Журнал технической физики, 2015, том 85, вып. 11

01

Кинетический подход к получению уравнения огибающей релятивистского электронного пучка, распространяющегося в режиме ионной фокусировки при наличии ионного канала произвольного радиального профиля

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет,
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: man06@mail.ru

(Поступило в Редакцию 29 января 2014 г. В окончательной редакции 4 марта 2015 г.)

С помощью кинетических методов получены уравнения переноса, уравнения вириала, условие динамического равновесия и уравнение огибающей аксиально-симметричного параксиального релятивистского электронного пучка, распространяющегося в режиме ионной фокусировки в ситуации наличия ионного плазменного канала, радиальный профиль плотности которого существенно отличается от соответствующего профиля плотности тока пучка. Найденные уравнения включают члены, учитывающие указанное отличие. Кроме того, в полученных уравнениях учтен случай, когда электронная компонента фоновой плазмы только частично удалена из области пучка.

Введение

В последние три десятилетия внимание зарубежных, а также отечественных исследователей привлекают вопросы транспортировки релятивистских электронных пучков (РЭП) в плотных и разреженных газоплазменных средах [1–15]. Особый интерес представляет проблема определения условий устойчивой проводки пучков по предварительно созданным плазменным каналам в режиме ионной фокусировки (ИФ) [6,11–14].

Основной особенностью режима ИФ является достаточно низкое давление в фоновой газоплазменной среде, когда электроны плазмы в предварительно созданном плазменном канале при воздействии поперечной компоненты электрического поля фронтальной части РЭП покидают область, занимаемую пучком, не создавая существенной дополнительной ионизации фонового газа. В этом случае пучок будет распространяться под действием фокусирующего электрического поля, созданного ионной компонентой плазменного канала, которая в силу достаточно большой массы ионов (по сравнению с массой электронов) определенное время может считаться неподвижной.

В отличие от известных работ [7,8] в настоящей работе с помощью кинетических методов получены уравнения переноса, вириальное уравнение и уравнение огибающей для РЭП, распространяющегося в режиме ИФ, когда радиальный профиль ионного канала существенно отличается от соответствующего профиля пучка. Отметим, что в работах [7,8] в отличие от изучаемого здесь режима ИФ изучался случай динамики РЭП в плотной газоплазменной среде. Кроме того, предполагается, что электронная компонента фоновой плазмы лишь частично удалена из области пучка. Ситуация частичного удаления электронной плазмы из области пучка может иметь место в передней части пучка на достаточно малых временах, когда канальный электрон не успел уйти далеко из области пучка под действием радиальной компоненты электрического поля пучка. Указанные предположения в определенной степени усложняют получение основных уравнений поперечной динамики РЭП, включая и вывод уравнения огибающей пучка с помощью кинетического уравнения.

Постановка и основные уравнения

Рассмотрим параксиальный моноэнергетический азимутально-симметричный РЭП, распространяющийся вдоль оси z цилиндрической системы координат по предварительно созданному плазменному каналу в разреженной газоплазменной среде. Фронтальное поперечное электрическое поле вытесняет из канала электронную компоненту фоновой плазмы и поэтому основная часть пучка распространяется вдоль ионного канала, характерный радиус которого будем считать отличающимся от соответствующего радиуса плотности тока пучка.

Известно, что в параксиальном приближении [5,7] продольное движение частиц пучка является детерминированным, в то же время распределение частиц РЭП по поперечным импульсам и координатам носит стохастический характер и описывается соответствующим кинетическим уравнением.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением представляющего основной практический интерес случая параксиального азимутально-симметричного пучка с осью симметрии, совпадающей с направлением распространения пучка вдоль оси z цилиндрической системы координат.

Как и в работах [7,8], представим пучок в виде совокупности тонких поперечных сегментов S^{τ}, каждый из которых инжектируется в момент времени $t = \tau$ и содержит фиксированное число частиц.

Будем предполагать, что все частицы данного сегмента имеют одинаковую релятивистскую массу $m\gamma$ и продольную скорость $v_z = \beta c$ (здесь m — масса покоя электрона, γ — лоренц-фактор частиц пучка, c — скорость света). Таким образом, полагается, что на выходе из инжектора пучок является моноэнергетическим и, кроме того, среда, в которой он распространяется, — однородной. Тогда при сделанных предположениях все частицы сегментов S^τ одинаковым образом эволюционируют по координате z и в любой момент времени имеют одинаковую энергию $E(t)$ и релятивистскую массу $m_r = m\gamma = E(t)/c^2$, причем в процессе распространения сегменты S^τ не пересекаются.

Для определенного сегмента S^τ введем в рассмотрение функцию распределения частиц сегмента $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ по поперечным координатам $\mathbf{r}_\perp$ и импульсам $\mathbf{p}_\perp$, эволюция которой будет описываться кинетическим уравнением

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_\perp}{\gamma m} \nabla_{\mathbf{r}_\perp} f^\tau + \mathbf{F}_\perp \nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau = I_{sc}, \tag{1}$$

где $\mathbf{F}_\perp$ — поперечная компонента силы, действующей на электрон пучка со стороны коллективного электромагнитного поля системы плазма–пучок, а I_{sc} — интеграл столкновений.

В отличие от случая работ [7,8] в ситуации режима ИФ имеем

$$\mathbf{F}_\perp = e\left(-\nabla_\perp \Phi + \beta \nabla_\perp A_z^{(b)}\right), \tag{2}$$

где e — заряд электрона, $\beta = v_z/c$,

$$\Phi = \Phi^{(e)} + \Phi^{(i)} + \Phi^{(b)}. \tag{3}$$

Здесь $\Phi^{(i)}, \Phi^{(e)}$ и $\Phi^{(b)}$ — соответственно электростатические потенциалы, созданные ионами, электронами фоновой плазмы и электронным пучком, $\nabla_{\mathbf{r}_\perp} \equiv \nabla_\perp$, $A_z^{(b)}$ — z-компонента векторного потенциала электромагнитного поля, созданного пучком. Указанные потенциалы определяются из уравнений Пуассона и Ампера (последнее для определения $A_z^{(b)}$)

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi^{(i)}}{\partial r}\right) = 4\pi|e|n^{(i)}(r), \tag{4}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi^{(e)}}{\partial r}\right) = -4\pi|e|n^{(e)}(r), \tag{5}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi^{(b)}}{\partial r}\right) = -4\pi|e|n^{(b)}(r), \tag{6}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_z^{(b)}}{\partial r}\right) = -\frac{4\pi}{c} J_{bz}, \tag{7}$$

где $n^{(i)}, n^{(e)}, n^{(b)}$ — концентрации ионов и электронов фоновой плазмы, а также электронов пучка, J_{bz} — продольная компонента плотности тока РЭП, e — заряд электрона.

С помощью уравнений (6) и (7) нетрудно получить

$$\nabla_\perp \Phi^{(b)} - \beta \nabla_\perp A_z^{(b)} = -\beta\mu_0 \nabla_\perp A_z^{(b)}, \tag{8}$$

где $\mu_0 = -1/(\beta^2\gamma^2)$.

Тогда кинетическое уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_\perp}{\gamma m} \nabla_{\mathbf{r}_\perp} f^\tau + e\left[\nabla_\perp \Phi^{(i)} + \nabla_\perp \Phi^{(e)} - \beta\mu_0 \nabla_\perp A_z^{(b)}\right] \nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau = I_{sc}. \tag{9}$$

Если учитывать только многократное кулоновское рассеяние электронов пучка на малые углы, интеграл столкновений в (9) принимает вид Фоккера–Планка в виде

$$I_{sc} = \frac{m\gamma S}{2} \Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau, \tag{10}$$

где величина S характеризует скорость закачки энергии из продольного движения электронов пучка в поперечное в результате процесса многократного рассеяния.

Уравнения переноса

Используя методику работы [7], получим уравнения переноса, однако полевые члены здесь будут отличаться от омического случая, рассмотренного в [7].

Из уравнения (9) могут быть получены уравнения для первых моментов функции распределения f^τ, которыми определяются основные макроскопические характеристики пучка.

Интегрирование уравнения (9) по пространству поперечных импульсов дает уравнение

$$\frac{\partial \chi_b}{\partial t} + \nabla_\perp\left(\chi_b \frac{\tilde{\mathbf{p}}}{\gamma m}\right) = 0, \tag{11}$$

где $\chi_b(\mathbf{r}_\perp, t)$ — нормированная плотность частиц пучка в сегменте S^τ определяемая интегралом

$$\chi_b(\mathbf{r}_\perp, t) = \int d\mathbf{p}_\perp f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t), \tag{12}$$

и, кроме того,

$$\tilde{\mathbf{p}}_\perp(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{\chi_b} \int d\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_\perp f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t) \tag{13}$$

— средний поперечный импульс.

В силу того, что $\tilde{\mathbf{p}}_\perp/(\gamma m) = \tilde{\mathbf{v}}_\perp$ (где $\tilde{\mathbf{v}}_\perp$ — средняя поперечная скорость частиц пучка), уравнение (11) представляет собой обычное уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения числа частиц рассматриваемого сегмента пучка.

Умножая уравнение (9) на $\mathbf{p}_\perp$ и интегрируя по поперечным импульсам, получим уравнение переноса поперечного импульса

$$\frac{\partial}{\partial t}(\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_\perp) + \nabla_\perp\left(\chi_b \frac{\widetilde{\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_\perp}}{\gamma m}\right) + e\chi_b \nabla_\perp\left(\Phi^{(i)} + \Phi^{(e)} - \beta\mu_0 A_z^{(b)}\right) = 0, \quad (14)$$

где

$$\widetilde{\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_\perp}(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{\chi_b}\int d\,\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_\perp f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t). \quad (15)$$

Уравнение (14) с учетом (11) может быть записано в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \tilde{\mathbf{v}}_\perp \nabla_\perp\right)\mathbf{p}_\perp = -\frac{\nabla_\perp \tilde{\mathbf{P}}_\perp}{\chi_b} + e\mathbf{E}_\perp^{(\mathrm{eff})}, \quad (16)$$

где $\mathbf{E}_\perp^{(\mathrm{eff})} = -\nabla_\perp\left(\Phi^{(i)} + \Phi^{(e)}\beta\mu_0 A_z^{(b)}\right)$ — поперечная компонента эффективного коллективного электрического поля,

$$\tilde{\mathbf{P}}_\perp = \int d\,\mathbf{p}_\perp(\mathbf{p}_\perp - \tilde{\mathbf{p}}_\perp)(\mathbf{v}_\perp - \tilde{\mathbf{p}}_\perp) \quad (17)$$

— тензор напряжений.

Наконец, умножая (9) на $p_\perp^2/(2m\gamma)$ и интегрируя по пространству поперечных импульсов, получим уравнение переноса энергии

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\chi_b \frac{\widetilde{p_\perp^2}}{2m\gamma}\right) + \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{\chi_b \widetilde{\mathbf{p}_\perp^2}}{2m\gamma} + \nabla_\perp\left(\frac{\chi_b \widetilde{\mathbf{p}_\perp p_\perp^2}}{2m^2\gamma^2}\right) + \frac{e\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_\perp}{m\gamma}\nabla_\perp\left(\Phi^{(i)} + \Phi^{(e)} - \beta\mu_0 A_z^{(b)}\right) = \chi_b S, \quad (18)$$

где

$$\widetilde{\mathbf{p}_\perp^2}(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{\chi_b}\int d\mathbf{p}_\perp p_\perp^2 f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t), \quad (19)$$

$$\widetilde{\mathbf{p}_\perp p_\perp^2}(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{\chi_b}\int d\mathbf{p}_\perp \mathbf{p}_\perp p_\perp^2 f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t). \quad (20)$$

Третий член в левой части (18) характеризует скорость изменения средней энергии поперечного движения частиц сегмента пучка S^τ, связанного с наличием потока энергии с плотностью

$$\mathbf{F}_0 = \frac{\chi_b \widetilde{\mathbf{p}_\perp p_\perp^2}}{2m^2\gamma^2} = \frac{\chi_b \widetilde{\mathbf{v}_\perp p_\perp^2}}{2m\gamma}. \quad (21)$$

Четвертый член в левой части (18) может быть записан в виде

$$\frac{e\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_\perp}{m\gamma}\nabla_\perp\left(\Phi^{(i)} + \Phi^{(e)} - \beta\mu_0 A_z^{(b)}\right) = \mathbf{J}_\perp \mathbf{E}_\perp^{\mathrm{eff}}, \quad (22)$$

где $\mathbf{J}_\perp = -e\chi_b \tilde{\mathbf{p}}_\perp/(m\gamma) = -e\chi_b \tilde{\mathbf{v}}_\perp$ и $\mathbf{E}_\perp^{(\mathrm{eff})}$ определено в (16).

Из (18) следует, что указанное слагаемое характеризует скорость изменения энергии поперечного движения, обусловленного работой сил, действующих на частицы пучка со стороны самосогласованного коллективного электромагнитного поля.

Кроме того, можно отметить, что величина $\chi_b S$ в правой части уравнения характеризует скорости изменения энергии поперечного движения, вызываемого упругими столкновениями частиц пучка с частицами газоплазменной среды.

Уравнение вириала. Условие динамического равновесия

Используя методику работы [7], которая изучала распространение пучка по омическому каналу, обобщим результаты указанной работы на случай транспортировки пучка в режиме ИФ.

Умножим уравнение переноса импульса (14) скалярно на $\mathbf{r}_\perp$ и проинтегрируем полученное выражение по пространству поперечных координат. После ряда преобразований получим

$$E_\perp - \frac{d}{dt}\left(\frac{m\gamma}{8}\frac{d\Re^2}{dt}\right) = V, \quad (23)$$

где

$$E_\perp = \int d\mathbf{r}_\perp \chi_b \frac{\widetilde{p_\perp^2}}{2m\gamma} \quad (24)$$

— средняя кинетическая энергия поперечного движения частиц сегмента пучка,

$$\Re = \sqrt{2\int d\mathbf{r}_\perp \chi_b r_\perp^2} \quad (25)$$

— среднеквадратичный радиус сегмента пучка,

$$V = \frac{e}{2}\int d\mathbf{r}_\perp \chi_b \mathbf{r}_\perp \nabla_\perp\left(\Phi^{(i)} + \Phi^{(e)} - \beta\mu_0 A_z^{(b)}\right) \quad (26)$$

— средний вириал электронов пучка.

С учетом (4)–(7) после ряда выкладок можно получить

$$V = T_B \Gamma. \quad (27)$$

Здесь

$$\Gamma = \mu_0 + \frac{2f_n^{(i)}}{\beta^2}\left\langle \tilde{N}^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b - \frac{2f_n^{(e)}}{\beta^2}\left\langle \tilde{N}^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b, \quad (28)$$

$$f_n^{(i)} = \frac{N^{(i)}}{N_b}, \quad f_n^{(e)} = \frac{N^{(e)}}{N_b}, \quad (29)$$

$$\left\langle \tilde{N}^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b = \frac{\left\langle N^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b}{N^{(i)}},$$

$$\left\langle \tilde{N}^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b = \frac{\left\langle N^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b}{N^{(e)}}, \quad (30)$$

параметр μ_0 определен в (8), $T_B = I_b|e|\beta/(2c)$ — эффективная температура Беннета, I_b — полный ток пучка, $N_b, N^{(i)}, N^{(e)}$ — соответственно характерные линейные концентрации электронов пучка, ионов и электронов фоновой плазмы

$$N^{(i)}(\mathbf{r}_\perp) = N^{(i)} 2\pi \int_0^r r' \chi^{(i)}(r') dr', \tag{31}$$

$$N^{(e)}(\mathbf{r}_\perp) = N^{(e)} 2\pi \int_0^r r' \chi^{(e)}(r') dr', \tag{32}$$

$\chi^{(i)}(r) = n^{(i)}(r)/N^{(i)}, \chi^{(e)}(r) = n^{(e)}(r)/N^{(e)}$; угловые скобки означают следующий оператор усреднения:

$$\langle G(\mathbf{r}_\perp)\rangle_b = \int d\mathbf{r}_\perp \chi_b(\mathbf{r}_\perp) G(\mathbf{r}_\perp). \tag{33}$$

Здесь $G(\mathbf{r}_\perp)$ — некоторая интегрируемая функция, $\chi_b(\mathbf{r}_\perp) = n^{(b)}(\mathbf{r}_\perp)/N_b$.

Тогда из (23) и (27) находим

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\gamma}{8}\frac{d\Re^2}{dt}\right) = E_\perp - \left(\mu_0 + \frac{2f_n^{(i)}}{\beta^2}\left\langle \tilde{N}^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b - \frac{2f_n^{(e)}}{\beta^2}\left\langle \tilde{N}^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b\right) T_B. \tag{34}$$

Из уравнения (34) при квазиравновесии, когда выполнено условие $d\Re^2/dt \approx 0$, получим уравнение

$$E_\perp = T_B\left(\mu_0 + \frac{2f_n^{(i)}}{\beta^2}\left\langle \tilde{N}^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b - \frac{2f_n^{(e)}}{\beta^2}\left\langle \tilde{N}^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b\right), \tag{35}$$

которое существенно отличается от соответствующего условия работы [7]) (т. е. является обобщением условия равновесия Беннета [7] на случай распространения РЭП в режиме ионной фокусировки). Заметим, что в отличие результата работы [9] уравнение включает вклад электромагнитного поля пучка (первое слагаемое в правой части (35)), которым можно пренебрегать только для ультрарелятивистских пучков. Кроме того, в (35) включен член, описывающий влияние электронной компоненты фоновой плазмы.

Уравнение для средней полной поперечной энергии частиц пучка

Рассмотрим далее полную энергию частиц сегмента пучка Ψ, которую определим как сумму средней кинетической энергии поперечного движения $E_\perp$ и средней потенциальной энергии частиц в эффективном коллективном электрическом поле $\mathbf{E}^{(\mathrm{eff})} = -\nabla_\perp \Phi$:

$$\Psi = E_\perp + \Lambda_0 + \Lambda_1, \tag{36}$$

где

$$\Lambda_0 = \int d\mathbf{r}_\perp \chi_b e\left(\Phi^{(i)} + \Phi^{(e)}\right), \tag{37}$$

$$\Lambda_1 = -\frac{e\beta\mu_0}{2}\int d\mathbf{r}_\perp \chi_b e A_z^{(b)}. \tag{38}$$

Для нахождения уравнения для средней поперечной энергии частиц пучка продифференцируем (36) по времени. После ряда соответствующих преобразований получим

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{dE_\perp}{dt} + \frac{d\Lambda_0}{dt} + \frac{d\Lambda_1}{dt} = -\frac{E_\perp}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt} + \Lambda_1\frac{d\ln(|\mu_0|)T_B}{dt} + \int d\mathbf{r}_\perp \chi_b S + e\int d\mathbf{r}_\perp \chi_b\left(\frac{\partial\Phi^{(i)}}{\partial t} + \frac{\partial\Phi^{(e)}}{\partial t}\right). \tag{39}$$

После ряда преобразований приходим к следующему уравнению:

$$\frac{dE_\perp}{dt} = \int d\mathbf{r}_\perp \chi_b S - \frac{E_\perp}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt} - \Lambda_1\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\Lambda_1}{|\mu|_0 T_B}\right) - e\int d\mathbf{r}_\perp\left(\Phi^{(i)} + \Phi^{(e)}\right)\frac{\partial\chi_b}{\partial t}. \tag{40}$$

$$\frac{dE_\perp}{dt} = \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\mathrm{enc}} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\mathrm{los}} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\beta} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\beta 1} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\mathrm{ion}} + \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\mathrm{electr}}, \tag{41}$$

где

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\mathrm{enc}} = \int d\mathbf{r}_\perp \chi_b S, \quad \left(\frac{dE}{dt}\right)_{\mathrm{los}} = -\frac{E_\perp}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}, \tag{42}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\beta 1} = -\Lambda_1\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\Lambda_1}{|\mu_0|T_B}\right), \tag{43}$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\mathrm{ion}} = -e\int d\mathbf{r}_\perp \Phi^{(i)}\frac{\partial\chi_b}{\partial t},$$

$$\left(\frac{dE}{dt}\right)_{\mathrm{electr}} = -e\int d\mathbf{r}_\perp \Phi^{(e)}\frac{\partial\chi_b}{\partial t}, \tag{44}$$

— соответственно скорости изменения средней поперечной кинетической энергии частиц сегмента РЭП за счет упругих и неупругих столкновений частиц пучка с частицами фоновой газоплазменной среды (формулы в (42)), (43) — соответствующая скорость за счет работы сил, действующих на частицы пучка со стороны самосогласованного эффективного коллективного электрического поля $\mathbf{E}_\perp^{\mathrm{eff}} = -\nabla_\perp A_z^{(b)}$, а (44) — скорости изменения $E_\perp$ за счет влияния электрических полей ионной и электронной компонент плазменного канала.

Уравнение для среднеквадратичного радиуса сегмента пучка (уравнение огибающей пучка)

Определим вид уравнения для среднеквадратичного радиуса пучка или так называемое уравнение огибающей параксиального релятивистского аксиально-симметричного пучка заряженных частиц в рассматриваемом случае. Для этого обе части уравнения для средней полной поперечной энергии частиц пучка (40) умножим на лоренц-фактор γ. Тогда получим

$$\frac{d(\gamma E_\perp)}{dt} = \gamma \int d\mathbf{r}_\perp \chi_b S - \Lambda_1 \gamma \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{\Lambda_1}{|\mu|_0 T_B}\right) - e\gamma \int d\mathbf{r}_\perp \left(\Phi^{(i)} + \Phi^{(e)}\right) \frac{\partial \chi_b}{\partial t}. \tag{45}$$

Обратимся теперь к уравнению вириала в форме (34). После умножения (29) на $\gamma/2$ и дифференцирования полученного уравнения по t, имеем

$$\frac{d(\gamma E_\perp)}{dt} = \frac{m}{8} \frac{d}{dt}\left[\gamma \frac{d}{dt}\left(\gamma \frac{d\Re^2}{dt}\right)\right] + \frac{d}{dt}(\gamma \mu_0 T_B) + \frac{d}{dt}\left(\gamma \frac{2f_n^{(i)} T_B}{\beta^2} \left\langle \tilde{N}^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b\right) - \frac{d}{dt}\left(\gamma \frac{2f_n^{(e)} T_B}{\beta^2} \left\langle \tilde{N}^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b\right). \tag{46}$$

Приравнивая правые части (45) и (46), приходим к уравнению

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\gamma \frac{d}{dt}\left[\frac{\gamma m}{4}\frac{d}{dt}\Re^2\right]\right\} = \gamma \int d\mathbf{r}_\perp \chi_b S - \Lambda_1 \gamma \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{\Lambda_1}{|\mu|_0 T_B}\right) - e\gamma \int d\mathbf{r}_\perp \left(\Phi^{(i)} + \Phi^{(e)}\right) \frac{\partial \chi_b}{\partial t} - \frac{d}{dt}(\gamma \Gamma_0 T_B), \tag{47}$$

где

$$\Gamma_0 = \mu_0 + \frac{2f_n^{(i)}}{\beta^2} \left\langle \tilde{N}^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b - \frac{2f_n^{(e)}}{\beta^2} \left\langle \tilde{N}^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b. \tag{48}$$

После умножения (48) на $2\Re^2$ и ряда преобразований получим

$$\frac{d}{dt}\left\{\gamma^2 \Re^3 \left[\frac{d^2\Re}{dt^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{d\Re}{dt} + \frac{4\mu_0 T_B}{m\gamma\Re} + \frac{4T_B}{m\gamma\Re}\left(\Gamma_0^{(i)} - \Gamma_0^{(e)}\right)\right]\right\} = \frac{4\Re^2\gamma}{m} \times \left\{\int d\mathbf{r}_\perp \chi_b S - \mu_0 T_B \frac{d\Gamma^*}{dt} - e\int d\mathbf{r}_\perp \left(\Phi^{(i)} + \Phi^{(e)}\right)\frac{\partial \chi_b}{\partial t} + \left(\Gamma_0^{(i)} - \Gamma_0^{(e)}\right) T_B \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{\Re^2}{\Re_c^2}\right)\right\}, \tag{49}$$

где

$$\Gamma_0^{(i)} = \frac{2f_n^{(i)}}{\beta^2} \left\langle \tilde{N}^{(i)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b,$$

$$\Gamma_0^{(e)} = \frac{2f_n^{(e)}}{\beta^2} \left\langle \tilde{N}^{(e)}(\mathbf{r}_\perp)\right\rangle_b, \tag{50}$$

$$\Gamma^* = \frac{\Lambda_1}{\mu_0 T_B} - \ln\left(\frac{\Re}{\Re_c}\right)^2. \tag{51}$$

Тогда из (49) находим искомое уравнение огибающей РЭП в рассматриваемом случае

$$\frac{d^2\Re}{dt^2} + \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{d\Re}{dt} + \frac{4T_B}{m\gamma\Re}\left(\mu_0 + \Gamma_0^{(i)} - \Gamma_0^{(e)}\right) = \frac{4(E^2 + \tilde{P}_\theta^2/m^2)}{\gamma^2\Re^3}. \tag{52}$$

Здесь $\tilde{P}_\theta$ — средний обобщенный угловой момент,

$$E = \frac{\gamma\Re}{2}\left[\frac{4E_\perp}{\gamma m} - \left(\frac{d\Re}{dt}\right)^2 - \left(\frac{2L}{m\gamma\Re}\right)^2\right]^{1/2} \tag{53}$$

— среднеквадратичный эмиттанс рассматриваемого сегмента пучка, для которого в рассматриваемом случае нетрудно получить

$$E^2 = E_0^2 + \int_\tau^t dt' \frac{\gamma\Re^2}{m}\left[\int d\mathbf{r}_\perp \chi_b S - \mu_0 T_B \frac{d\Gamma^*}{dt'} - e\int d\mathbf{r}_\perp \left(\Phi^{(i)} + \Phi^{(e)}\right)\frac{\partial \chi_b}{\partial t'} + \left(\Gamma_0^{(i)} - \Gamma_0^{(e)}\right) T_B \frac{d}{dt} \ln\left(\frac{\Re^2}{\Re_c^2}\right)\right], \tag{54}$$

где E_0 — начальное значение среднеквадратичного эмиттанса, τ — время инжекции рассматриваемого тонкого поперечного сегмента пучка.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе в отличие от работы [7], в которой изучалась транспортировка РЭП по омическому плазменному каналу, с помощью кинетических методов получены уравнения переноса, уравнение вириала, условие динамического равновесия и уравнение огибающей аксиально-симметричного параксиального релятивистского электронного пучка, распространяющегося в режиме ионной фокусировки в ситуации наличия ионного плазменного канала, радиальный профиль плотности которого существенно отличается от соответствующего профиля плотности тока пучка. Найденные уравнения включают члены, учитывающие указанное отличие. Кроме того, в полученных уравнениях учтен случай, когда электронная компонента фоновой плазмы только частично удалена из области пучка.

Работа выполнена в рамках Тематического плана фундаментальных НИР, выполняемых СПбГУ по заказу Министерства образования и науки Российской Федерации № 6.0.10.2010.

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980. 167 с.
[2] *Диденко А.Н., Григорьев В.П., Усов Ю.П.* Мощные электронные пучки и их применение. М.: Атомиздат, 1977. 277 с.
[3] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме М.: Физматлит, 1990. 336 с.
[4] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984. 432 с.
[5] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С., Филиппов Б.В.* Динамика пучков заряженных частиц в газоплазменных средах. СПб.: Изд. СПбГУ, 2002. 98 с.
[6] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С., Зеленский А.Г.* Динамика релятивистских электронных пучков в режиме ионной фокусировки. Воскресенск: Позитив, 2013. 104 с.
[7] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.
[8] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 103–107.
[9] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 119–125.
[10] *Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 4. С. 103–108.
[11] *Buchanan H.L.* // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. № 1. P. 221–231.
[12] *Владыко В.Б., Рудяк Ю.В.* // Физика плазмы. 1993. Т. 19. Вып. 12. С. 1444–1453.
[13] *Виноградов С.В., Захарова С.С., Никулин М.Г.* // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 1. С. 165–173.
[14] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 8. С. 148–150.
[15] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 8. С. 109–113.