

Протоядро для интеграла обратных столкновений уравнения Больцмана в случае изотропного сечения рассеяния

© А.Я. Эндер,¹ И.А. Эндер,² Л.А. Бакалейников,¹ Е.Ю. Флегонтова¹

¹ Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия

² Санкт-Петербургский государственный университет,
199034 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: fl.xiees@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 11 марта 2015 г.)

Показано, что любое ядро интеграла столкновений изотропного по скоростям нелинейного уравнения Больцмана может быть выражено через универсальное, не зависящее от модели взаимодействия частиц протоядро с помощью однократного интегрирования с сечением взаимодействия. Это открывает новые возможности для расчета любых ядер не изотропного уравнения Больцмана, позволяя использовать для их построения найденные ранее рекуррентные соотношения на уровне протоядер. Приведено три различных вывода выражения для протоядра, в том числе для произвольного отношения масс сталкивающихся частиц.

Исторический обзор

Одной из важнейших задач при решении уравнения Больцмана является расчет его сложного пятикратного интеграла обратных столкновений, который в англоязычной литературе получил название Gain term. Мы в этой работе будем называть его приходным членом.

Первое серьезное исследование ядра интеграла столкновений уравнения Больцмана принадлежит Гильберту [1]. Он рассматривал линеаризованное уравнение Больцмана. Путем ряда сложных преобразований ему удалось построить линейное ядро интеграла столкновений для модели твердых шаров, зависящее от векторных скоростей \mathbf{v}_1 и \mathbf{v} .

Дальнейшее исследование этого ядра проводилось Гекке [2]. Им было показано, что ядро обладает свойством ортогональной инвариантности, т.е. инвариантно относительно поворота координатных осей. Ортогонально-инвариантная функция зависит не от \mathbf{v} , \mathbf{v}_1 , а от величин скоростей v , v_1 и скалярного произведения $(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$. Этим свойством обладают ядра не только для модели твердых шаров, но и для многих других сечений взаимодействия. Для ортогональной инвариантности ядра достаточно, чтобы в системе не было выделенного направления, вдоль которого происходила бы ориентация частиц.

Гекке предложил разложить функцию распределения (ФР) по сферическим гармоникам Y_{lm} и для ортогонально инвариантных ядер доказал теорему Гекке [3]. Согласно этой теореме, собственными функциями линейного интегрального оператора с ортогонально-инвариантным ядром являются сферические гармоники Y_{lm} , т.е. для любой функции вида $\psi(v)Y_{lm}$ выполняется равенство

$$\hat{L}(\psi(v)Y_{lm}) = Y_{lm}\hat{L}^l(\psi(v)). \quad (1)$$

Оператор \hat{L}^l не зависит от индекса m , и функция $\hat{L}^l(\psi(v))$ зависит лишь от модуля скорости [2,3]. Та-

ким образом, линейное ядро Гильберта разлагается на сумму ядер $L_l(v, v_1)$, для которых Гекке получил явные формулы. Напомним, что сделано это было только для модели твердых шаров. Много позже результаты Гекке были повторены [4].

Ядра $L_l(v, v_1)$ были использованы для решения ряда граничных задач Лойялкой [5]. В этих работах был предложен интересный метод решения уравнения Больцмана. На каждом временном шаге решение разбивалось на два этапа. На первом этапе методом характеристик решалось уравнение Больцмана без приходного члена. На втором этапе получившаяся ФР разлагалась по сферическим гармоникам и вычислялся приходный член с помощью ядер Гекке. Этот метод дал исключительно точные результаты для распределения макропараметров около стенки. Он не получил дальнейшего развития в первую очередь потому, что линейные ядра $L_l(v, v_1)$ были известны только для модели твердых шаров. Кроме того, при сильных отклонениях от равновесия линейных ядер недостаточно, необходимы нелинейные ядра. Первый недостаток был частично исправлен в [6], где с использованием формулы Хилле–Харди были построены линейные ядра для сечений взаимодействия, обратно пропорциональных относительной скорости при произвольной зависимости от угла рассеяния. Частным случаем такой модели с сечением, изотропным по углу рассеяния, является модель псевдомаксвелловских молекул (ПММ, или модель Крука–Ву).

Другим аналитическим методом решения уравнения Больцмана, который интенсивно развивался в течение XX века, был моментный метод. В этом методе ФР разлагается по сферическим полиномам Эрмита (функциям Барнетта), представляющим собой произведение сферических функций Y_{lm} и полиномов Сонина (Лагерра) $S_{l+1/2}^r$.

Для сильных отклонений от равновесия нелинейный моментный метод был предложен Барнеттом [7]. Однако должного развития этот метод не получил из-за огромных сложностей в вычислении нелинейных МЭ.

В [8–11] показано, что между нелинейными МЭ существует много соотношений, которые могут быть использованы как рекуррентные соотношения. Была разработана процедура, с помощью которой с высокой точностью считаются МЭ с большими индексами. Если ранее нелинейные МЭ вычислялись для отдельных значений l, r в области $L, N \sim 2, 3$, где L, N — максимальные значения индексов l и r (за исключением изотропного случая, когда при $L = 0$ значение $N \sim 15$), то с помощью рекуррентной процедуры находятся все МЭ в области с $L = 128, N = 128$, если известно некоторое подмножество линейных изотропных МЭ. При необходимости значения L, N выбираются существенно большими.

Соотношения между МЭ выведены из одного общего принципа — инвариантности интеграла столкновений относительно выбора базиса. Соотношения, которые использовались в процедуре построения МЭ в случае осесимметричной ФР, являются следствием инвариантности относительно температуры и величины сдвиговой скорости базиса. В общем случае необходимо использовать инвариантность относительно поворота базиса [8]. Из этой инвариантности, в частности, следует

$$K_{r_1, l_1, m_1, r_2, l_2, m_2}^{r, l, m} = \check{Z}^{m, m_1, m_2}(l, l_1, l_2) K_{r_1, l_1, r_2, l_2}^{r, l}. \quad (2)$$

Здесь $K_{r_1, l_1, m_1, r_2, l_2, m_2}^{r, l, m}$ — матричный элемент интеграла столкновений, а $\check{Z}^{m, m_1, m_2}(l, l_1, l_2)$ — числовые коэффициенты, которые пропорциональны коэффициентам Клебша–Гордана. Важно, что они не зависят от r, r_1, r_2 .

Если выделить моментные уравнения с фиксированными значениями l, m , умножить их на $M_T(c) c^l S_{l+1/2}^r(c^2)$, ($c = v/v_T$ — безразмерная скорость, $v_T = \sqrt{2kT/m}$ — тепловая скорость, $M_T(c) = \frac{1}{\pi^{3/2} v_T^3} e^{-(v/v_T)^2}$ — максвеллиан) и просуммировать по всем значениям r , то кинетическое уравнение переходит в систему интегродифференциальных уравнений

$$\frac{df_{l,m}(v)}{dt} = \sum_{m_1, m_2} \sum_{l_1, l_2} \check{Z}^{m, m_1, m_2}(l, l_1, l_2) \times \hat{G}_{l_1, l_2}^l(f_{l_1, m_1}(v_1), f_{l_2, m_2}(v_2)),$$

где $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$, а $f_{l,m}$ — коэффициент разложения ФР по сферическим гармоникам.

Оператор \hat{G}_{l_1, l_2}^l есть интегральный оператор с нелинейным ядром $G_{l_1, l_2}^l(v, v_1, v_2)$, т.е.

$$\hat{G}_{l_1, l_2}^l(f_{l_1, m_1}(v_1), f_{l_2, m_2}(v_2)) = \int_0^\infty \int_0^\infty G_{l_1, l_2}^l(v, v_1, v_2) f_{l_1, m_1}(v_1) f_{l_2, m_2}(v_2) v_1^2 v_2^2 dv_1 dv_2.$$

Здесь важно отметить, что ядро не зависит от индекса m . Таким образом, ядро можно изучать в осесимметричном случае, когда разложение проводится по полиномам Лежандра. Здесь наблюдается аналогия с теоремой Гекке для линейных ядер. Основное отличие состоит в том, что в линейном случае коэффициент \check{Z} равен единице.

Одновременно с этим мы получили представление ядер через осесимметричные МЭ и полиномы Сонина:

$$G_{l_1, l_2}^l(v, v_1, v_2) = M_T(c) \sum_{r, r_1, r_2} c^l S_{l+1/2}^r(c^2) K_{r_1, l_1, r_2, l_2}^{r, l} \times \frac{c_1^{l_1} S_{l_1+1/2}^{r_1}(c_1^2)}{\sigma_{r_1 l_1}} \frac{c_2^{l_2} S_{l_2+1/2}^{r_2}(c_2^2)}{\sigma_{r_2 l_2}}. \quad (3)$$

Здесь $\sigma_{r,l}$ — нормировочный коэффициент полинома Сонина $S_{l+1/2}^r$. В [12,13] по этим формулам были построены некоторые ядра. При этом использовалась асимптотика МЭ и полиномов Сонина при больших значениях индексов.

Из инвариантности интеграла столкновений относительно выбора сдвиговой скорости базиса выведены рекуррентные соотношения между ядрами G_{l_1, l_2}^l [14,15]. Эти соотношения содержат дифференциальные операторы. Используя эти соотношения, можно построить все ядра, если известно ядро G_{00}^0 . В связи с этим построение ядра G_{00}^0 становится особенно важным.

В 80–90-е годы прошлого века многие исследователи заинтересовались ядром G_{00}^0 . Связано это было с тем, что для изотропной ФР в случае максвелловских молекул было получено решение нелинейного уравнения Больцмана — ВКВ-решение [16].

Основные результаты по построению ядра G_{00}^0 были получены в работах [17–19]. Ядра были построены для двух сечений взаимодействия — HS-модели и ПММ. В [20] для тех же моделей взаимодействия путем преобразования Лапласа из линейных ядер был построен более широкий класс ядер — ядра $G_{l_0}^l$. В [21] были построены ядра для произвольных степенных сечений при изотропном рассеянии.

Результаты, приведенные ниже, позволяют строить значительно более широкий класс изотропных ядер интеграла столкновений нелинейного уравнения Больцмана с помощью однократного интегрирования сечения взаимодействия с универсальной, не зависящей от модели взаимодействия частиц функцией, которую будем называть протоядром.

Протоядро U и его связь с ядром G_{00}^{+0}

В настоящей работе мы будем рассматривать сечения рассеяния, не зависящие от угла рассеяния. Такие изотропные сечения рассеяния зависят только от модуля относительной скорости g . Приходный член интеграла

столкновений для изотропных ФР представляется в виде

$$R_+(v_0) = n_b \int_0^\infty \int_0^\infty G_{00}^{+0}(v_0, v'', v''') f_a \times (v'') f_b(v''') v''^2 v'''^2 dv'' dv''' \quad (4)$$

Здесь $G_{00}^{+0}(v_0, v'', v''')$ — ядро приходного члена интеграла столкновений изотропно распределенных частиц сортов a и b , v'' и v''' — величины скоростей взаимодействующих частиц, v_0 — величина скорости частиц сорта a после столкновения, n_b — концентрация частиц сорта b . В то же время, как показано в [22], для произвольной изотропной функции распределения имеем

$$R_+(v_0) = n_b \int_0^\infty \Sigma(g) g^3 I_F dg, \quad (5)$$

где

$$I_F = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \chi(\theta; g) f_a(v'') f_b(v''') \times \sin \theta_2 d\theta_2 d\varphi_2 \sin \theta_1 d\theta_1 d\varphi_1. \quad (6)$$

Здесь g — относительная скорость, θ — угол рассеяния, $\chi(\theta; g)$ — угловая часть сечения рассеяния, $\Sigma(g)$ — полное сечение рассеяния. Углы θ_1 и φ_1 представляют собой полярные координаты вектора $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$, где $\mathbf{v} = (\mathbf{v}'' + \mathbf{v}''')/2$ — скорость центра масс, в системе отсчета с началом координат в \mathbf{v}_0 и полярной осью $0\mathbf{v}_0$, θ_2 — угол между $0\mathbf{v}$ и вектором относительной скорости до столкновения $\mathbf{g} = \mathbf{v}''' - \mathbf{v}''$, φ_2 — угол между плоскостями $(0\mathbf{v}\mathbf{v}_0)$ и $(0\mathbf{v}\mathbf{g})$ (рис. 1). Поскольку в рассматриваемом нами случае $\chi(\theta; g) = 1$, то ядро G_{00}^{+0} может быть представлено в виде интеграла по относительной скорости от некоторой функции с сечением рассеяния $\Sigma(g)$

$$G_{00}^{+0}(v_0, v_a, v_b) = \int_0^\infty \Sigma(g) U(g, v_0, v_a, v_b) dg. \quad (7)$$

Функцию $U(g, v_0, v_a, v_b)$ будем называть протоядром. Зная протоядро, можно легко построить ядро G_{00}^{+0} при любых изотропных сечениях взаимодействия. Заметим, что рекуррентные соотношения между ядрами содержат дифференциальные операторы, действующие на v_0, v_a, v_b . Используя представление вида (7) для каждого из ядер, входящих в рекуррентное соотношение, и меняя порядок действия дифференциальных операторов и интегрирования по g , найдем рекуррентные соотношения для протоядер. Поскольку все ядра выражаются через G_{00}^{+0} , то и все протоядра для произвольных ядер G_{l_1, l_2}^{+l} можно построить из $U(g, v_0, v_a, v_b)$. Это означает, что рекуррентные соотношения надо применить только один раз именно к протоядру. Все ядра для произвольных

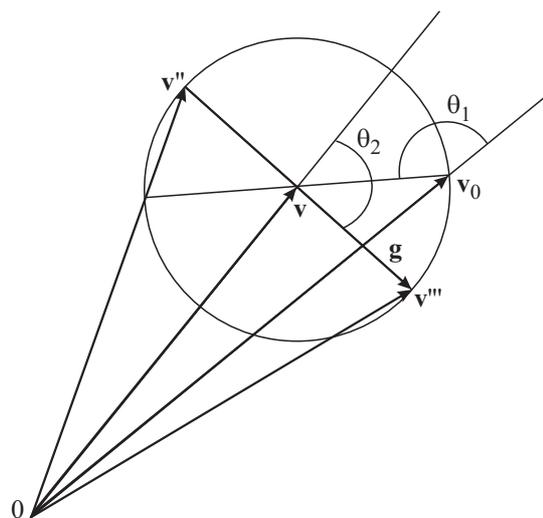


Рис. 1. Геометрия парного столкновения для частиц равных масс.

изотропных сечений можно будет затем найти однократным интегрированием по g .

Вид протоядра в представлении (7) может быть найден из (5), (6). В случае изотропной ФР подынтегральное выражение в (6) не зависит от φ_1 . Очевидно, что при $\chi(\theta; g) = 1$ оно не зависит и от φ_2 , поэтому интегрирование по φ_1, φ_2 дает

$$I_F = \pi \int_0^\pi \int_0^\pi f_a(v'') f_b(v''') \sin \theta_2 d\theta_2 \sin \theta_1 d\theta_1. \quad (8)$$

Из (4) видно, что если выбрать ФР в виде

$$f_a(v'') = \frac{1}{v_a^2} \delta(v'' - v_a), \quad f_b(v''') = \frac{1}{v_b^2} \delta(v''' - v_b), \quad (9)$$

то R_+ обращается в ядро $G_{00}^{+0}(v_0, v_a, v_b)$. Распределения (9) представляют собой равномерные распределения частиц на поверхности сфер с радиусами v_a и v_b в пространстве скоростей. Мы будем называть их „скорлупками“. Не ограничивая общности, можно считать $v_a < v_b$. Принимая во внимание (5), для протоядра получим

$$U(g, v_0, v_a, v_b) = \frac{\pi g^3}{v_a^2 v_b^2} \int_0^\pi \int_0^\pi \delta(v'' - v_a) \delta(v''' - v_b) \times \sin \theta_2 d\theta_2 \sin \theta_1 d\theta_1. \quad (10)$$

Определение носителя функции U

Исследуем теперь форму области, где функция U не обращается в нуль, т.е. форму носителя протоядра. Заметим прежде всего, что из треугольников $0vv''$,

$0vv''', 0vv_0$ (рис.1) следуют связи

$$v''^2 = v^2 + \frac{g^2}{4} - vg \cos \theta_2, \quad (11)$$

$$v'''^2 = v^2 + \frac{g^2}{4} + vg \cos \theta_2, \quad (12)$$

$$v^2 = v_0^2 + \frac{g^2}{4} + v_0g \cos \theta_1. \quad (13)$$

В случае скорлупок, т.е. при $v'' = v_a, v''' = v_b$, выразим v, θ_2, θ_1 через v_a, v_b . Обозначим эти величины $v^*, \theta_2^*, \theta_1^*$:

$$v^* = \sqrt{\frac{1}{2} \left(v_a^2 + v_b^2 - \frac{g^2}{2} \right)}, \quad (14)$$

$$x_2^* = \cos \theta_2^* = \frac{v_b^2 - v_a^2}{2v^*g}, \quad (15)$$

$$x_1^* = \cos \theta_1^* = \frac{1}{v_0g} \left(\frac{1}{2} \left(v_a^2 + v_b^2 - g^2 \right) - v_0^2 \right). \quad (16)$$

Границы носителя U находятся из неравенств

$$|x_2^*| \leq 1, \quad |x_1^*| \leq 1.$$

Предельные значения g определяются соотношением $|x_2^*| = 1$. Используя (15), найдем нижнюю и верхнюю границы g :

$$g^l = v_b - v_a, \quad g^u = v_b + v_a. \quad (17)$$

Второе неравенство дает границы изменения v_0 . Из (16) с учетом равенства $v^* = \sqrt{\frac{1}{2} \left(v_a^2 + v_b^2 - \frac{g^2}{2} \right)}$ найдем

$$|v^*(g) - g/2| \leq v_0 \leq v^*(g) + g/2. \quad (18)$$

На рис. 2 по формулам (18) для определенных значений v_a и v_b построен носитель протоядра на плоскости (g, v_0) . Видно, что нижняя граница по v_0 достигает нуля при $v^* = g/2$, а затем снова возрастает. На зависимости $v_0^{\max}(g) = v^*(g) + g/2$ наблюдается максимум, координаты которого (обозначим их g_m и v_m) легко найти:

$$g_m = \sqrt{v_a^2 + v_b^2}, \quad v_m = \sqrt{v_a^2 + v_b^2}. \quad (19)$$

В дальнейшем нам понадобятся минимальное и максимальное значения g при фиксированной v_0 . Их легко найти, если разрешить уравнения $|v(g) - g/2| = v_0, v_0 = v(g) + g/2$, определяющие границы носителя, относительно g . В результате получим

$$g^{\min} = \begin{cases} -v_0 + v', & \text{если } 0 \leq v_0 \leq v_a, \\ v_b - v_a, & \text{если } v_a \leq v_0 \leq v_b, \\ v_0 - v', & \text{если } v_b \leq v_0 \leq v_m, \end{cases} \quad (20)$$

$$g^{\max} = \begin{cases} v_0 + v', & \text{если } 0 \leq v_0 \leq v_a, \\ v_b + v_a, & \text{если } v_a \leq v_0 \leq v_b, \\ v_0 + v', & \text{если } v_b \leq v_0 \leq v_m, \end{cases} \quad (21)$$

где $v' = \sqrt{v_a^2 + v_b^2 - v_0^2}$. Видно, что при $v_a \leq v_0 \leq v_b$ пределы по g совпадают с абсолютными пределами: $g^{\min} = g^l, g^{\max} = g^u$.

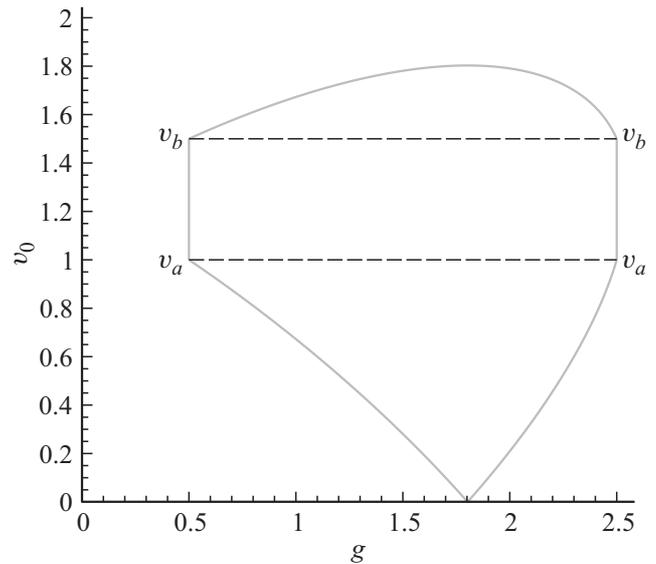


Рис. 2. Область на плоскости (v_0, g) , где протоядро U отлично от нуля; $v_a = 1, v_b = 1.5$.

Расширим поставленную задачу и рассмотрим взаимодействие частицы a с массой m_a и частицы b с массой m_b . По-прежнему будем искать приходный член для частиц сорта a , т.е. будем полагать, что в точку v_0 приходят частицы с массой m_a . Не теряя общности, будем считать, что в точке v'' находятся частицы a , а в точке v''' — частицы b . Теперь скорость центра масс лежит не посередине между v'' и v''' , а делит g на отрезки, обратно пропорциональные массам.

Используя законы сохранения энергии и импульса, вместо (11)–(13) получаем следующие соотношения:

$$v''^2 = v^2 + \mu_b^2 g^2 - 2\mu_b g v x_2, \quad v'''^2 = v^2 + \mu_a^2 g^2 + 2\mu_a g v x_2, \quad (22)$$

$$v^2 = v_0^2 + \mu_b^2 g^2 + 2\mu_b g v_0 x_1,$$

$$\mu_a = \frac{m_a}{m_a + m_b}, \quad \mu_b = \frac{m_b}{m_a + m_b}.$$

Для скорлупок имеем $v'' = v_a, v''' = v_b$. Как и в случае равных масс, эта система позволяет найти v^*, x_1^*, x_2^* при заданных g, v_a, v_b, v_0 :

$$v^{*2} = \mu_a v_a^2 + \mu_b v_b^2 - \mu_a \mu_b g^2,$$

$$x_2^* = \left(v_b^2 - v_a^2 - (\mu_a^2 - \mu_b^2) g^2 \right) / (2g v^*),$$

$$x_1^* = \left(v^{*2} - v_0^2 - \mu_b^2 g^2 \right) / (2\mu_b v_0 g).$$

Область, где протоядро отличается от нуля, определяется условиями $|x_2^*| \leq 1$ и $|x_1^*| \leq 1$, а граница области находится из условий $|x_2^*| = |x_1^*| = 1$. После несложных преобразований из условия $|x_2^*| = 1$ получим такие же выражения для g^l и g^u (17), как и в случае равных масс. Условие $|x_1^*| \leq 1$ с учетом (22) позволяет найти

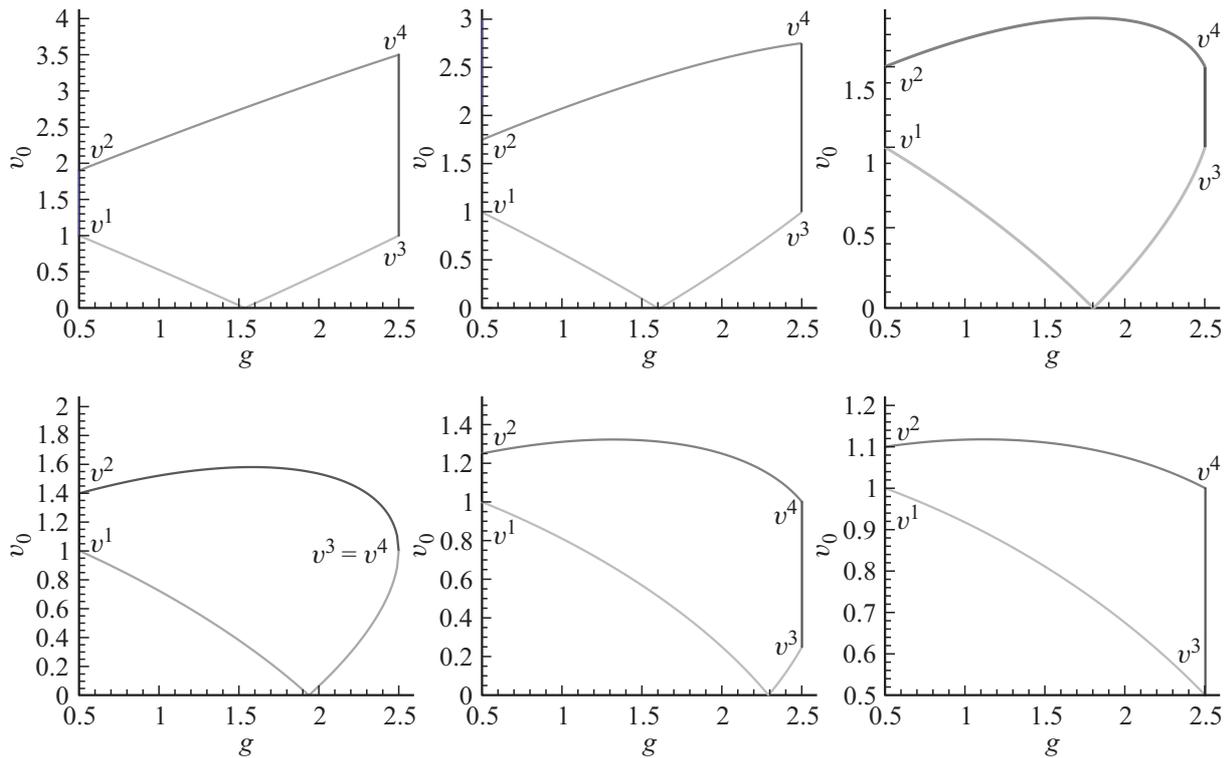


Рис. 3. Носители протоядра при разных μ_a : 0.1, 0.25, 0.5, 0.6, 0.75, 0.9; $v_a = 1, v_b = 1.5$.

и область значений $v_0(g)$, в которой протоядро отлично от нуля

$$|v^*(g) - \mu_b g| \leq v_0 \leq v^*(g) + \mu_b g. \quad (23)$$

На рис. 3 представлены носители протоядра при различных μ_a .

Теперь необходимо разрешить уравнения границ относительно g и найти при каждом значении v_0 пределы g^{\min} и g^{\max} . Максимум зависимости v_0 от g может оказаться в интервале изменения g или вне его. Выход максимума на правую границу происходит при

$$\mu_a = \check{\mu}_a = \frac{v_b}{2(v_b + v_a)}. \quad (24)$$

В приведенном на рисунке случае имеем $\check{\mu}_a = 0.3$, и двум первым рисункам соответствует максимальное значение $v_0(g)$, реализующееся на правой границе.

Обозначим точки пересечения нижней и верхней границ $v_0(g)$ с левой и правой границами g индексами 1, ..., 4 так, как это показано на рис. 3. Если $v^{(1)}$, как и в случае равных масс, равна v_a при любых μ_a , то остальные точки сильно меняются с изменением μ_a . Легко показать, что $v^{(2)} = 2\mu_b v_b - (\mu_b - \mu_a)v_a$. Значение $v^{(4)}$ зависит от знака $\mu_b v_b - \mu_a v_a$. Изменение знака в этом выражении происходит при $\mu_a = \bar{\mu}_a = v_b/(v_a + v_b)$ и

$$v^{(4)} = \begin{cases} 2\mu_b v_b + (\mu_b - \mu_a)v_a, & \text{если } \mu_a \leq \bar{\mu}_a, \\ v_a, & \text{если } \mu_a > \bar{\mu}_a. \end{cases}$$

Выражение для $v^{(3)}$ меняется также при переходе через значение $\mu_a = \tilde{\mu}_a = (2v_b + v_a)/(2(v_b + v_a))$:

$$v^{(3)} = \begin{cases} v_a, & \text{если } \mu_a \leq \tilde{\mu}_a, \\ 2\mu_b v_b + (\mu_b - \mu_a)v_a, & \text{если } \tilde{\mu}_a \leq \mu_a \leq \check{\mu}_a, \\ (\mu_a - \mu_b)v_a - 2\mu_b v_b, & \text{если } \mu_a > \check{\mu}_a. \end{cases}$$

Обозначим v_0^l — наименьшее значение v_0 , v_0^u — наибольшее значение v_0 . Показано, что

$$v_0^l = \begin{cases} 0, & \text{если } \mu_a \leq \tilde{\mu}_a, \\ (\mu_a - \mu_b)v_a - 2\mu_b v_b, & \text{если } \mu_a > \tilde{\mu}_a, \end{cases}$$

$$v_0^u = \begin{cases} 2\mu_b v_b + (\mu_b - \mu_a)v_a, & \text{если } \mu_a \leq \check{\mu}_a \\ \frac{1}{\sqrt{\mu_a}} \sqrt{\mu_a v_a^2 + \mu_b v_b^2}, & \text{если } \mu_a > \check{\mu}_a. \end{cases}$$

Значения g^{\min} и g^{\max} при фиксированном v_0 определяются следующим образом:

$$g^{\min} = \begin{cases} v'_\mu - v_0, & \text{если } v_0^l \leq v_0 \leq v^{(1)}, \\ g^l, & \text{если } v^{(1)} \leq v_0 \leq v^{(2)}, \\ v_0 - v'_\mu, & \text{если } v^{(2)} \leq v_0 \leq v_0^u, \end{cases} \quad (25)$$

$$g^{\max} = \begin{cases} v_0 + v'_\mu, & \text{если } 0 \leq v_0 \leq v^{(3)} \text{ и } \mu_a \leq \tilde{\mu}_a, \\ g^u, & \text{если } v^{(3)} \leq v_0 \leq v^{(4)}, \\ v_0 + v'_\mu, & \text{если } v^{(4)} \leq v_0 \leq v_0^u \text{ и } \mu_a > \check{\mu}_a, \end{cases} \quad (26)$$

где $v'_\mu = \sqrt{(\frac{\mu_a}{\mu_b} v_a^2 + v_b^2) - \frac{\mu_a}{\mu_b} v_0^2}$, $g^l = v_b - v_a$, $g^u = v_b + v_a$.

Построение протоядра

Вернемся к случаю равных масс. Назовем размазанной скорлупкой ФР вида

$$f(v) = \frac{1}{v_s^2} \sqrt{\frac{\beta}{\pi}} e^{-\beta(v-v_s)^2}. \quad (27)$$

В пределе $\beta \rightarrow \infty$ выражение (27) переходит в $\frac{1}{v_s^2} \delta(v - v_s)$, а связь протоядра с интегралом столкновений определяется формулами (4)–(10). Помимо того, что интеграл столкновений для размазанных скорлупок может быть использован для построения протоядра, его исследование представляет и самостоятельный интерес. В некоторых задачах рассматривается эволюция распределения частиц, генерированных с заданной энергией, т.е. частиц с фиксированной величиной скорости [23]. В действительности генерация частиц происходит с некоторой размазкой. Поэтому основной вклад в приходную часть интеграла столкновений дают размазанные скорлупки, распределение которых задается (27) с большими, но не бесконечными значениями β .

В случае размазанных скорлупок формула (8) для I_F имеет вид

$$I_F = \frac{\pi}{v_a^2 v_b^2} \sqrt{\frac{\beta_a}{\pi}} \sqrt{\frac{\beta_b}{\pi}} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 e^{-\beta_a(v''-v_a)^2} e^{-\beta_b(v'''-v_b)^2} dx_1 dx_2.$$

Исследуем интеграл I_F при больших значениях параметров β_a, β_b , считая их отношение постоянным, т.е.

$$\beta_a = \beta \alpha_a, \quad \beta_b = \beta \alpha_b, \quad \beta \rightarrow \infty, \quad \alpha_a = \text{const}, \quad \alpha_b = \text{const}.$$

Обозначим показатель экспоненты в подинтегральной функции через $\Pi(x_1, x_2)$,

$$\Pi(x_1, x_2) = -(\alpha_a(v'' - v_a)^2 + \alpha_b(v''' - v_b)^2). \quad (28)$$

Чтобы найти зависимость $\Pi(x_1, x_2)$ в явном виде, достаточно подставить в (28) выражения для v'', v''' . Из (11)–(13) находим

$$v'' = \sqrt{v_0^2 + \frac{g^2}{2} + v_0 g x_1 - g x_2} \sqrt{v_0^2 + \frac{g^2}{4} + v_0 g x_1},$$

$$v''' = \sqrt{v_0^2 + \frac{g^2}{2} + v_0 g x_1 + g x_2} \sqrt{v_0^2 + \frac{g^2}{4} + v_0 g x_1}.$$

Поскольку значениям $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$ соответствуют скорости $v'' = v_a, v''' = v_b$, то $\Pi(x_1^*, x_2^*) = 0$. Из (28) следует, что функция $\Pi(x_1, x_2)$ в этой точке имеет максимум.

Для вычисления I_F в пределе $\beta \rightarrow \infty$ построим асимптотическое разложение по параметру $1/\beta$, используя метод Лапласа. Согласно этому методу, асимптотическая

оценка двукратного интеграла имеет вид

$$F(\beta) = \int \int f(x_1, x_2) \exp(\beta \Phi(x_1, x_2)) dx_1 dx_2 \sim \exp(\beta \Phi(x_1^*, x_2^*)) \frac{2\pi}{\beta} \frac{f(x_1^*, x_2^*)}{\sqrt{S}}.$$

Здесь интегрирование проводится по ограниченной области Ω , (x_1^*, x_2^*) — единственная точка максимума функции $\Phi(x_1, x_2)$ в Ω , $\Phi(x_1, x_2), f(x_1, x_2)$ — бесконечно дифференцируемы в окрестности (x_1^*, x_2^*) , S — определитель матрицы из вторых производных в точке максимума: $S = \det|\partial^2 \Phi / \partial x_i \partial x_j|$. В том случае, когда точка максимума (x_1^*, x_2^*) находится вне области Ω , интеграл $F(\beta)$ экспоненциально мал.

Вычисляя частные производные функции $\Pi(x_1, x_2)$, можно убедиться, что в точке $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$ первые производные обращаются в нуль, и найти определитель матрицы из вторых производных

$$S = \frac{\alpha_a \alpha_b v_0^2 v^* g^4}{v_a^2 v_b^2},$$

где v^* определяется выражением (14). Так как $S > 0$, то $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*$ действительно точка максимума. Область интегрирования Ω в нашем случае определяется условиями $|x_1| < 1, |x_2| < 1$. Поэтому при $|x_1^*| < 1, |x_2^*| < 1$ (т.е. в области, совпадающей с носителем протоядра) применительно к I_F метод Лапласа дает

$$I_F = \frac{\pi}{v_a^2 v_b^2} \sqrt{\frac{\beta_a}{\pi}} \sqrt{\frac{\beta_b}{\pi}} \frac{2\pi}{\beta} \frac{v_a v_b}{\sqrt{\alpha_a \alpha_b v_0 v^* g^2}} (1 + O(1/\beta)) = \frac{2\pi}{v_a v_b v_0 v^* g^2} (1 + O(1/\beta)). \quad (29)$$

С помощью изложенного подхода может быть найден и следующий член разложения, который отличает случай скорлупок с конечными β_a, β_b от предельного случая, однако его получение выходит за рамки настоящей работы. Отметим, что формула для главного члена останется такой же и в случае, когда β_a, β_b стремятся к бесконечности с разными скоростями.

Из (29) следует выражение для протоядра в области ненулевых значений

$$U = \frac{2\pi g}{v_a v_b v_0 v^*} = \frac{2\pi g}{v_a v_b v_0} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}(v_a^2 + v_b^2 - \frac{g^2}{2})}}. \quad (30)$$

Другие способы построения протоядра

Протоядро можно получить и непосредственно из (10). Будем рассматривать (10) в самом общем случае разных масс в тех же предположениях, в которых строились носители протоядра для разных масс. Тогда v'', v''' и v определяются из (22).

От переменной x_2 перейдем к переменной v'' :

$$2v''dv'' = -2\mu_b g v dx_2, \quad dx_2 = -\frac{v''}{\mu_b g v} dv''.$$

Из (22) найдем v''' как функцию v , v'' :

$$v'''^2 = \frac{v^2}{\mu_b} + \mu_a g^2 - \frac{\mu_a}{\mu_b} v''^2$$

и перепишем протоядро в виде

$$U(g, v_0, v_a, v_b) = \frac{\pi g^2}{v_a^2 v_b^2 \mu_b} \times \int_{-1}^1 \frac{dx_1}{v} \int_{|v-\mu_b g|}^{v+\mu_b g} \delta(v'' - v_a) \delta(v''' - v_b) v'' dv''.$$

Отметим, что v является функцией x_1 . Интегрируя дельта-функцию, найдем

$$U(g, v_0, v_a, v_b) = \frac{\pi g^2}{v_a v_b^2 \mu_b} \int_{-1}^1 \frac{dx_1}{v} F_1(v) \delta(v''' - v_b).$$

Здесь v''' берется при $v'' = v_a$, т.е.

$$v'''^2 = \frac{v^2}{\mu_b} + \mu_a g^2 - \frac{\mu_a}{\mu_b} v_a^2, \quad (31)$$

а

$$F_1(v) = \theta((v + \mu_b g) - v_a) \theta(v_a - |v - \mu_b g|),$$

где $\theta(x)$ — функция Хевисайда. Это соотношение эквивалентно условию $|x_2| \leq 1$ и дает значения g^l и g^u (17).

Перейдем теперь от переменной x_1 к v''' . Подставляя в (31) зависимость v от x_1

$$v^2 = v_0^2 + \mu_b^2 g^2 + 2\mu_b g v_0 x_1,$$

получим

$$v''' dv''' = g v_0 dx_1, \quad U(g, v_0, v_a, v_b) = \frac{\pi g^2}{v_a v_b^2 \mu_b} \int_{y_1}^{y_2} \frac{v''' dv'''}{g v_0 v} F_1(v) \delta(v''' - v_b).$$

Здесь через y_1, y_2 обозначены величины

$$y_1 = \sqrt{\frac{v_0^2}{\mu_b} + g^2 - 2g v_0 - \frac{\mu_a}{\mu_b} v_a^2}, \quad y_2 = \sqrt{\frac{v_0^2}{\mu_b} + g^2 + 2g v_0 - \frac{\mu_a}{\mu_b} v_a^2},$$

которые являются значениями v''' при $x_1 = \pm 1$. Зависимость v от v''' легко найти, разрешая (31) относительно v . Интегрирование по v''' дает

$$U(g, v_0, v_a, v_b) = \frac{\pi g}{v_a v_b \mu_b v_0 v^*} F_1(v^*) F_2,$$

где $v^{*2} = \mu_a v_a^2 + \mu_b v_b^2 - \mu_a \mu_b g^2$, а

$$F_2 = \theta(y_2 - v_b) \theta(v_b - y_1).$$

Это равенство эквивалентно условию $|x_1| \leq 1$ и определяет нижнюю и верхнюю границы области существования протоядра на плоскости (рис. 3). Окончательно получаем

$$U(g, v_a, v_b, v_0) = \frac{\pi g}{v_a v_b \mu_b v_0 \sqrt{\mu_a v_a^2 + \mu_b v_b^2 - \mu_a \mu_b g^2}} \times \theta(g^{\max} - g) \theta(g - g^{\min}), \quad (32)$$

что в случае равных масс совпадает с (30). Здесь g^{\min} , g^{\max} задаются соотношениями (25), (26).

Следует отметить, что протоядро можно получить, также используя работу [17]. В этой работе при выводе ядра $G_{0,0}^{+0}$ для модели твердых шаров была получена промежуточная формула, которая в наших обозначениях имеет вид

$$G_{00}^{+0}(v_0, v_a, v_b) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^1 d(\cos \xi_1) \int_0^{2\pi} I d\omega_1, \quad (33)$$

$$I = 4\pi \int_{-1}^1 d(\cos \Theta') \int_{-1}^1 d(\cos \Theta_2)$$

$$\times \int_{\cos(\Theta_1 + \Theta')}^{\cos(\Theta_1 - \Theta')} \frac{G^+(v_0, v_a, v_b) d(\cos \Theta_2)}{(\cos(\Theta_1 - \Theta') - \cos \Theta_2)^{1/2} (\cos \Theta_2 - \cos(\Theta_1 + \Theta'))^{1/2}}. \quad (34)$$

Здесь $\Theta_1, \Theta_2, \Theta'$ — углы между векторами v_0 и v_a, v_0 и v_b, v_a и v_b соответственно, а ξ_1, ω_1 — сферические координаты вектора $\Omega_1 = v_a/v_a$. Ядро приходящего члена интеграла столкновений $G^+(v_0, v_a, v_b)$ имеет вид

$$G^+(v_0, v_a, v_b) = 8\sigma \frac{\delta(|v_a - v_b| - |2v_0 - v_a - v_b|)}{|v_a - v_b|}. \quad (35)$$

Дифференциальное сечение $\sigma = \frac{1}{4\pi} \Sigma(g) \chi(\theta, g) = \frac{1}{4\pi} \Sigma(g)$ в общем случае в отличие от случая твердых шаров зависит от относительной скорости g . Если, следуя работе [17], в (34) выполнить двукратное внутреннее интегрирование по $\cos \Theta_1, \cos \Theta_2$, то оказывается, что I не зависит от Ω_1 , и G_{00}^{+0} записывается в виде интеграла по $\cos \Theta'$. Переходя к интегрированию по относительной скорости g с учетом связи

$$g^2 = v_a^2 + v_b^2 - 2v_a v_b \cos \Theta',$$

получим протоядро для равных масс в форме (30).

Ядро для различных сечений взаимодействия

Покажем теперь, как, используя протоядро, можно построить ядро при различных зависимостях $\Sigma(g)$. Перейдем в (7) к переменной $y = g^2$,

$$G_{0,0}^{+0} = \frac{1}{2} \int_0^\infty \Sigma(y) U(y) \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Введем обозначение $d = 2(v_a^2 + v_b^2)$. Тогда

$$G_{0,0}^{+0} = \frac{2\pi}{v_a v_b v_0} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} \Sigma(y) \frac{dy}{\sqrt{d-y}}, \quad (36)$$

где $y_{\min} = (g^{\min})^2$, $y_{\max} = (g^{\max})^2$ определяются из выражений (20), (21). Для любого псевдостепенного сечения рассеяния $\Sigma(y) = A_\mu y^a$ (здесь $a = \mu - 1/2$, A_μ — константа) имеем первообразные

$$\begin{aligned} S_a(y) &= \int \left[y^a / \sqrt{d-y} \right] \\ &= -2(d-y)^{1/2} y^a \left(\frac{y}{d} \right)^{-a} F \left[\frac{1}{2}, -a, \frac{3}{2}, 1 - \frac{y}{d} \right] \\ &= -2(d-y)^{1/2} d^a F \left[\frac{1}{2}, -a, \frac{3}{2}, \frac{d-y}{d} \right], \end{aligned} \quad (37)$$

где F — гипергеометрическая функция.

Используя (20), (21), можно убедиться, что во всем интервале изменения v_0

$$d - y_{\max} = y_{\min}, \quad d - y_{\min} = y_{\max}.$$

В результате имеем

$$\begin{aligned} G_{0,0}^{+0} &= \frac{A_\mu 2\pi d^a}{v_a v_b v_0} \left(-2y_{\min}^{1/2} F \left[\frac{1}{2}, -a, \frac{3}{2}, \frac{y_{\min}}{d} \right] \right. \\ &\quad \left. + 2y_{\max}^{1/2} F \left[\frac{1}{2}, -a, \frac{3}{2}, \frac{y_{\max}}{d} \right] \right). \end{aligned} \quad (38)$$

Если учесть, что гипергеометрическая функция не меняется при перестановке двух первых параметров ($1/2$ и $-a$), то полученный результат совпадает с решением для псевдостепенных сечений в [21].

В случае твердых шаров $a = 0$, и первообразная имеет вид

$$S_0(y) = \int \frac{dy}{\sqrt{d-y}} = -2(d-y)^{1/2}, \quad (39)$$

что дает

$$\begin{aligned} G_{0,0}^{+0} &= \frac{2\pi A_{1/2}}{v_a v_b v_0} \left(S_0(y_{\max}) - S_0(y_{\min}) \right) \\ &= \frac{2\pi A_{1/2}}{v_a v_b v_0} \left(2(y_{\max}^{1/2} - y_{\min}^{1/2}) \right). \end{aligned}$$

В области $v_a \leq v_0 \leq v_b$ имеем

$$G_{0,0}^{+0} = \frac{2\pi A_{1/2}}{v_a v_b v_0} \left(2(2v_a) \right) = \frac{8\pi A_{1/2}}{v_b v_0}.$$

Здесь $A_{1/2} = \Sigma$, где Σ — полное сечение рассеяния для твердых шаров. Этот результат совпадает с [24]. Таким же образом можно получить ядро $G_{0,0}^{+0}$ и в остальных областях.

Любое сечение можно аппроксимировать кусочно-степенной функцией. Пусть имеются два участка с разной степенной зависимостью $B_1 y^{a_1}$ при $0 \leq g \leq g_0$ и $B_2 y^{a_2}$ при $g_0 < g < \infty$. При заданных v_0 , v_a и v_b однозначно определяются g_{\min} и g_{\max} . Если g_0 не попадает между g_{\min} и g_{\max} , то интеграл по этому интервалу будет совпадать с (38) или с параметром a_1 , или с параметром a_2 . Если g_0 попадает между g_{\min} и g_{\max} , то интеграл от g_{\min} до g_0 представляет собой разность первообразных на этих пределах, т.е. гипергеометрических функций с параметром a_1 . Интеграл от g_0 до g_{\max} представляет собой разность гипергеометрических функций с параметром a_2 на этих пределах. Таким образом, имеется аналитическое решение для кусочно-степенного сечения рассеяния.

Выводы

Протоядро для изотропного сечения построено и оказалось довольно простым. Используя протоядро, легко аналитически найти G_{00}^{+0} для любой степенной зависимости сечения от энергии.

Для произвольной зависимости сечения от энергии ядро G_{00}^{+0} можно построить: а) численно, интегрируя протоядро по $y = g^2$, б) аналитически, аппроксимируя сечение кусочно-степенными функциями.

Применив рекуррентные соотношения к протоядру, можно найти протоядра для произвольных ядер G_{l_1, l_2}^{+l} . Эти протоядра в свою очередь позволяют построить и сами ядра G_{l_1, l_2}^{+l} . Используя ядра $G_{l,0}^{+l}$ (или, точнее, протоядра к ним), можно построить линейные ядра для произвольных изотропных сечений. Полученную теорию можно обобщить на неизотропные сечения.

Работа одного из авторов (А.Я. Эндера) была частично поддержана РФФИ (грант № 15-08-03440).

Список литературы

- [1] Hilbert D. // Math. Ann. 1912. Bd. 72. S. 562–577.
- [2] Hecke E. // Math. Zs. 1922. Bd. 12. S. 274–286.
- [3] Hecke E. // Math. Ann. 1917. Vol. 78. P. 398–404.
- [4] Pekeris C.L., Alterman Z., Finkelstein L., Frankowski K. // Phys. Fluids. 1962. Vol. 5. P. 1608.
- [5] Loyalka S.K. // Phys. Fluids. A. 1989. Vol. 1. N 2. P. 384–388.
- [6] Эндер А.Я., Эндер И.А. // Письма в ЖТФ. 2011. Т. 37. Вып. 5. С. 9–14.
- [7] Burnett D. // Proc. London Math. Soc. 1936. Vol. 40. P. 382.

- [8] Эндер А.Я., Эндер И.А. Интеграл столкновений уравнения Больцмана и моментный метод. СПб.: Изд. дом С.-Петербургского университета, 2003. 224 с.
- [9] Эндер А.Я., Эндер И.А. // ЖТФ 2002. Т. 72. Вып. 5. С. 1–9.
- [10] Ender A.Y., Ender I.A., Gerasimenko A.B. // The Open Plasma Phys. J. 2009. Vol. 2. P. 24–62.
- [11] Ender A.Ya., Ender I.A. // Transport Theor. Stat. 2007. Vol. 56. P. 563–588.
- [12] Бакалейников Л.А., Эндер А.Я., Эндер И.А. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 9. С. 6–15.
- [13] Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю., Эндер А.Я., Эндер И.А. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 22–35.
- [14] Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А. // ДАН. 2011. Т. 437. Вып. 5. С. 1–3.
- [15] Ender A.Ya., Ender I.A., Bakaleinikov L.A., Flegontova E.Yu. // Eur. J. Mech. B-Fluid. 2012. Vol. 36. P. 17–24.
- [16] Бобылев А.В. // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. Вып. 5. С. 1041.
- [17] Kugerl G. // ZAMP. 1989. Vol. 40. P. 816–827.
- [18] Ziff R.M. // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 306–310; Phys. Rev. A. 1981. Vol. 23. P. 916.
- [19] Barnsley M., Turchetti G. // Lett. Nuovo Cimento. 1981. Vol. 30. P. 359–362.
- [20] Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю. // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. Вып. 15. С. 40–47.
- [21] Бакалейников Л.А., Тропп Э.А., Флегонтова Е.Ю., Эндер А.Я., Эндер И.А. // ЖТФ. 2015. Т. 85. Вып. 1. С. 10–14.
- [22] Эндер А.Я. // Вестник ЛГУ. 1966. Вып. 4. № 119. С. 116–128.
- [23] Kabin K., Shizgal B.D. // Exact Evaluation of Collision Integrals for the Nonlinear Boltzmann Equation, in Rarefied Gas Dynamics: 23rd International Symposium. Eds A.D. Ketsdever, E.P. Muntz. American Institute of Physics. 2003. P. 35.
- [24] Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю. // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 6. С. 1–8.