04

Достаточное условие существования решения уравнения нелокального источника ионизации в тлеющем разряде

© В.В. Горин

Московский физико-технический институт,
141700 Долгопрудный, Московская область, Россия
e-mail: vvgorin@mail.ru

(Поступило в Редакцию 20 марта 2015 г.)

Сформулировано и доказано условие существования решения интегрального уравнения Горина для нелокального источника ионизации в тлеющем разряде постоянного тока в произвольной геометрии, включая и полый катод. Вместе с теоремой единственности решения, сформулированной и доказанной ранее, это дает надежное основание для моделирования нелокальных явлений, пользуясь удобными структурами с ясным физическим смыслом.

Идея нелокальной кинетики электронов в тлеющем разряде постоянного тока, начало которой происходит от работ Цендина, Кудрявцева и др. [1,2], сегодня приобретает математический фундамент.

В работе [3] и диссертации Горина [4] была доказана теорема единственности решения уравнения нелокального источника ионизации в конфигурациях тлеющего разряда и полого катода для широкого класса геометрий и электростатических полей. Существование же решения зависит от существования решения неоднородного линейного уравнения $D_1 f = s$ с вспомогательным оператором

$$D_1 = \mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m_e}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} - \omega_{el}(v)\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial v_i}(\delta_{ik}v^2 - v_i v_k)\frac{\partial}{\partial v_k} + \omega(v), \quad (1)$$

который определен на линейном многообразции $D_0(\Xi^E_{\text{in}})$ гильбертова пространства $H = L^2(\Xi^E_{\text{in}})$ действительных достаточное число раз дифференцируемых функций $f(\mathbf{r},\mathbf{v})$, $(\mathbf{r},\mathbf{v}) \in \Xi^E_{\text{in}} \subset R^6$, удовлетворяющих граничным условиям частичного поглощения:

$$\mathbf{r}\in\partial\Omega,\ \mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{\partial\Omega}\le 0:\quad f(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \beta\left(v, \frac{\mathbf{v}}{v}\cdot\mathbf{n}_{\partial\Omega}\right) \times f\left(\mathbf{r}, \mathbf{v} - 2(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}_{\partial\Omega})\mathbf{n}_{\partial\Omega}\right), \quad 0\le\beta\le 1. \quad (2)$$

Здесь $\Xi : \{\mathbf{r},\mathbf{v}\}$, $\mathbf{r}\in\Omega$, $\mathbf{v}\in R^3$, $\Xi = \Omega\times R^3$, $\Omega\subset R^3$, $\Xi^E_{\text{in}} \subset \Xi \subset R^6$ — ограниченная область в шестимерном евклидовом пространстве R^6. $s = s(\mathbf{r},\mathbf{v}) \in L^2(\Xi^E_{\text{in}})$.

До сих пор предполагалось, что Ξ^E_{in} имеет области, в которых скорость ухода $\omega(v)$ ионизующих электронов с гиперповерхности постоянной полной механической энергии под действием неупругих процессов обращается в ноль. Это связывалось с существованием положительного энергетического барьера для всех видов неупругих процессов. Но строгое отсутствие потерь электронов — полное отсутствие объемной рекомбинации — физически нереально для любых областей фазового пространства электронов в газовом разряде. Принимая это во внимание, положим

$$\omega(v) \ge \omega_{\min} > 0. \quad (3)$$

Здесь доказывается, что (3) является достаточным условием того, чтобы $\lambda = 0$ была регулярной точкой в смысле спектра оператора D_1. Таким образом, это становится и достаточным условием существования решения уравнения Горина [5].

Доказательство. Действительно, в гильбертовом пространстве $H = L^2(\Xi^E_{\text{in}})$ получим

$$\begin{aligned}
(f,s) &= (f, D_1 f) \\
&= \iint\limits_{\Xi^E_{\text{in}}} d^3r d^3v\, f(\mathbf{r},\mathbf{v})\Bigg(\mathbf{v}\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}} - \frac{e}{m_e}\mathbf{E}(\mathbf{r})\cdot\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}} - \omega_{el}(v) \\
&\quad\times\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial v_i}(\delta_{ik}v^2 - v_i v_k)\frac{\partial}{\partial v_k} + \omega(v)\Bigg) f(\mathbf{r},\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \\
&\quad\times \iint\limits_{\Gamma_{\partial\Omega}\cap\{\mathbf{n}_{\partial\Omega}\cdot\mathbf{v}>0\}} d^2r d^3v\, \mathbf{n}_{\partial\Omega}\cdot\mathbf{v}\left(1-\beta^2\left(v, -\frac{\mathbf{v}}{v}\cdot\mathbf{n}_{\partial\Omega}\right)\right) f^2(\mathbf{r},\mathbf{v}) \\
&\quad+ \iint\limits_{\Xi^E_{\text{in}}} d^3r d^3v\, \omega_{el}(v)\sum_{i=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}(\delta_{ik}v^2 - v_i v_k) \\
&\quad\times\frac{\partial f}{\partial v_i}(\mathbf{r},\mathbf{v})\frac{\partial f}{\partial v_k}(\mathbf{r},\mathbf{v}) + \iint\limits_{\Xi^E_{\text{in}}} d^3r d^3v\, f^2(\mathbf{r},\mathbf{v})\omega(v) \\
&\ge \iint\limits_{\Xi^E_{\text{in}}} d^3r d^3v\, f^2(\mathbf{r},\mathbf{v})\omega(v) \ge \omega_{\min}\iint\limits_{\Xi^E_{\text{in}}} d^3r d^3v\, f^2(\mathbf{r},\mathbf{v}) \\
&= \omega_{\min}\,\|f\|^2.
\end{aligned}$$

Поэтому, с учетом неравенства Коши–Шварца $\|s\| \times \|f\| \geq |(s, f)|$, получим

$$\|s\| \cdot \|f\| \geq |(s, f)| \geq (s, f) \geq \omega_{\min} \|f\|^2,$$

$$\|s\| \cdot \|f\| \geq \omega_{\min} \|f\|^2, \quad \|s\| \geq \omega_{\min} \|f\|,$$

$$\|D_1 f\| \geq \omega_{\min} \|f\|. \tag{4}$$

Область определения $D_0(\Xi_{\text{in}}^E)$ оператора D_1 плотна в гильбертовом пространстве $H = L^2(\Xi_{\text{in}}^E)$, поскольку множество всех бесконечно дифференцируемых функций, имеющих нулевое значение на границе области Ξ_{in}^E, плотно в этом пространстве. Действительно, имеет место включение $L^2(\Xi_{\text{in}}^E) \supset D_0(\Xi_{\text{in}}^E) \supset D_\infty(\Xi_{\text{in}}^E)$, где $D_\infty(\Xi_{\text{in}}^E)$ — класс основных функций: финитных функций, бесконечно дифференцируемых на замыкании Ξ_{in}^E и обращающихся в ноль на границе Ξ_{in}^E. Множество функций $D_\infty(\Xi_{\text{in}}^E)$ плотно в $L^2(\Xi_{\text{in}}^E)$ [6]. Поэтому, ввиду указанного включения, множество функций класса $D_0(\Xi_{\text{in}}^E)$ также плотно в $L^2(\Xi_{\text{in}}^E)$.

Таким образом, оператор D_1^*, сопряженный к оператору D_1 в гильбертовом пространстве H, существует и определен однозначно. Он имеет область определения $D_0^*(\Xi_{\text{in}}^E)$, состоящую из функций $h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = f(\mathbf{r}, -\mathbf{v})$, где функции $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \in D_0(\Xi_{\text{in}}^E)$. Функции $h(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ удовлетворяют сопряженным граничным условиям

$$\mathbf{r} \in \partial\Omega, \ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega} \geq 0: \quad h(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \beta\left(v, -\frac{\mathbf{v}}{v} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega}\right)$$
$$\times h\big(\mathbf{r}, \mathbf{v} - 2(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}_{\partial\Omega})\mathbf{n}_{\partial\Omega}\big), \quad 0 \leq \beta \leq 1. \tag{5}$$

Таким образом, множество $D_0^*(\Xi_{\text{in}}^E)$ также плотно в H.

Для линейного оператора в гильбертовом пространстве справедливо следующее утверждение: ортогональное дополнение к ядру оператора, сопряженного данному оператору, есть замыкание области значений данного оператора [7]:

$$(\operatorname{Ker} D_1^*)^\perp = \overline{\operatorname{Im} D_1}. \tag{6}$$

В работах Горина [3,8] доказано, что $\operatorname{Ker} D_1^* = \{0\}$ (однородное уравнение $D_1^* f = 0$ с граничными условиями (5), сопряженными к (2), имеет единственное решение $f = 0$, (см. лемму 2)). Поэтому $\overline{\operatorname{Im} D_1} = H$, т.е. область значений $\operatorname{Im} D_1$ оператора D_1 плотна в $H = L^2(\Xi_{\text{in}}^E)$. Но тогда, с учетом (4), существует ограниченный обратный оператор D_1^{-1}: $\|D_1^{-1}\| \leq 1/\omega_{\min}$ на множестве $\operatorname{Im} D_1$, которое плотно в H. Последнее означает, что $\lambda = 0$ является регулярной точкой в смысле спектра оператора D_1 [9].

Итак, достаточность условия (3) для существования обратного вспомогательного оператора D_1^{-1}, также и существования решения интегрального уравнения Горина [5], доказана. Это — условие существования минимального положительного значения скорости утечки ионизующих электронов.

Таким образом, нелокальный источник ионизации в стационарном тлеющем разряде можно вычислить как решение уравнения Горина. В общем случае его математический тип — уравнение Фредгольма 2-го рода, при одномерном упрощении задачи [10] оно имеет вид уравнения Вольтерра 2-го рода. Включение конечной скорости потерь электронов дает уверенность в существовании стационарного решения, которое, как было доказано ранее, является единственным.

Автор выражает свою искреннюю благодарность профессору А.П. Юрачковскому за его внимание к этой работе.

Список литературы

[1] *Kudryavtsev A.A., Morin A.V., Tsendin L.D.* // Technical Phys. 2008. Vol. 53. N 8. P. 1029–1040.
[2] *Цендин Л.Д.* // Усп. физ. наук. 2010. Т. 180. № 2. С. 139–164.
[3] *Gorin V.V.* // J. Mod. Phys. 2012. Vol. 3. N 30. P. 1647–1662.
[4] *Горин В.В., Петрухин В.А., Черняк В.Я.* Математические модели нелокальной кинетики электронов в тлеющем разряде с полым катодом. М.: МФТИ, 2011.
[5] *Gorin V.V.* // European Phys. J. D. 2010. Vol. 59. P. 241–247.
[6] *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1981. С. 88 (лемма 2).
[7] *Садовничий В.А.* Теория операторов. 1986. М.: МГУ. С. 247 (утверждение 7).
[8] *Горин В.В.* // Тр. МФТИ. 2010. Т. 2, № 3. С. 71–80.
[9] *Садовничий В.А.* Теория операторов. 1986. М.: МГУ. С. 261.
[10] *Gorin V.V.* // Ukr. J. Phys. 2008. Vol. 53. N 4. P. 366–372.