

01

Погрешности анализа характеристик сложных режимов колебаний по точечным последовательностям модели „накопление—сброс“

© А.Н. Павлов^{1,2}, О.Н. Павлова¹, Я.Х. Мохаммад¹

¹ Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

² Саратовский государственный технический университет
им. Гагарина Ю.А.

E-mail: pavlov.alexeyn@gmail.com

Поступило в Редакцию 27 мая 2015 г.

Обсуждается задача расчета динамических характеристик хаотических режимов автоколебаний по точечным процессам. На примере модели „накопление—сброс“ рассматриваются ограничения метода восстановления аттрактора по последовательности временных интервалов между моментами генерации импульсов. Формулируются условия достоверности расчета старшего показателя Ляпунова и рекомендации для наиболее точного определения динамических характеристик сложных колебательных режимов при осуществлении реконструкции динамических систем по точечным процессам.

Точечные процессы, в которых носителями информации о динамике системы являются моменты времени появления некоторых событий (например, моменты генерации одиночных импульсов), широко известны во многих областях науки и техники [1]. Одной из традиционно рассматриваемых моделей генерации точечных процессов является модель „накопление—сброс“, позволяющая описать динамику систем различной природы: от дельта-сигма-конвертеров, применяемых в технике связи [2], до электрической активности нейронов и их ансамблей [3–5]. Модель „накопление—сброс“ предусматривает интегрирование сигнала $S(t)$ на входе порогового устройства

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t) dt = \theta, \quad (1)$$

начиная с момента времени T_i . При достижении интегралом (1) фиксированного порогового уровня θ происходит генерация одиночного импульса, после чего значение интеграла обнуляется. Временные интервалы между импульсами $I_i = T_{i+1} - T_i$ являются носителями информации о входном процессе, и, располагая данной информацией, требуется осуществить количественное описание динамики процесса $S(t)$ на входе порогового устройства. В рамках теории динамических систем на основе интервалов I_i может быть решена задача реконструкции аттрактора, соответствующего режиму динамики $S(t)$ [6–8], и расчета его метрических и динамических характеристик [8–10], включая корреляционную размерность, показатели Ляпунова и т. д. Строгие теоретические результаты, обосновывающие принципиальную возможность реконструкции, были получены в рамках теоремы Зауэра [11], являющейся обобщением теоремы Такенса [12] на случай точечных процессов. Однако данная теорема справедлива только при условии высокой частоты генерации импульсов моделью „накопление–сброс“. При низкой частоте генерации возможность осуществления реконструкции аттрактора может быть проверена только численно. Численные исследования, проведенные к настоящему времени как для модели „накопление–сброс“, так и для других моделей пороговых систем, позволили установить возможность диагностики хаотических и гиперхаотических режимов динамики по точечным процессам [13–17]. Однако границы их применимости для модели „накопление–сброс“ не были детально изучены.

В данной работе мы обсуждаем возможности и ограничения количественного описания динамических характеристик сложных режимов колебаний по точечным процессам модели „накопление–сброс“. В условиях высокой частоты генерации импульсов интеграл (1) можно приближенно вычислить на основе простейшего варианта численного интегрирования — метода прямоугольников

$$\int_{T_i}^{T_{i+1}} S(t) dt \cong S\left(\frac{T_i + T_{i+1}}{2}\right) I_i \Rightarrow S\left(\frac{T_i + T_{i+1}}{2}\right) \cong \frac{\theta}{I_i}. \quad (2)$$

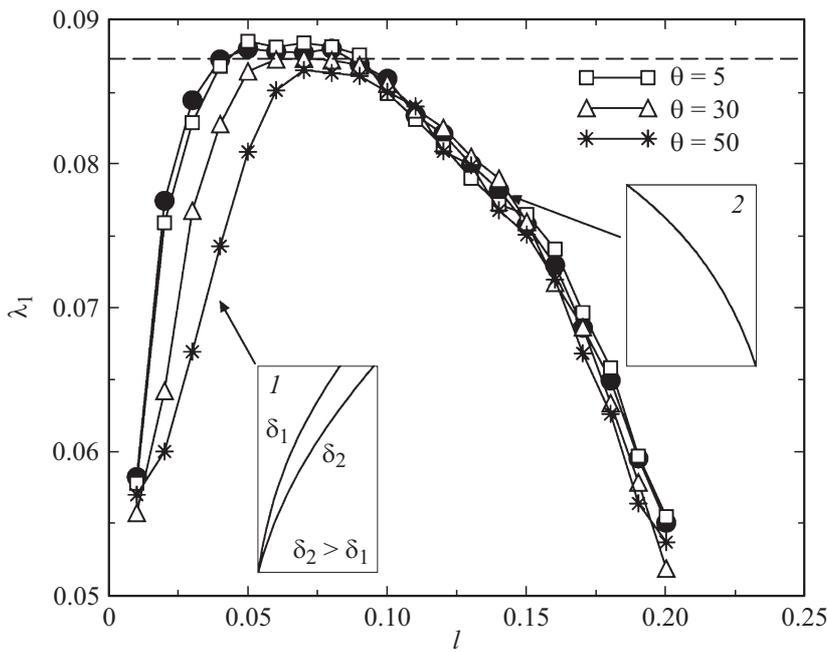
Если частота генерации импульсов велика, т. е. I_i принимает малые значения (условия применимости теоремы Зауэра [11]), то точность восстановления аттрактора по точечному процессу является высокой. С уменьшением частоты генерации приближенное равенство (2) перестает быть справедливым. В соответствии с теоремой о среднем

существуют моменты времени $T_i \leq \hat{t}_i \leq T_{i+1}$, когда значения входного процесса $S(\hat{t}_i)$ могут быть точно восстановлены $S(\hat{t}_i) = \theta/I_i$. Но вследствие того, что при анализе точечных процессов информация о динамике между моментами T_i отсутствует, появляется неопределенность δ в определении соответствующих времен $\hat{t} = (T_i + T_{i+1})/2 + \delta_i$. Рассмотрим, к чему приводит данная неопределенность при расчете стандартной характеристики хаотических режимов колебаний — старшего показателя Ляпунова. В качестве примера выберем входной сигнал $S(t) = x(t) + 35$, где $x(t)$ — координата модели Ресслера:

$$\frac{dx}{dt} = -(y + z), \quad \frac{dy}{dt} = x + ay, \quad \frac{dz}{dt} = b + z(x - c) \quad (3)$$

при значении параметров $a = 0.15$, $b = 0.2$, $c = 10$. Пороговый уровень θ определяет частоту генерации импульсов моделью „накопление–сброс“. Проведенные исследования продемонстрировали, что в диапазоне $\theta < 53$, что соответствует примерно 4 импульсам на характерный период колебаний, применение метода реконструкции [10] позволяет корректно оценивать старший показатель Ляпунова (λ_1). Однако это можно сделать только при подходящем выборе параметров алгоритма расчета старшего показателя [18] и, прежде всего, границ линейного приближения (l) при определении средней скорости экспоненциального разбегания траекторий (см. рисунок). Проведенные нами исследования объясняют данную зависимость результатов от параметра l .

Рассмотрим вначале случай $\theta = 5$, что соответствует генерации примерно 43 импульсов на характерный период хаотических колебаний. При такой высокой частоте генерации импульсов сигнал $x(t)$ восстанавливается по точечному процессу со сравнительно малой погрешностью. Это и определяет применимость теоремы Зауэра [11] и возможность реконструкции аттрактора. Отметим, что полученные результаты практически совпадают с результатами расчета λ_1 по сигналу $x(t)$ (см. рисунок, черные круги). Однако зависимость $\lambda_1(l)$ спадает как в области больших значений l , так и в области малых значений данного параметра. Причиной спада зависимости $\lambda_1(l)$ при $l \geq 0.1$ является выход за границы линейного приближения. Если расстояние между траекториями в фазовом пространстве превышает примерно 10% от размера аттрактора, скорость разбегания траекторий перестает быть экспоненциальной. Вследствие этого происходит недооценка величины λ_1 , связанная с тем, что вектор возмущения становится меньше, чем



Зависимость старшего показателя Ляпунова от параметра, определяющего границы линейного приближения, при трех значениях частоты генерации импульсов, соответствующих пороговым уровням $\theta = 5$, $\theta = 30$ и $\theta = 50$. Черными кругами отмечены результаты расчета по сигналу $x(t)$ модели (3). Ограничения (5) и (4) продемонстрированы соответственно на вставках 1 и 2. Пунктиром отмечено значение показателя, вычисленное по уравнениям модели (3).

его ожидаемое значение. Соответствующие ограничения приблизительно могут быть описаны зависимостью

$$\lambda_1(l) \sim \frac{1}{t'} \ln(c - dl), \quad (4)$$

где t' — время между перенормировками, c и d — константы ($c \gg d$). Данные ограничения возникают независимо от величины порогового уровня, в том числе и при расчете показателя Ляпунова по переменной $x(t)$ модели (3). Как видно из приведенного рисунка, они являются примерно одинаковыми во всех рассмотренных случаях.

В области малых значений l , спад зависимости $\lambda_1(l)$ при расчетах по временной реализации $x(t)$ связан с ошибками ориентации векторов, которые возникают при очень частых перенормировках. При анализе точечных процессов появляется еще один фактор, ограничивающий сверху оценку показателя Ляпунова — наличие неопределенности δ при восстановлении входного сигнала. Если δ принимает малые значения (как в рассматриваемом случае $\theta = 5$), то результаты расчета λ_1 по последовательности I_i почти не отличаются от расчетов по известной реализации $x(t)$ (см. рисунок). Однако с ростом δ величина λ_1 будет уменьшаться. Рассмотрев для простоты случай одинаковой неопределенности для вектора возмущения до и после перенормировки [18], можно приближенно оценить зависимость $\lambda_1(l)$ по формуле

$$\lambda_1(l) \sim \frac{1}{t'} \ln \left(\frac{l + \delta}{r + \delta} \right), \quad (5)$$

где r — первоначальная величина выбранного вектора возмущения. Чем больше δ , тем сильнее ограничивается сверху величина λ_1 (см. рисунок). Как следствие, сужается диапазон l , в пределах которого можно корректно определить старший показатель Ляпунова. С ростом θ этот диапазон существенно уменьшается. Так, при $\theta = 30$ (7 импульсов на характерный период колебаний) он заметно меньше, чем при $\theta = 5$, а при $\theta = 50$ ограничения величины λ_1 (4) и (5) приводят к тому, что величина „полочки“, соответствующей корректным оценкам значения $\lambda_1 = 0.087$, сужается примерно вдвое, что определяет важность выбора параметра l .

Таким образом, в данной работе мы приводим объяснение ограничений метода расчета динамических характеристик по точечному процессу модели „накопление–сброс“. По нашему мнению, расчет зависимости $\lambda_1(l)$ и нахождение максимума данной зависимости (усредненной при вариации параметров алгоритма — времени задержки и размерности пространства вложения) является способом наиболее точного определения динамических характеристик сложных колебательных режимов при осуществлении реконструкции динамических систем по точечным процессам. Данная модернизация метода [10] повышает надежность проводимых оценок старшего показателя Ляпунова.

Исследование выполнено при поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14-12-00224).

Список литературы

- [1] Daley D.J., Vere-Jones D. An introduction to the theory of point processes. 2nd ed. N.Y.: Springer, 2008.
- [2] Norsworthy S.R., Schreier R., Temes G.C. Delta-sigma data converters — theory, design and simulation. N.Y.: IEEE Press, 1997.
- [3] Bialek W., Rieke F., De Ruyter van Steveninck R.R., Warland D. // Science. 1991. V. 252. P. 1854.
- [4] Racicot D.M., Longtin A. // Physica D. 1997. V. 104. P. 184.
- [5] Hramov A.E., Koronovskii A.A., Makarov V.A., Pavlov A.N., Sitnikova E. Wavelets in Neuroscience. Berlin, Heidelberg: Springer, 2015.
- [6] Sauer T. // Phys. Rev. Lett. 1994. V. 72. P. 3911.
- [7] Sauer T. // Chaos. 1995. V. 5. P. 127.
- [8] Hegger R., Kantz H. // Europhys. Lett. 1997. V. 38. P. 267.
- [9] Castro R., Sauer T. // Phys. Rev. E. 1997. V. 55. P. 287.
- [10] Janson N.B., Pavlov A.N., Neiman A.B., Anishchenko V.S. // Phys. Rev. E. 1998. V. 58. P. R4.
- [11] Sauer T. // Nonlinear Dynamics and Time Series / Ed. by C. Culter and D. Kaplan. Fields Institute Communications V. 11 (American Mathematical Society, Providence, RI, 1997). P. 63.
- [12] Takens F. // Dynamical Systems and Turbulence / Ed. by D.A. Rang and L.S. Young. Lecture Notes in Mathematics. V. 898 (Berlin: Springer-Verlag, 1981). P. 366.
- [13] Castro R., Sauer T. // Phys. Rev. E. 1999. V. 59. P. 2911.
- [14] Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., Anishchenko V.S. // Phys. Rev. E. 2000. V. 61. P. 5033.
- [15] Pavlov A.N., Sosnovtseva O.V., Mosekilde E., Anishchenko V.S. // Phys. Rev. E. 2001. V. 63. P. 036 205.
- [16] Pavlov A.N., Pavlova O.N., Mohammad Y.K., Kurths J. // Chaos. 2015. V. 25. P. 013 118.
- [17] Pavlov A.N., Pavlova O.N., Mohammad Y.K., Kurths J. // Phys. Rev. E. 2015. V. 91. P. 022 921.
- [18] Wolf A., Swift J.B., Swinney H.L., Vastano J.A. // Physica D. 1985. V. 16. P. 285.