва, Россия  
e-mail: vvvinogradov@mtu-net.ru

(Поступило в Редакцию 17 марта 2015 г.)

Получено аналитическое решение задачи о теплопроводности в шаре при несопряженных краевых условиях в случае, когда граничные условия являются линейной функцией от времени. Разработана компьютерная модель аккумулирующей способности системы металлических шаров при циклическом режиме охлаждения шлакового расплава, позволившая установить и проанализировать основные особенности работы установки по переработке шлаков за счет термической стабилизации их структуры. Сравнением аналитического и численного решений проверена адекватность разработанной компьютерной модели и проанализированы особенности численного решения уравнения теплопроводности в шаре, связанные с несопряженностью краевых условий.

### Введение

Высокий уровень экологичности и эффективности полного цикла металлургического производства должен предусматривать переработку доменных и сталеплавильных шлаков в востребованную товарную продукцию с заданным комплексом потребительских свойств. При таком подходе исключаются этапы хранения шлаков и образования отвалов. Для решения этой практически весьма важной задачи необходимо обеспечить получение непосредственно из шлакового расплава твердого продукта в стабильном состоянии, исключающем распад шлаков в порошок, за счет термической стабилизации их структуры. Этого можно добиться с помощью управляемого ускоренного охлаждения шлакового расплава [1–3]. На практике в качестве охлаждающего агрегата весьма перспективным представляется использование системы металлических шаров, определенного радиуса (насадки), через которую протекает (при этом охлаждаясь) сливной расплав шлака. Для разработки технологии и отработки режимов отвердевания шлака в таких условиях весьма продуктивным является применение соответствующей математической (компьютерной) модели процесса, которая основывается на особенностях аккумуляции тепла системой металлических шаров.

С теплофизической точки зрения процесс работы такой установки барабанного типа в циклическом режиме выглядит следующим образом [1–3]. В секцию установки, заполненной определенным количеством стальных шаров ( $N_B \approx 500$ ), заливается жидкий шлак, который, проникая в межшаровые пространства, охлаждается вплоть до его полного отвердевания. После чего отвердевший шлак выгружается. Во время следующего холостого хода

секции система металлических шаров охлаждается как за счет естественного излучения, так и за счет возможного охлаждения водой. После этого расплавленный шлак снова заливается в секцию с металлическими шарами, и процесс переработки шлака циклически продолжается.

### Задача о теплопроводности в шаре с несопряженными краевыми условиями

Математическое описание принципов работы такой установки проведем на примере теплового процесса, протекающего в отдельно взятом шаре, имея в виду, что при незначительном влиянии шаров друг на друга эти результаты и принципы естественным образом могут быть перенесены на систему шаров. Рассмотрим процесс теплопереноса в сферически симметричном стальном шаре радиуса  $R$  при следующих начальных и граничных условиях:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (0 < r < R), \quad (1)$$

$$T(r, t = 0) = T_0, \quad (2)$$

$$T(r = R, t) = T_H - kt \quad \left( k = \frac{T_H - T_K}{\Delta t_w} \right). \quad (3)$$

Здесь  $a$  — удельный коэффициент теплопроводности материала шара,  $T_0$  — начальная температура металлического шара,  $T_H$  и  $T_K$  — начальная и конечная температуры разливаемого шлака. Поскольку полагается, что между жидким шлаком и поверхностью

металлического шара имеется абсолютный контакт, то  $T_H$  и  $T_K$  являются также начальной и конечной температурами поверхности шара. Температура шлака (и соответственно поверхности шара) в процессе охлаждения изменяется по линейному закону (3),  $\Delta t_w$  — время охлаждения шлака в первой (рабочей) части цикла и соответственно нагрева шара. Заметим, что при работе установки в реальных условиях изменение температуры шлака определяется не только отбором тепла шаровой системой (насадкой), но и другими процессами, такими как охлаждение водой, излучением, кондуктивным теплопереносом от деталей и оборудования установки и т.д. Целью настоящей работы является анализ особенностей аккумуляции тепла именно шаровой системой, вносящей основной вклад ( $\approx 70-80\%$ ) в охлаждение и отверждение шлака.

Сделав стандартную замену переменных  $T = r\check{T}$ , приводим задачу (1)–(3) к задаче о распространении тепла в пластине толщиной  $R$  с соответствующими краевыми условиями. Тогда, следуя [4,5], решение уравнения (1) с краевыми условиями (2), (3) может быть записано в следующем виде:

$$T(r, t) = \frac{2}{Rr} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) \exp(-\alpha t) \times \left\{ T_0 \int_0^R \xi \sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) d\xi - (-1)^n \pi na \times \int_0^t (T_H - k\tau) \exp(\alpha\tau) d\tau \right\}, \quad (4)$$

где  $\alpha = \pi^2 n^2 a / R^2$ .

Проведя интегрирование в (4) и учитывая, что приведенные ниже ряды имеют следующие значения:  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin nx = -\frac{x}{2}$  (см. [6], стр. 52, формула 1.441.3),  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^4} = \frac{1}{3} \pi^4 B_4$  (см. [6], стр. 21, формула 0.233.3),  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx = \frac{x}{12} (\pi^2 - x^2)$  (настоящая работа), (где  $B_4$  — модуль числа Бернулли и равно (см. [6])  $1/30$ ), решение для кинетики распределения температуры в шаре будет иметь следующий вид:

$$T(r, t) = T_H - k \left( t - \frac{R^2 - r^2}{6a} \right) + \frac{2R(T_H - T_0)}{\pi r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) \exp(-\alpha t) + \frac{2kR^3}{a\pi^3} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin\left(\frac{\pi nr}{R}\right) \exp(-\alpha t). \quad (5)$$

Используя определение для средней температуры шара:

$$T_M = \frac{3}{R^3} \int_0^R r^2 T(r, t) dr,$$

получим следующее выражение:

$$T_M(t) = T_H - k \left( t - \frac{R^2}{15} \right) - \frac{6}{\pi^2} (T_H - T_0) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \exp(-\alpha t) - \frac{6kR^2}{\alpha\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \exp(-\alpha t). \quad (6)$$

Отметим, что решение уравнения (1) с сопряженными краевыми условиями, т.е. когда  $T_0 = T_H = 0$  (тогда  $T(r = R, t) = -kt$ , где  $k$  — постоянная), приведено в [4]. В этом случае выражение для кинетики распределения температуры в шаре и для его среднего значения (с учетом, что при  $T_H = 0$  условие (3) со знаком минус) имеет следующий вид:

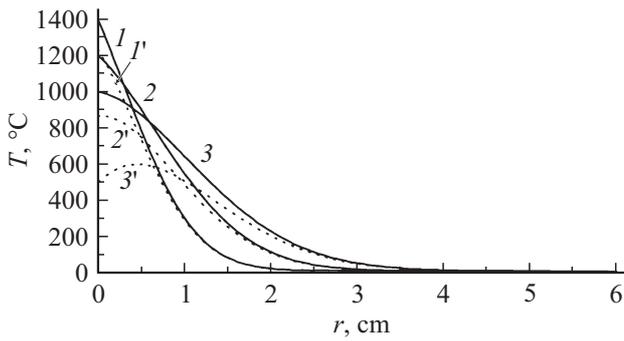
$$T(r, t) = -k \left( t - \frac{R^2 - r^2}{6a} \right) + \frac{2kR^3}{a\pi^3 r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3} \exp(-\alpha t) \sin \frac{\pi nr}{R}, \quad (7)$$

$$T_M(r, t) = -k \left( t - \frac{R^2}{15a} \right) + \frac{6kR^3}{a\pi^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \exp(-\alpha t). \quad (8)$$

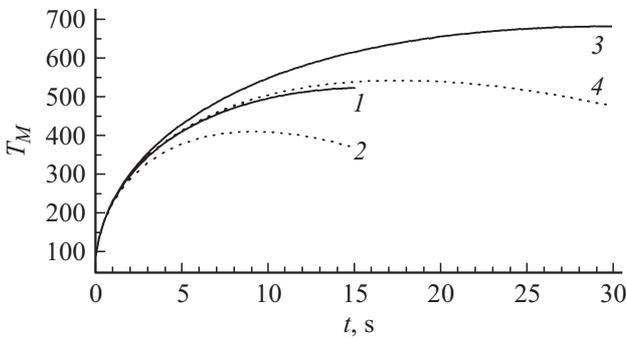
Воспользуемся выражениями (7), (8) для проверки корректности полученных формул (5) и (6). Если в выражениях (5) и (6) положить  $T_0$  и  $T_H$  равными нулю, то видно, что формулы (5) и (6) в точности совпадают с выражениями (7) и (8) соответственно.

Для анализа процесса теплопередачи в шаре проведем суммирование рядов (5)–(8), которое проводилось в среде Mathcad. Суммирование показало, что эти ряды очень медленно сходятся. Так, для получения приемлемого решения (с точностью до 1%) во всем диапазоне значений  $r$  ( $0 < r < R$ ) приходилось использовать  $10^4$  членов ряда. Наиболее медленно ряды сходятся для получения значений температуры в приповерхностной области. Причем серьезных различий в количестве членов ряда, дающих удовлетворительный результат при суммировании сопряженных (7) и несопряженных (5) решений, нет.

На рис. 1, 2 представлены результаты расчетов по формулам (5), (6) для несопряженного краевого условия при характерных значениях теплофизических характеристик и параметров задачи, соответствующих работе установки в промышленных условиях:  $R = 6$  см,  $T_H = 20^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 1600^\circ\text{C}$ ,  $a = 0.05$  см<sup>2</sup>/сек,  $\Delta t_w = 15$  с. Заметим, что на практике выбор величины  $R$  происходит исходя из следующих физических соображений. С одной стороны, размер шаров должен быть достаточно большим, чтобы



**Рис. 1.** Кинетика распределения температуры в шаре при низкой ( $T_K = 1000^\circ\text{C}$  — сплошная линия) и высокой ( $T_K = 500^\circ\text{C}$  — пунктир) скоростях охлаждения:  $t_1 = 5\text{ s}$  (кривые 1 и 1'),  $t_2 = 10\text{ s}$  (2 и 2'),  $t_3 = 15\text{ s}$  (3 и 3').



**Рис. 2.** Изменение средней температуры шара при низкой ( $T_K = 1000^\circ\text{C}$  — сплошная линия) и высокой ( $T_K = 500^\circ\text{C}$  — пунктир) скоростях охлаждения при  $\Delta t_w = 15\text{ s}$  (кривые 1 и 2) и  $\Delta t_w = 30\text{ s}$  (3 и 4).

межшаровое пространство (пустоты) по возможности быстро за счет гидродинамического течения (а не фильтрации) заполнялось расплавленным шлаком. А с другой стороны, размер межшарового пространства не может быть слишком большим, так как необходимо, чтобы за отведенное время рабочего цикла шлаковая пора успевала отвердеть полностью. Этим условиям при  $\Delta t_w = 15\text{ s}$  отвечают значения  $R \approx 5\text{--}10\text{ cm}$ .

На рис. 1 показана кинетика распределения температуры в стальной сфере при относительно невысокой скорости охлаждения шлака (большое значение температуры  $T_K = 1000^\circ\text{C}$ ) — кривые 1–3 и при высокой скорости охлаждения шлака (низкое значение  $T_K = 500^\circ\text{C}$ ) — кривые 1'–3'. Кривые приведены для моментов времени  $t = 5, 10$  и  $15\text{ s}$  соответственно. Из приведенных рисунков видно, что при невысокой скорости охлаждения шлака (кривые 1–3) все температурные кривые монотонно снижаются, проникая в глубину шара, т.е. с течением времени температура в приповерхностной части шара понижается и нарастает в его глубине. При высокой скорости охлаждения шлака (кривые 1'–3') картина несколько иная. Если в начале процесса температура внутри шара монотонно снижает-

ся, то примерно к 7 s монотонность хода температуры нарушается и наступает стадия, когда шар прекращает отбирать тепло и, наоборот, начинает его отдавать. Это хорошо видно из рис. 2, на котором показана кинетика способности шара аккумулировать тепло, т.е. изменение средней температуры шара от времени (выражение (6)). Если при относительно невысокой скорости охлаждения (кривая 1) шар в течение всего периода охлаждает шлак с уменьшающейся интенсивностью, то при высокой скорости охлаждения (кривая 2) почти половину времени шаровая система не аккумулирует тепло, исходящее от шлака, а отдает. На этом же рисунке проиллюстрировано влияние продолжительности рабочего цикла ( $\Delta t_w$ ) на кинетику отбора тепла шаровой системой. Из этого рисунка видно, что рост  $\Delta t_w$  негативно сказывается на способности шаровой системы аккумулировать тепло. Это хорошо видно из сравнения кривых 1 и 4, у которых очень близкие значения  $k$  ( $40\text{ deg/s}$  и  $37\text{ deg/s}$ ), но столь отличные данные по аккумуляции тепла при различных значениях  $\Delta t_w$  (15 и 30 s). Из хода кривой 3 видно, что даже при сравнительно небольшой скорости охлаждения шлака ( $20\text{ deg/s}$ ) почти треть цикла тепло очень медленно аккумулируется шаровой системой.

### Математическая модель охлаждения шара во время холостого хода

После окончания рабочего цикла отвердевший шлак выгружается из секции барабана (шаровой системы), после чего она оказывается в состоянии холостого хода. В это время шаровая система охлаждается как за счет излучения с поверхности шаров, так и за счет охлаждения водой. Кинетика изменения температуры шара во время холостого хода описывается уравнением (1) с начальным условием в виде (5) при  $t = \Delta t_w$  и граничном условии третьего рода на поверхности шара, имеющего следующий вид:

$$\lambda_m \frac{\partial T(r=R)}{\partial r} = - \left[ \varepsilon \varepsilon_0 \gamma 10^{-8} T^4(r=R, t) + \frac{M_B (c_B (100^\circ\text{C} - T_B) + q_B)}{4\pi R^2 \Delta t_h} \right]. \quad (9)$$

Здесь  $\lambda_m$  — удельная теплопроводность материала шара,  $\varepsilon$  — степень черноты поверхности шара,  $\varepsilon_0 = 5.67 \cdot 10^{-4}\text{ W/cm}^2$  — коэффициент излучения абсолютно черного тела,  $\gamma$  — коэффициент, учитывающий тот факт, что только часть лучистой энергии идет на охлаждение поверхности шара, а часть энергии возвращается в результате взаимного облучения шаров внутри шаровой системы,  $T_B, M_B$  — температура и масса охлаждающей воды, приходящейся на один шар (полагается, что вся подводимая вода расходуется на охлаждение шаров во время холостого хода),  $c_B$  и  $q_B$  —

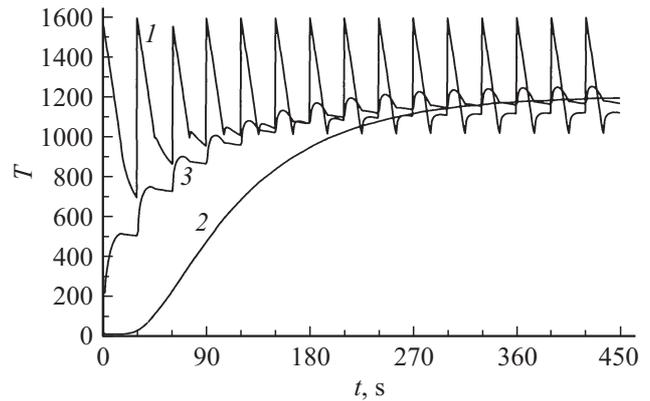
удельные теплоемкость и теплота испарения воды соответственно,  $\Delta t_h$  — продолжительность холостого хода работы установки, обычно она равна продолжительности рабочего хода  $\Delta t_w$ .

Уравнение (1) с начальным условием (5) при  $t = \Delta t_w$  и граничным условием (8) уже не может быть решено аналитически. Поэтому для описания кинетики распределения температуры в шаровой системе во время холостого хода и во время последующих циклов работы установки была разработана и составлена вычислительная компьютерная программа для РС. В программе была использована явная конечно-разностная схема [7,8] с  $N$  числом равномерных шагов  $\Delta t = R/N$  по пространственной координате (в расчетах, если не указано иное, то  $N = 100$ ). А шаг по времени  $\Delta t$  удовлетворял известному условию устойчивости и сходимости для одномерных явных разностных схем, например, [7,8]:

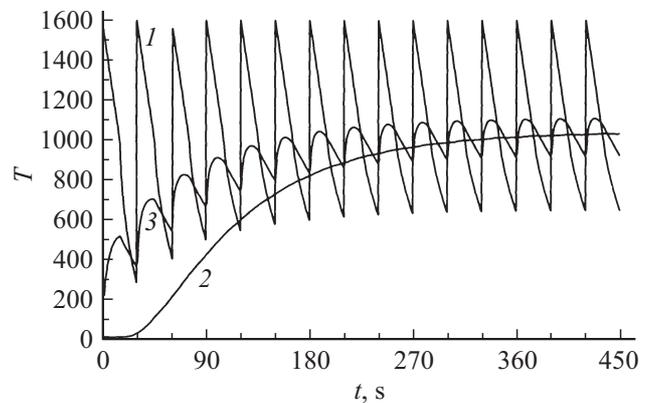
$$\gamma_c = \alpha \Delta t / (\Delta r)^2 < 1/2.$$

Для апробации разработанной компьютерной программы и уточнения особенностей, возникающих при решении уравнения (1) численным методом, связанных с не сопряженностью краевых условий, сравнивалось аналитическое (5) и численное решение системы уравнений (1)–(3) для первого рабочего хода при использованных выше значениях параметров задачи. Сравнение численного и аналитического (5) решений, проведенное во всем диапазоне значений  $r$  и  $t$ , показало следующее. Полученные решения совпадают с точностью, с которой может быть получено численное решение, определяемое параметрами используемой численной сетки [7,8], кроме значений  $t < 0.5$  s. Известно, что при наличии скачков температуры (из-за не сопряженности краевых условий) или скачков у теплофизических характеристик (из-за фазового перехода) при использовании численных методов (особенно явной конечно-разностной схемы) всегда имеются определенные сложности в получении корректных численных результатов, преодолеваемых с помощью специальных методов [7–10]. Наличие аналитического решения (5) позволяет провести оценку неточности нашего численного решения задачи в начальные моменты времени ( $t < 0.5$  s) и апробировать простой способ его уточнения. Так, сравнение этих решений показало, что для совпадения численного решения с аналитическим решением (5) на начальном этапе (до 0.5 s) необходимо размельчать шаг по времени  $\approx$  в 10 раз.

Для анализа поведения температуры в шаровой системе и аккумуляции тепла во время холостого хода и во время дальнейших циклов работы установки было получено численное решение уравнения (1) с условиями (5) и (8) при следующих значениях теплофизических характеристик и параметров задачи:  $R = 6$  см,  $T_H = 20^\circ\text{C}$ ,  $T_0 = 1600^\circ\text{C}$ ,  $a = 0.05$  см<sup>2</sup>/с,  $\Delta t_h = 15$  с,  $\varepsilon = 0.8$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $c_B = 4.2$  кДж/кгК,  $c_M = 0.695$  кДж/кгК,  $q_B = 2.26$  кДж/кг,  $\lambda_m = 40$  Вт/мК,  $T_B = 20^\circ\text{C}$ . В первом варианте расчета величина  $M_B = 0$ , т.е. охлаждение



**Рис. 3.** Кинетика температуры поверхности (1), в центре (2) и средней температуры (кривая 3) шара с учетом излучения во время холостого хода.



**Рис. 4.** Кинетика температуры поверхности (1), в центре (2) и средней температуры (кривая 3) шара с учетом излучения и охлаждения водой во время холостого хода.

идет только за счет лучистой энергии, так называемый базовый вариант работы установки. Расчеты показали, что в этом случае во время холостого хода температура в шаре начинает выравниваться — тепло перетекает из периферийных областей в менее прогретую центральную часть шара. Наиболее интенсивно охлаждается приповерхностная область шара, поскольку здесь охлаждение идет как за счет переноса тепла в центр шара, так и за счет охлаждения шара через его поверхность (см. первый цикл на рис. 3). При этом средняя температура шара снижается незначительно, поскольку интегральное охлаждение шара происходит в основном за счет излучения с поверхности шара, температура которой достаточно быстро падает, что хорошо видно в конце первого цикла на рис. 3.

Применение воды или другого охладителя позволяет регулировать (управлять) уровнем средней температуры шара и соответственно влиять на следующих циклах на аккумуляцию тепла шаровой системой. Для иллюстрации на рис. 4 приведены результаты расчетов,

выполненных при тех же значениях параметров, что и на рис. 3, но при использовании воды в количестве, соответствующем величине  $M_B = 0.3 \text{ kg/b}$  (см. первый цикл на рис. 4). В результате (по сравнению с результатами рис. 3) температура поверхности шара в конце холостого хода понизилась более чем на  $400^\circ\text{C}$ , средняя температура шара понизилась почти на  $200^\circ\text{C}$ , хотя в центре температура осталась практически неизменной.

### Математическое моделирование нагрева шара при циклическом граничном условии

После завершения холостого хода барабанная секция (шаровая система) снова загружается шлаковым расплавом и далее этот процесс многократно повторяется. Рассчитанные изменения температуры на поверхности (кривые 1), в центре (кривые 2) и средняя температура шара (кривые 3) во время первых 15 циклов работы установки приведены на рис. 3 и 4. На рис. 3 охлаждение шаровой системы идет только за счет излучения, а на рис. 4 охлаждение идет как за счет излучения, так и за счет воды. Из этих рисунков видно следующее. В обоих случаях, пока в достаточной мере не прогреется тело шара (а это в обоих случаях первые 3–4 цикла) весьма интенсивно во время рабочего хода цикла в целом растёт и менее интенсивно падает во время холостого хода средняя температура шара (кривые 3), что отражает интенсивную аккумуляцию тепла шаровой системой. При этом величина средней температуры шара с каждым циклом растёт монотонно, но с понижающейся скоростью. После примерно 10 циклов средняя величина средней температуры шара перестает расти — система переходит в стационарно-колебательный режим. Во время рабочего хода шар нагревается ровно настолько, насколько охлаждается во время холостого хода. Причем время перехода к стационарно-колебательному режиму практически не зависит от применения или не применения охладителя. Охлаждение водой сказывается на высоте уровня температуры, вокруг которого происходит колебание среднего значения температуры шара. При охлаждении водой средний уровень оказывается более чем на  $200^\circ\text{C}$  ниже, чем без воды. В целом при использовании охлаждения водой шаровая система более интенсивно отдает тепло, за счет чего и более интенсивно отбирает тепло от шлака, что и делает ее работу более оптимальной.

Таким образом, проведенный сравнительный анализ на рис. 3,4 показывает, что, изменяя расход воды, можно достаточно эффективно управлять аккумулярующей способностью шаровой системы и соответственно обрабатывать и оптимизировать технологические режимы работы установки по переработки шлаков за счет термической стабилизации их структуры.

### Список литературы

- [1] Школьник Я.Ш., Шакуров А.Г., Мандель М.З. // *Металлург.* 2011. № 10. С. 58–60.
- [2] Шакуров А.Г., Школьник Я.Ш., Паршин В.М., Чертов А.Д., Журавлев В.В. // *Сталь.* 2012. № 5. С. 19–21.
- [3] Шакуров А.Г., Школьник Я.Ш., Журавлев В.В., Паршин В.М., Чертов А.Д., Ковалев В.Н., Федотов О.В., Мороз Д.В. // *Бюллетень научно-технической информации. Черная металлургия.* 2014. № 2. С. 82–86.
- [4] Карслоу Г., Егер Д. *Темплопроводность твердых тел.* М.: Наука, 1964. С. 488.
- [5] Полянин Д.А., Вязьмин А.В., Журов А.И., Казенин Д.А. *Справочник по точным решениям уравнений тепло-массопереноса.* М.: Факторил, 1998. С. 368.
- [6] Градштейн И.С., Рыжик И.М. *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.* М.: ГРФМЛ, 1973. С. 1100.
- [7] Самарский А.А. *Теория разностных схем.* М.: Наука, 1983. С. 614.
- [8] Рихтмайер Р., Мортон К. *Разностные методы решения краевых задач.* М.: Мир, 1972. С. 420.
- [9] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1966. С. 724.
- [10] Борисов В.Т., Виноградов В.В., Тяжелыникова И.Л. // *Изв. АН СССР. Металлы.* 1989. № 6. С. 48–54.