

01;11

Собственные волны многопроводной среды

© А.Ю. Ветлужский, Ю.Л. Ломухин

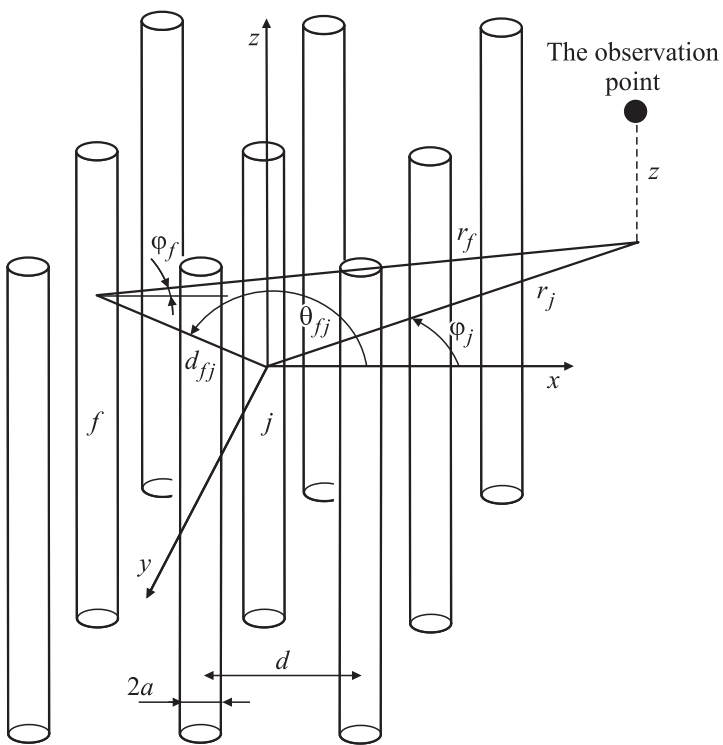
Институт физического материаловедения СО РАН, Улан-Удэ
E-mail: vay@ipms.bscnet.ru

Поступило в Редакцию 14 апреля 2015 г.

Исследуются собственные волны среды, образованной системой параллельно ориентированных проводящих цилиндрических элементов. Показано, что вдоль такой структуры могут распространяться поверхностные волны, существование которых определяется как свойствами самих проводов, так и их взаимным влиянием.

Изучение электродинамики систем, хорошо проводящих, параллельно ориентированных, малых по сравнению с длиной волны в поперечнике и протяженных в осевом направлении цилиндрических стержневых элементов, имеет давнюю историю. Однако особую актуальность такие исследования приобрели в последнее десятилетие в связи с выявлением у них ряда свойств, имеющих практическое значение и позволяющих отнести их к категории как искусственных (фотонных) кристаллов [1], так и метаматериалов. В первую очередь это — существенная анизотропия таких структур, позволяющая говорить о них как об одноосных кристаллах, проявляющих плазмоподобные свойства, т. е. обладающих низкими и даже отрицательными значениями диэлектрической проницаемости в направлении вдоль оси проводов. Это приводит к возникновению необычных эффектов, сопровождающих отражение и преломление волн на границах таких структур, включая формирование обратных волн [2], и даже делает возможным создание на их основе сверхлинз, позволяющих превзойти дифракционный предел и обладающих при этом малым затуханием вплоть до инфракрасного диапазона [3].

В настоящее время исследования электродинамики проводных сред либо ведутся строгими численными методами, либо базируются на методах теории гомогенизации. Последний подход позволяет подробно описать картину взаимодействия излучения с анизотропной средой,



Схематичное представление многопроводной среды.

построить дисперсионные уравнения и проанализировать собственные волны в такой среде с учетом частотной и в некоторых случаях пространственной дисперсий [4]. При этом очевидно, что в рамках го-могенного описания проводной среды невозможно учесть особенностей волнового взаимодействия отдельных элементов, оказывающих влияние на формирование собственных волн. В данной работе предлагается метод формулировки дисперсионного уравнения для многопроводной структуры, учитывающий такое взаимодействие.

Рассмотрим двумерно-периодическую систему из F бесконечных цилиндрических проводов; период структуры d , радиус поперечника элемента a (см. рисунок). Будем анализировать поперечные магнитные

волны, т. е. имеющие продольную по отношению к проводам компоненту вектора \mathbf{E} . Временную зависимость полей положим в виде $e^{i\omega t}$.

Поле, создаваемое элементами структуры, в этом случае удобно описывать с помощью вектора Герца [5], имеющего единственную ненулевую составляющую:

$$\Pi_z(r_f, \varphi_f, z) = \sum_{f=1}^F \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} P_{mf} H_m^{(2)}(\vartheta r_f) e^{-i\chi z} d\chi, \quad (1)$$

где $\vartheta = \sqrt{k^2 - \chi^2}$, $\text{Im } \vartheta > 0$, $k = \omega \sqrt{\varepsilon \mu}$, ω — циклическая частота, ε и μ — диэлектрическая и магнитная проницаемости межпроводной среды, P_{mf} — амплитудные коэффициенты.

Для удовлетворения граничным условиям на поверхности произвольного j -го стержня необходимо выразить Π_z через волновые функции, зависящие от координат r_f и φ_j . Для этого используем теорему сложения для цилиндрических функций [6]

$$Z_m(\alpha d) e^{im\psi} = \sum_{s=-\infty}^{\infty} Z_{m+s}(\alpha \rho_1) J_s(\alpha \rho_2) e^{is(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

где $\rho_1 > \rho_2$, Z — произвольная цилиндрическая функция. В нашем случае $\psi = \varphi_f - \pi - \theta_{fj}$, $\varphi_1 - \varphi_2 = \theta_{fj} - \varphi_j$, $d = r_f$, $\rho_1 = r_j$, $\rho_2 = d_{fj}$.

Выполняя в (1) соответствующие преобразования и выделяя слагаемое с $j = f$, запишем следующее выражение для суммарного поля возбужденной многопроводной структуры:

$$\begin{aligned} \Pi_z = & \sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-im\varphi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[H_m^{(2)}(\vartheta r_j) P_{mj}(\chi) \right. \\ & \left. + \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^F \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_{mf}(\chi) e^{i(m-s)\theta_{fj}} \begin{cases} H_{m-s}^{(2)}(\vartheta r_j) J_m(\vartheta d_{fj}) & \text{при } r > d_{fj} \\ H_{m-s}^{(2)}(\vartheta d_{fj}) J_m(\vartheta r_j) & \text{при } r_j < d_{fj} \end{cases} \right] e^{-i\chi z} d\chi. \end{aligned} \quad (2)$$

На поверхности стержней, которые для общности получаемых результатов будем считать импедансными, должно выполняться

следующее граничное условие [7]:

$$\frac{\partial^2 \Pi_z}{\partial z^2} = -i\omega\varepsilon Z \frac{\partial \Pi_z}{\partial r}, \quad r_j = a, \quad (3)$$

где Z — поверхностный импеданс элементов структуры.

Учитывая что граничные условия должны быть справедливы для каждого члена ряда (2) в силу единственности разложения функции в ряд Фурье, из (3) получим бесконечную систему однородных алгебраических уравнений относительно коэффициентов P_m . Приравняв нулю определитель системы, придем к дисперсионному уравнению, определяющему собственные волны рассматриваемой многопроводной системы. Анализ таких выражений затруднен их громоздкостью в случае большого числа элементов. Для того чтобы записать их в виде, пригодном для аналитического рассмотрения, прибегнем к упрощениям.

Учитывая, что нами рассматривается двумерно-периодическая структура, имеющая период d , полагая, что число элементов $F \rightarrow \infty$, и считая структуру достаточно частой ($d \ll \lambda$), а элементы тонкими ($a \ll d$), преобразуем второе слагаемое в выражении (2). Для этого введем переменную $l = fd$ и запишем для $r_j < d$

$$\begin{aligned} & \sum_{\substack{f=1 \\ f \neq j}}^F \sum_{s=-\infty}^{\infty} P_{mf} e^{i(m-s)\theta_{fj}} H_{m-s}^{(2)}(\vartheta d_{fj}) J_m(\vartheta r_j) \\ & = J_m(\vartheta r_j) \frac{\alpha}{\vartheta^2} \int_0^{2\pi} \int_d^{\infty} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i(m-s)\theta_{fj}} P_{mf}(l) H_{m-s}^{(2)}(\vartheta l) \vartheta l d\theta_{fj} d(\vartheta l). \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь $P_{mf}(l)$ — непрерывная функция, зависящая от l ; $l dl d\theta_{fj} = dS$ — элемент площади; α — плотность размещения проводов, в случае периодической системы равная d^{-2} . Данное преобразование назовем континуальным приближением в описании поля, переизлученного элементами структуры за исключением j -го стержня, который будем считать опорным.

Несмотря на то что решается задача определения собственных волн структуры, в обоснование перехода (4) необходимо высказать некоторые соображения относительно поведения функции $P_{mf}(l)$. Для

достаточно частой, бесконечно протяженной в поперечном направлении структуры можно допустить, что она удовлетворяет условиям

$$P_{mf}(\infty) \rightarrow 0, \quad \frac{dP_{mf}}{dl} \rightarrow 0, \quad (5)$$

т. е. считаем $P_{mf}(l)$ ограниченной, непрерывной и медленно меняющейся. Физически при решении задачи возбуждения условия (5) означали бы, что структура облучается локальным источником, погруженным в среду. При этом, считая функцию $P_{mf}(l)$ зависящей только от l , мы не учитываем возможную неравномерность в возбуждении элементов. Однако информация о характере пространственного распределения проводов при этом остается неизменной, поскольку сохраняются фактически неизменными члены $H_{m-s}^{(2)}(\vartheta d_{fj})$, $J_m(\vartheta r_j)$. Тем же самым остается и суммарное поле, создаваемое $F - 1$ элементами структуры, так как мы приравниваем $\sum = \int$. Что же касается изменения пространственной зависимости P_{mf} в (4), то она нас, вообще говоря, не будет интересовать при выполнении (5), лишь бы с исходными совпадали начальное $P_{mf}(d)$ и конечное $P_{mf}(\infty)$ значения функции.

Можно сказать, что в результате таких преобразований сохраняется информация об амплитудно-фазовых соотношениях между полем опорного провода и полем, переизлученным остальной частью структуры, причем имеющих место только для d - окрестности опорного провода и не зависящих от азимутальной координаты (усредненных по ней).

Учитывая, что $\int_0^{2\pi} e^{i(m-s)\theta_{fj}} d\theta_{fj} = \begin{cases} 0 & s \neq m \\ 2\pi & s = m \end{cases}$, запишем подынтегральный член в (2) в следующем виде:

$$L_m = H_m^{(2)}(\vartheta r_j) P_{mj} + \frac{2\pi J_m(\vartheta r_j) \alpha}{\vartheta^2} \int_d^\infty P_{mf}(l) H_0^{(2)}(\vartheta l) \vartheta l d(\vartheta l). \quad (6)$$

Физически преобразования (4), (6) соответствуют трансформации исходной структуры в модель, представляющую собой систему из двух объектов — непрерывную среду с цилиндрическим вырезом радиусом d , в центре которого располагается опорный провод. Точка наблюдения поля находится между этим проводом и средой, т. е. $a \leq r_j \leq d$.

Для определения неизвестных коэффициентов в (6) запишем аналогичное уравнение относительно произвольного f -го провода, располо-

женного на минимальном расстоянии d от j -го в исходной структуре:

$$L_m = H_m^{(2)}(\vartheta r_f) P_{mf} + \frac{2\pi J_m(\vartheta r_f) \alpha}{\vartheta^2} \int_d^\infty P_{mj}(l) H_0^{(2)}(\vartheta l) \vartheta l d(\vartheta l). \quad (7)$$

Коэффициенты $P_{mj,f}$ в (6) и (7) являются значениями соответствующих функций $P_{mj,f}(l)$ при $l = d$.

Интегрируя (6) и (7) по частям и пренебрегая в соответствии с (5) интегральными слагаемыми, получаем

$$L_{mj,f}(\vartheta r_{j,f}) = H_m^{(2)}(\vartheta r_{j,f}) P_{mj,f} - \frac{2\pi \alpha}{\vartheta^2} J_m(\vartheta r_{j,f}) P_{mf,j} H_1^{(2)}(\vartheta d) \vartheta d. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (3), записанное для двух элементов структуры, и учитывая, что провода являются тонкими, что позволяет пренебречь всеми гармониками, кроме нулевой (отсутствие асимметрии в распределении токов в проводах), приходим к следующей системе двух уравнений:

$$\vartheta \left[H_0^{(2)}(\vartheta a) P_{0,j,f} - \frac{2\pi \alpha}{\vartheta^2} P_{0,f,j} H_1^{(2)}(\vartheta d) \vartheta d \right] = -i\omega \varepsilon Z P_{0,j,f} H_0^{(2)'}(\vartheta a),$$

где $j, f = 1, 2, j \neq f, J_0(\vartheta a) \approx 1, H_0^{(2)'}(\vartheta a)$ — производная по радиальной координате.

Приравняв нулю определитель данной системы

$$(\vartheta H_0^{(2)}(\vartheta a) + i\omega \varepsilon Z H_0^{(2)'}(\vartheta a)) \mp \left(\frac{2\pi \alpha}{\vartheta} H_1^{(2)}(\vartheta d) \vartheta d \right) = 0, \quad (9)$$

получаем записанное в континуальном приближении дисперсионное уравнение, определяющее собственные волны в исходной структуре.

Вновь принимая во внимание, что элементы тонкие, а структура частая, можем допустить $|\vartheta a| \ll 1, |\vartheta d| \ll 1$ и использовать приближенные выражения

$$H_0^{(2)}(\vartheta a) \approx 1 + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \vartheta a}, \quad H_0^{(2)'}(\vartheta d) \approx -\frac{2i}{\pi \vartheta d}, \quad \gamma = 1.78.$$

Представим одно из (9), соответствующее знаку „+“ в виде

$$(\vartheta a)^2 \left(1 + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma \vartheta a} \right) = \frac{2i}{\pi} (ka \operatorname{Im} Z_n - 2\pi\alpha a^2 + ika \operatorname{Re} Z_n). \quad (10)$$

В этом выражении учтено, что $i\omega\varepsilon Z = ik(\operatorname{Re} Z_n + i\operatorname{Im} Z_n)$, где Z_n — нормированный импеданс проводов.

Запишем ϑa в виде $|\vartheta a|e^{-i\varphi}$. Подставляя это выражение в (10), получим

$$|\vartheta a|^2 e^{-i2\varphi} \left[1 - \frac{2}{\pi} \varphi + \frac{2i}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma |\vartheta a|} \right] = \frac{2i}{\pi} (ika \operatorname{Re} Z_n - ka \operatorname{Im} Z_n - 2\pi\alpha a^2).$$

Приравнявая действительные и мнимые величины в левой и правой частях этого уравнения, запишем

$$\begin{aligned} |\vartheta a|^2 \left[\left(1 - \frac{2\varphi}{\pi} \right) \cos 2\varphi + \sin 2\varphi \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma |\vartheta a|} \right] &= -\frac{2ka}{\pi} \operatorname{Re} Z_n, \\ |\vartheta a|^2 \left[-\left(1 - \frac{2\varphi}{\pi} \right) \sin 2\varphi + \cos 2\varphi \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{\gamma |\vartheta a|} \right] &= -\frac{2}{\pi} (ka \operatorname{Im} Z_n + 2\pi\alpha a^2). \end{aligned} \quad (11)$$

Таким образом, имеем систему двух уравнений с двумя неизвестными: $|\vartheta a|$ и φ . Эту систему можно решить численными методами, однако мы получим приближенное решение из следующих соображений.

Для идеально проводящих элементов импеданс равен нулю. Считая корень $|\vartheta a| = 0$ не имеющим физического смысла, видим, что решением первого уравнения в (11) является $\varphi = \frac{\pi}{2}$. В случае хорошо проводящих элементов импеданс проводов мал. Тогда представим $\varphi = \pi/2 + \Delta$, где Δ — малая добавка. Разлагая левые части уравнений в системе (11) в ряд по степеням Δ и пренебрегая членами, имеющими порядок Δ^2 и $\Delta|\vartheta a|^2$, получим

$$\Delta |\vartheta a|^2 \ln \frac{2}{\gamma |\vartheta a|} = \frac{1}{2} ka \operatorname{Re} Z_n, \quad |\vartheta a|^2 \ln \frac{2}{\gamma |\vartheta a|} = 2\pi\alpha a^2 + ka \operatorname{Im} Z_n.$$

Функцию $F(\vartheta) = |\vartheta a|^2 \ln \frac{2}{\gamma |\vartheta a|}$ в интервале значений $|\vartheta a| = 0.01 - 0.3$ можно аппроксимировать в виде $F(\vartheta) \approx 0.368|\vartheta|$. Тогда

$$|\vartheta a| = 2.71(2\pi\alpha a^2 + ka \operatorname{Im} Z_n) \text{ и } \Delta = \frac{ka \operatorname{Re} Z_n}{2(2\pi\alpha a^2 + ka \operatorname{Im} Z_n)}.$$

Отсюда окончательно запишем

$$\chi = k \sqrt{1 + \frac{7.38(2\pi a a + k \operatorname{Im} Z_n)^2}{k^2} e^{-i2\Delta}}. \quad (12)$$

Таким образом, собственные волны в многопроводной среде имеют характер распространяющихся вдоль проводов поверхностных волн, фазовая скорость которых меньше скорости света в окружающей среде. Важно, что их формирование определяется не только индуктивным характером импеданса ($\operatorname{Im} Z_n > 0$), но и взаимным влиянием проводов, а следовательно, будет проявляться и для идеально проводящих структур (низкочастотное приближение для металлических проводов). К аналогичным выводам приходят и авторы работы [4], указывая (для конечной проводимости элементов) на необходимость учета замедления волн путем введения поправочных коэффициентов для продольного по отношению к проводам волнового числа, определяемого на основе методов теории гомогенизации. Отметим, что уравнение (9) со знаком „–“ для рассматриваемых параметров структуры (хорошо проводящие стержни, частая структура) физически реализуемых решений не имеет.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 15-47-04315.

Список литературы

- [1] *Degirmenci E., Landais P.* // Appl. Opt. 2013. V. 52. N 30. P. 7367–7375.
- [2] *Liu Y., Bartal G., Zhang X.* // Opt. Express. 2008. V. 16. N 20. P. 15 439–15 448.
- [3] *Simovski C., Belov P., Atrashchenko A., Kivshar Y.* // Adv. mater. 2012. V. 24. P. 4229–4248.
- [4] *Silveirinha M., Belov P., Simovski C.* // Phys. Rev. B. 2007. V. 75. N 3. P. 035108.
- [5] *Wait J.R.* Electromagnetic radiation from cylindrical structures. Oxford: Pergamon Press, 1959.
- [6] *Korn G., Korn T.* Mathematical handbook for scientists and engineers. N.Y.: McGraw-Hill Book Company, 1961.
- [7] *Марков Г.Т., Чаплин А.Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.: Радио и связь, 1983. 464 с.