

08

Электрическое поле и плотность заряда в плоскости квазиравновесного несимметричного двумерного $p-n$ -перехода без тока

© Ю.Г. Пейсахович, А.А. Штыгашев, Л.А. Борыняк, Н.Ю. Петров

Новосибирский государственный технический университет,
630073 Новосибирск, Россия
e-mail: shtygashev@corp.nstu.ru

(Поступило в Редакцию 27 октября 2014 г.)

Задача о распределении потенциала и плотности поверхностного заряда в тонком слое, содержащем квазидвумерный $p-n$ -переход, сведена к решению интегрального уравнения. Реализовано численное решение такого уравнения для несимметричного двумерного $p-n$ -перехода в условиях сильного вырождения и квазиравновесия. Используются граничные условия на линиях пересечения уровня Ферми и порогов подзон размерного квантования. Проанализирована зависимость ширины области обеднения от концентраций примесей и напряжения смещения.

Введение

В последние годы большой интерес исследователей вызывает изучение физических процессов, происходящих в окрестности квазидвумерных $p-n$ -переходов. Такие переходы являются важным элементом существующих и перспективных схем планарной нанозлектроники [1–3]. Их можно создавать методами молекулярно-лучевой эпитаксии в квантоворазмерных пленках на основе арсенида галлия [4], кремния [5] или других соединений на различных подложках либо между слоями диэлектриков, но особенный интерес представляют $p-n$ -переходы в таких недавно открытых двумерных структурах, как графен, графан и прочих родственных системах [1,2]. Двумерные $p-n$ -переходы многими свойствами резко отличаются от своих трехмерных аналогов. Главная особенность заключается в том, что, как в любом двумерном контакте, основную роль здесь играет не объемный, а краевой электродинамический эффект, вызывающий сильное перераспределение зарядов и электрического поля. С этим связаны особые трудности теоретического описания явлений даже в равновесии. При оценке характеристик трехмерного $p-n$ -перехода обычно применяют модель типа плоского конденсатора, краевыми эффектами пренебрегают, уравнение Пуассона, определяющее связь между плотностью зарядов и электрическим потенциалом, становится одномерным и сравнительно легко решается [6]. Двумерный $p-n$ -переход представляет собой линию, разграничивающую плоские области с разным типом легирования, вблизи которой, как вблизи острого проводящего лезвия, возникает сингулярность электрического поля, существенная часть силовых линий поля выходит за пределы плоскости, это поле даже приближенно нельзя описать одномерным уравнением Пуассона. Контактное электрическое поле возникает обычным образом из-за встречной диффузии электронов и дырок, при этом у квазидвумерного контакта происходит сильный изгиб зон и уровней размерного

квантования, так что высота заборного потенциального барьера становится больше ширины запрещенной зоны (рис. 1), электроны и дырки при не слишком высокой температуре образуют сильно вырожденный ферми-газ, а по обе стороны технологического контакта возникают области почти полного обеднения свободными носителями [7]. Вне этих областей происходит экранировка свободными носителями с особенностями, присущими двумерной природе рассматриваемой системы — хотя характерная длина экранировки в сильно вырожденном ферми-газе порядка боровского радиуса a_B , т.е. мала, экранированный потенциал и плотность экранирующего заряда убывают с расстоянием от контакта не по экспоненциальному закону, а более медленно, на асимптоте далеко от областей обеднения — обратно пропорционально расстоянию [7,8].

В работах С.Г. Петросяна, А.Я. Шика [7] и группы С.Г. Петросяна [9] была сформулирована задача расчета координатных зависимостей потенциала и плотности заряда в окрестности строго двумерного $p-n$ -перехода путем решения двумерного уравнения Лапласа вне полупроводниковой пленки с характерными электростатиче-

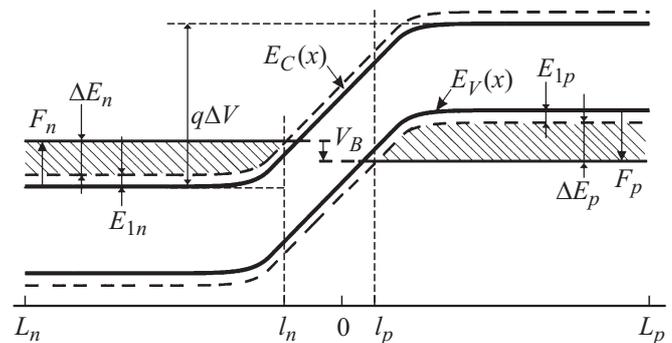


Рис. 1. Координатно-энергетическая диаграмма двумерного $p-n$ -перехода.

скими граничными условиями на ее поверхности. Точное аналитическое решение этой задачи в элементарных или специальных функциях, скорее всего, невозможно, а численное решение двумерного уравнения Лапласа для поставленной задачи представляется весьма непростым и, насколько нам известно, не производилось. В [7–9] предложено применить метод приближенного конформного отображения, т.е. своеобразный вариант теории возмущения в условиях малости отношения боровского радиуса a_B к длине области полного обеднения l . Для случая гипотетического симметричного двумерного p – n -перехода авторам [9] удалось таким методом получить аналитическое выражение для потенциала φ поля в условиях полного обеднения приконтактного слоя в пренебрежении экранировкой, а затем выписать формулу для малой по $a_B/l \ll 1$ поправки, приближенно описывающей экранировку с учетом статистики Ферми для носителей при нулевой температуре, когда имеет место линейная связь между потенциалом и плотностью заряда носителей.

Однако при описании процессов в двумерной пленке нас интересует только тангенциальная составляющая напряженности электрического поля, потенциал и плотность заряда на поверхности пленки. Для нахождения взаимной связи этих величин проще применить метод, основанный на составлении и решении одномерного интегрального уравнения в плоскости пленки [10–12]. Составление такого уравнения не представляет проблемы, позволяя в широких пределах варьировать профиль легирования пленки, асимметрию системы, учитывать разную степень вырожденности электронно-дырочного газа, наличие тока через переход и потенциала смещения. Численное решение этого уравнения может позволить быстрее и проще рассчитать интересующие нас характеристики двумерного p – n -перехода. Существенно, что такой метод не требует предположений о малости параметров типа $a_B/l \ll 1$. В работе Лю и Нью [10] интегральное уравнение для двумерного контакта с зазором между проводниками численно решалось с помощью преобразования Фурье.

В настоящей работе изложены результаты расчетов распределения потенциала и плотности заряда для модели квазиравновесного несимметричного по эффективным массам носителей и концентрациям легирующих примесей двумерного p – n -перехода в приближении Томаса–Ферми для вырожденного электронно-дырочного газа. Под квазиравновесностью мы подразумеваем случай, когда внешнее напряжение отсутствует (равновесие) или является настолько слабым, что током и рекомбинационными процессами в переходе можно пренебречь, а электроны в зоне проводимости и дырки в валентной зоне можно характеризовать квазиуровнями Ферми. Для расчетов предложен сравнительно простой алгоритм прямого численного решения интегрального уравнения для потенциала.

Постановка задачи

Рассмотрим квазидвумерную полупроводниковую пленку, расположенную в плоскости $z = 0$, легированную в отрицательной полуплоскости $x < 0$ донорами, а в положительной полуплоскости $x > 0$ — акцепторами. Вблизи $x = 0$ после выравнивания химических потенциалов электронов F_n и дырок F_p образуется область, обедненная поверхностными носителями заряда, с контактной разностью потенциалов V_K . В квазиравновесном случае величины F_n и F_p являются квазиуровнями Ферми, их разность равна напряжению смещения $V_B = F_p - F_n$, а полная разность потенциалов $\Delta V \equiv \varphi(-\infty) - \varphi(\infty) = V_K - V_B$.

В плоскости проводящей пленки поверхностная плотность заряда, зависящая от потенциала $\varphi(x)$, равна

$$\sigma(x) = q(p(x) - n(x) + N_{SD}\theta(-x) - N_{SA}\theta(x)), \quad (1)$$

где q — элементарный заряд, N_{SD} — поверхностная концентрация доноров при $x < 0$, N_{SA} — поверхностная концентрация акцепторов при $x > 0$, $\theta(x)$ — функция Хевисайда, $n(x)$, $p(x)$ — двумерные концентрации электронов и дырок [8]

$$n(x) = v_n kT \ln(1 + \exp((F_n - E_{1n} + q\varphi(x))/kT)), \quad (2)$$

$$p(x) = v_p kT \times \ln(1 + \exp((F_p - E_{1p} - q(\varphi(x) + \Delta V))/kT)), \quad (3)$$

где $m_{n,p}$ и $F_{n,p}$ — эффективные массы и уровни (или квазиуровни) Ферми, а $v_{n,p} = m_{n,p}/\pi\hbar^2$ — двумерные плотности состояний электронов в зоне проводимости и дырок в валентной зоне; $E_{1n,1p} = \pi^2\hbar^2/2m_{n,p}d^2$ — первые уровни размерного квантования в полупроводниковой пленке толщины d для электронов и дырок, $\varphi(-\infty) = 0$.

При температуре значительно ниже температуры вырождения выражения для концентраций $n(x)$, $p(x)$ упрощаются

$$n(x) = v_n (F_n - E_{1n} + q\varphi(x))\theta(l_n - x), \quad (4)$$

$$p(x) = v_p (F_p - E_{1p} - q(\varphi(x) + \Delta V))\theta(x - l_p), \quad (5)$$

а $N_{SD} = v_n \Delta E_n$, $N_{SA} = v_p \Delta E_p$, где $\Delta E_n = F_n - E_{1n}$, $\Delta E_p = F_p - E_{1p}$. В некоторой области $l_n \leq x \leq l_p$ вблизи контакта может произойти полное обеднение свободными носителями. Из рис. 1 видно, что на границах обедненного слоя выполняются условия

$$n(l_n) = 0, \quad p(l_p) = 0, \quad (6)$$

что определяет значение потенциала на таких границах

$$\begin{cases} q\varphi(l_n) = E_{1n} - F_n = -\Delta E_n, \\ q\varphi(l_p) = F_p - E_{1p} - q\Delta V = \Delta E_p - q\Delta V. \end{cases} \quad (7)$$

В плоскости проводящей пленки S потенциал подчиняется интегральному уравнению

$$\varphi(\mathbf{r}) = (4\pi\epsilon_0\epsilon)^{-1} \int_S \sigma(\mathbf{r}') |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} dS' + \varphi_{\text{out}}(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Здесь $\sigma(\mathbf{r}') = \sigma(x)$, $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$, $dS' = dx'dy'$, ϵ — диэлектрическая проницаемость окружающей среды, $\varphi_{\text{out}}(\mathbf{r})$ — потенциал внешних источников. При решении интегрального уравнения (8) соотношения (6) и (7) выполняют роль граничных условий для плотности заряда и потенциала, они должны согласовываться с условием непрерывности потенциала. В общем случае $N_{SD} \neq N_{SA}$, $m_n \neq m_p$ и $|l_n| \neq |l_p|$.

Известно, что плотность заряда $\sigma(x)$ и отклонение потенциала от его значений на бесконечности уменьшаются при $|x| \rightarrow \infty$ по гиперболическому закону $\sim 1/x$ [8]. При реализации численного интегрирования мы можем ограничиться некоторой широкой областью $L_n \leq x \leq L_p$, которая дает основной вклад в интеграл. Значения границ $L_n < 0$, $L_p > 0$ численного интегрирования влево и вправо от перехода выбираются настолько большими ($|L_n|, |L_p| \gg |l_n|, |l_p|$, a_B , где $a_B = 4\pi\epsilon_0\epsilon\hbar^2/q^2m_0$ — эффективный борковский радиус), чтобы они заведомо лежали в областях гиперболической зависимости реальных плотности заряда и потенциала, эти функции легко сшить по непрерывной производной с результатом числового расчета при $|l_{n,p}| \ll |x| \leq |L_{n,p}|$. С ростом $|L_{n,p}| \rightarrow \infty$ вклады краев области интегрирования $|x| \geq |L_{n,p}|$ становятся относительно малы, а результаты вблизи p - n -перехода (ход функций $\varphi(x)$, $\sigma(x)$ и значения l_n, l_p) с логарифмической точностью перестают зависеть от значений $L_{n,p}$.

Удобно сдвинуть уровень отсчета потенциала, заменяя $\varphi(x) \rightarrow \varphi(x) + \Delta V/2$, тогда $\Delta V/2 = \varphi(L_n) \geq \varphi(x) \geq \varphi(L_p) = -\Delta V/2$, после интегрирования по u -координате получаем соотношения

$$\varphi(x) = \frac{V_K}{2} - 2k \int_{L_n}^{L_p} dx' \sigma(x') \{ \ln|x' - x| - \ln|x' - L_n| \}, \quad (9)$$

$$\varphi(x) = -\frac{V_K}{2} - 2k \int_{L_n}^{L_p} dx' \sigma(x') \{ \ln|x' - x| - \ln|x' - L_p| \}, \quad (10)$$

где $k = (4\pi\epsilon_0\epsilon)^{-1}$. Взяв их полусумму и производя обезразмеривание переменных $x \rightarrow x/a_B$, $\varphi \rightarrow 2\varphi/\Delta V$, $\sigma \rightarrow 2\sigma/v_0q^2\Delta V$, получаем симметризованную форму одномерного интегрального уравнения на потенциал:

$$\varphi(x) = -2k \int_{l_n}^{l_p} dx' \sigma(x') K(x, x'), \quad (11)$$

в котором $K(x, x')$ есть функция Грина граничной задачи двумерного оператора Лапласа

$$K(x, x') = \ln|x' - x| - \frac{1}{2} \ln|x' - L_n| - \frac{1}{2} \ln|x' - L_p|, \quad (12)$$

обезразмеренная плотность заряда при достаточно малом смещении равна

$$\sigma(x) = \begin{cases} m_n^*(1 - \varphi(x)), & x < l_n \\ B_{1n}, & l_n < x < 0 \\ -B_{1p}, & 0 < x < l_p \\ m_p^*(-1 - \varphi(x)), & x > l_p \end{cases}, \quad (13)$$

где $B_{1n} = 2N_{SD}/qv_0\Delta V$, $B_{1p} = 2N_{SA}/qv_0\Delta V$, $v_0 = m_0/\pi\hbar^2$, $m_n^* \equiv m_n/m_0$, $m_p^* \equiv m_p/m_0$, $m_0 = 9.1 \cdot 10^{-11}$ kg, условие (7) приобретает вид

$$\begin{cases} \varphi(l_n) = 1 - B_{1n}/m_n^*, \\ \varphi(l_p) = -1 + B_{1p}/m_p^*. \end{cases} \quad (14)$$

Подставляя (13) в (11), имеем слабо сингулярное интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода с ядром $K(x, x')$:

$$\varphi_x - A_{1n} \int_{L_n}^{l_n} s d\varphi(s) K(x, s) - A_{1p} \int_{l_p}^{L_p} ds \varphi(s) K(x, s) = A(x), \quad (15)$$

$$A(x) = -A_{1n}R_0(x, L_n, l_n) - A_{2n}R_0(x, l_n, 0) + A_{2p}R_0(x, 0, l_p) + A_{1p}R_0(x, l_p, L_p), \quad (16)$$

где $R_0(x, a, b) = \int_a^b K(x, x') dx'$, $A_{1n,1p} = A_0 m_{n,p}^*$, $A_{2n,2p} = A_0 B_{1n,1p}$, $A_0 = 2kq^2v_0a_B$. Решая численно уравнение (15) с граничными условиями (14), можно найти значения l_n и l_p , а также функции $\varphi(x)$, $E(x)$, $\sigma(x)$.

Результаты численного расчета

Равновесный несимметричный p - n -переход

В отсутствие смещения $\Delta V = V_K$ контактная разность потенциалов дается выражением

$$\begin{aligned} qV_K &= E_g + |E_{1n}| + |E_{1p}| + \Delta E_n + \Delta E_p \\ &= E_g + v_n^{-1}(0.5d^{-2}\pi + N_{SD}) + v_p^{-1}(0.5d^{-2}\pi + N_{SA}). \end{aligned} \quad (17)$$

Для этого случая полученные с помощью метода Нюстрема [13] (см. приложение) результаты решения интегрального уравнения (15) в некоторой области $x_n \leq x \leq x_p$ ($|l_n| \ll |x_n| \leq |L_n|$, $|l_p| \ll |x_p| \leq |L_p|$) представлены на рис. 2, 3. Выбранные значения исходных параметров достаточно произвольны, так как в пленках субатомной толщины энергетический спектр и величины

эффективных масс носителей сильно зависят от направления кристаллографических осей пленки, значительно отличаются от объемных и, как правило, неизвестны (мы взяли $N_{SA} > N_{SD}$ и $m_n > m_p$).

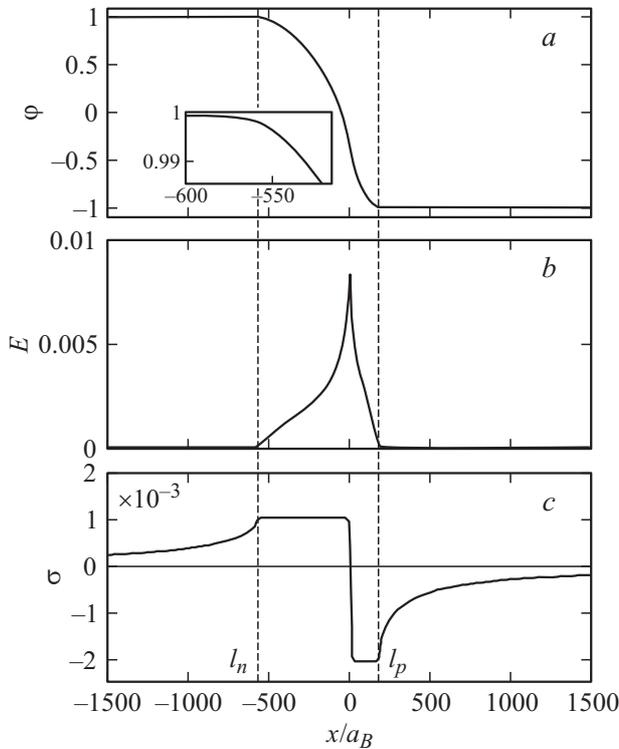


Рис. 2. Распределение потенциала φ (a), тангенциальной компоненты напряженности электрического поля E (b) и поверхностной плотности заряда σ (c) вблизи несимметричного перехода при расчетных параметрах: $N_{SA} = 5.0 \cdot 10^{15} \text{ м}^{-2}$, $N_{SD} = 0.5N_{SA}$, $L_n = -1.36 \cdot 10^4 a_B$, $L_p = 1.35 \cdot 10^4 a_B$, $m_n = 0.916m_0$, $m_p = 0.450m_0$, $d = 5 \text{ нм}$, $\varepsilon = 11.8$.

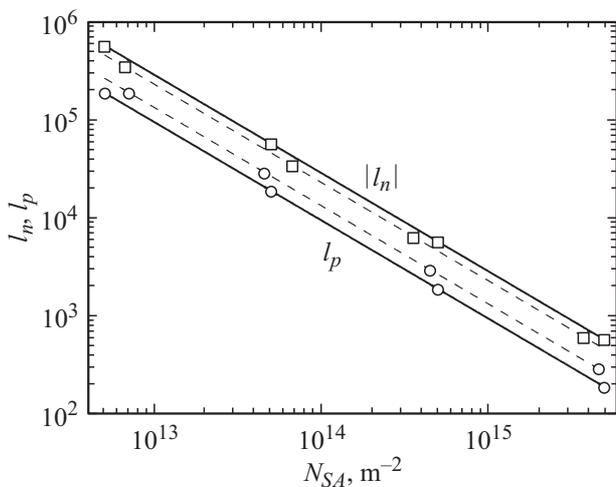


Рис. 3. Ширины областей полного обеднения $|l_n|$ (сплошная линия с квадратами) и l_p (сплошная с кружками) в зависимости от концентрации легирующей примеси N_{SA} при $N_{SD}/N_{SA} = 0.5$, полученные численным решением (11) (аналогичные штриховые линии — графики (23)).

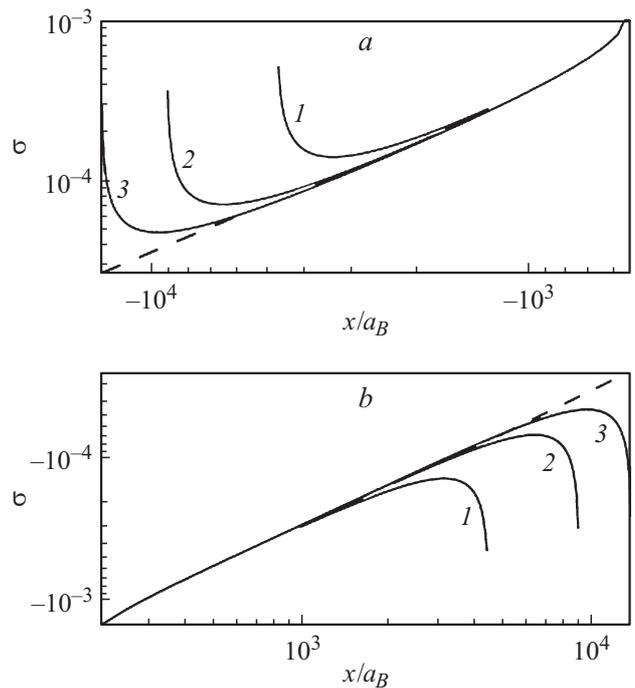


Рис. 4. То же, что на рис. 2 с в двойном логарифмическом масштабе для областей: a — левее l_n , b — правее l_p при (1) — $L_n = -4.17 \cdot 10^3 a_B$, $L_p = 3.90 \cdot 10^3 a_B$, (2) — $L_n = -9.12 \cdot 10^3 a_B$, $L_p = 8.93 \cdot 10^3 a_B$, (3) — $L_n = -1.36 \cdot 10^4 a_B$, $L_p = 1.35 \cdot 10^4 a_B$.

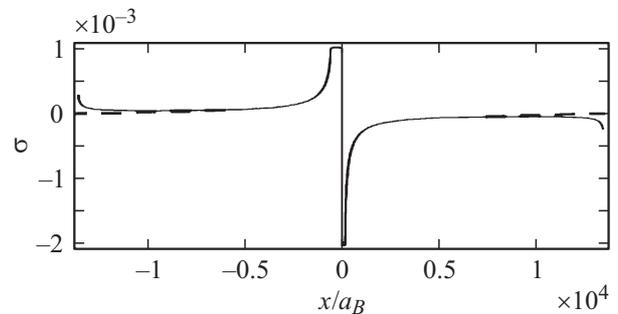


Рис. 5. То же, что на рис. 2, c во всей расчетной области $L_n = -1.36 \cdot 10^4 a_B$, $L_p = 1.35 \cdot 10^4 a_B$, штриховой линией показана гиперболическая асимптотика распределения заряда.

В развиваемом подходе вместо бесконечных пределов интегрирования мы вводим конечные пределы $L_{n,p}$. Такая операция означает приближенную замену исходной задачи задачей с другими граничными условиями, что приводит к заметной погрешности искомой плотности заряда вблизи краев $L_{n,p}$. Однако при увеличении $|L_{n,p}|$ вклады краев области интегрирования $x \sim L_{n,p}$ становятся относительно малыми. Действительно, с ростом $|L_{n,p}|$ вне области полного обеднения (вблизи и внутри которой результаты практически не зависят от $L_{n,p}$) в широком интервале вблизи $x \sim L_{n,p}$ формируются и расширяются участки линейной зависимости $\ln \sigma$ от $\ln x$ (рис. 4), отвечающие гиперболическому закону убыва-

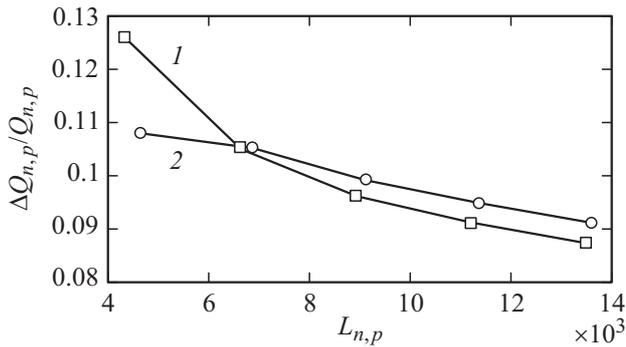


Рис. 6. Изменение относительных погрешностей $\Delta Q_n/Q_n$ в зависимости от $|L_n|$ (1) и $\Delta Q_p/Q_p$ — от L_p (2), соответствующее рис. 4 и 5.

ния плотности поверхностного заряда $\sigma(x) \sim 1/|x - \delta|$ (штриховая прямая), где δ — значение x -координаты „центра зарядов“ эффективного двумерного диполя, которое смещено в сторону наибольшей из величин $|l_n|, |l_p|$. Осуществляя в некоторых точках $x_{n,p}$ этих областей шивание рассчитанной в интервале $x_n \leq x \leq x_p$ функции $\sigma(x)$ с функциями $\tilde{\sigma}_{n,p}(x) = \sigma(x_{n,p}) \left| \frac{x_{n,p} - \delta}{x - \delta} \right|$, можно получить описание искомых величин на всей длине системы (рис. 5).

Производя для p - и n -областей численный расчет линейных плотностей зарядов

$$Q_n = \int_{l_n}^{x_n} \tilde{\sigma}_n(x) dx + \int_{x_n}^0 \sigma(x) dx,$$

$$Q_p = \int_0^{x_p} \sigma(x) dx + \int_{x_p}^{L_p} \tilde{\sigma}_p(x) dx \quad (18)$$

и разностей

$$\Delta Q_n = \int_{l_n}^{x_n} (\sigma(x) - \tilde{\sigma}_n(x)) dx,$$

$$\Delta Q_p = \int_{x_p}^{L_p} (\sigma(x) - \tilde{\sigma}_p(x)) dx, \quad (19)$$

получаем относительные погрешности, связанные с введением конечных пределов числового интегрирования. Очевидно, что с ростом $|L_n|$ и L_p они должны убывать по закону $\Delta Q_n/Q_n \sim 1/\ln |L_n|$ и $\Delta Q_p/Q_p \sim 1/\ln L_p$. Такое поведение демонстрирует рис. 6.

Поскольку $Q_{n,p}$, как и электрическая емкость, логарифмически расходятся с увеличением длин $|L_n|, L_p$, то из рис. 4, 5 видно, что без пришивания гиперболических „хвостов“ для использованных длин расчетных областей $L_{n,p} \approx 1.4 \cdot 10^4$ краевые погрешности $\Delta Q_{n,p}/Q_{n,p}$, величины $\sigma \sim 10^{-4}$ могут еще достигать 10%, однако для потенциала погрешность вычисления величины $1 - \varphi(x) \approx \sigma(x)/m_{n,p}^*$ в этой области всего около 0.1%.

Квазиравновесный несимметричный $p-n$ -переход

При включении небольшого потенциала смещения V_B величина $\Delta V = V_K - V_B$ является независимым параметром. Пока $l_n < 0, l_p > 0$ результаты расчетов качественно аналогичны приведенным на рис. 3–5. С увеличением положительного смещения V_B ширины областей обеднения $|l_{n,p}|$ уменьшаются сначала практически по линейному закону (рис. 7). Такое поведение $|l_{n,p}|$, как и зависимость $|l_{n,p}|$ от $N_{SD,SA}$ (рис. 4), качественно согласуется с зависимостью, предсказываемой формулой

$$|l_{n,p}| = \frac{\epsilon_0 \epsilon \Delta V}{q N_{SD,SA}}, \quad (20)$$

полученной в работах [7–9] в рамках приближенного конформного преобразования. Однако для несимметричного $p-n$ -перехода наклон расчетных линий на графиках (рис. 3 и 6) несколько отличается от предсказываемых (20), в то время как для модели симметричного $p-n$ -перехода при не слишком больших концентрациях примесей количественное согласие с (20) более удовлетворительное [12].

При $\Delta V \ll V_K$ зависимость $|l_{n,p}|$ от ΔV становится нелинейной. Если $N_{SA} > N_{SD}$ и $l_n < l_p < 0$, область

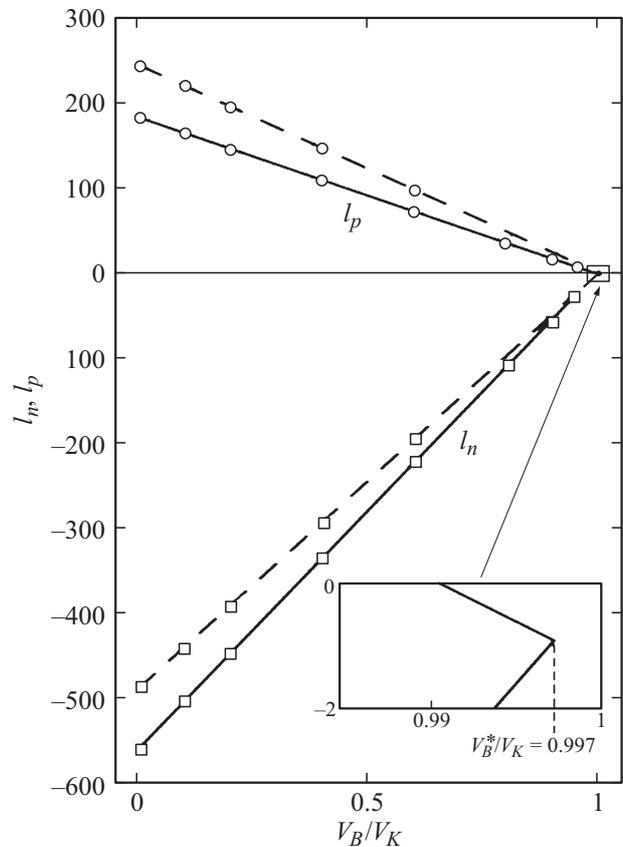


Рис. 7. Зависимость ширин областей полного обеднения l_n и l_p от напряжения смещения V_B при $N_{SD}/N_{SA} = 0.5$, штриховыми линиями показаны графики l_n, l_p , рассчитанные по (23).

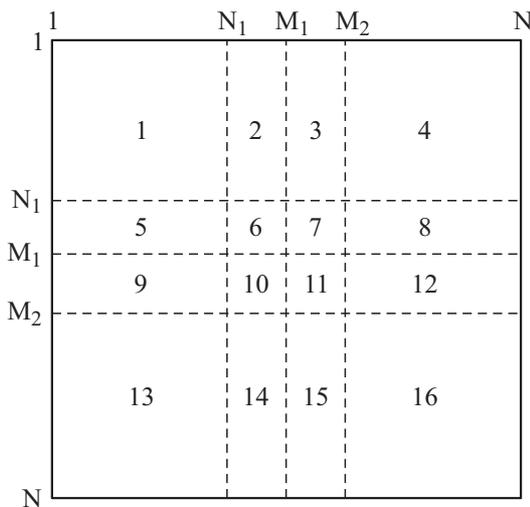


Рис. 8. Структура матрицы D .

полного обеднения оказывается слева от технологического перехода, в уравнение (11) вместо (13) следует подставить обезразмеренную плотность заряда в виде

$$\sigma(x) = \begin{cases} m_n^*(1 - \varphi(x)), & x < l_n \\ B_{1n}, & l_n < x < l_p, \\ m_p^*(-1 - \varphi(x)) + B_{1n} + B_{1p}, & l_p < x < 0, \\ m_p^*(-1 - \varphi(x)), & x > 0 \end{cases}$$

и в (15) надо очевидным образом изменить правую часть. При этом скачок плотности заряда при $x = 0$ остается неизменным $\Delta\sigma(0) = \sigma(-0) - \sigma(+0) = B_{1n} + B_{1p}$. Условия (14) сохраняют свой вид, из них следует, что при смещении, равном $V_B^* \equiv V_K - \Delta V^*$, где

$$\Delta V^* = \frac{\pi\hbar^2}{q} \left(\frac{N_{SD}}{m_n} + \frac{N_{SA}}{m_p} \right),$$

область полного обеднения исчезает $l_n = l_p$ (врезка на рис. 7, при характерных расчетных параметрах системы $\Delta V^* \sim 10^{-3}V_K \ll V_K$ и $l_n = l_p \sim a_B$ малы). После исчезновения области полного обеднения начинаются интенсивные кинетические процессы (рекомбинация носителей, ток через переход и т.д.), и задача перестает быть квазиравновесной.

Заключение

В настоящей работе разработан и апробирован основанный на решении интегрального уравнения численный алгоритм самосогласованного расчета распределения потенциала и поверхностной плотности заряда вблизи квазиравновесного несимметричного двумерного p - n -перехода при произвольных значениях ширины области полного обеднения $l_{n,p}$. Алгоритм позволяет проверить и уточнить результаты подхода, ос-

нованного на решении двумерного уравнения Лапласа методом приближенного конформного отображения, поскольку не требует соблюдения сильных неравенств $a_B/|l_n| \sim a_B/|l_p| \ll 1$. В квазиравновесной области вплоть до исчезновения интервала полного обеднения рассчитаны зависимости величин $l_{n,p}$ от концентрации легирующих примесей и положительного потенциала смещения. Развиваемый метод расчета потенциала и плотности заряда пленки, основанный на составлении и решении одномерного интегрального уравнения, заменяющего уравнение Пуассона, может быть обобщен на неравновесный случай для систем с ненулевой температурой, разной степенью вырожденности электронно-дырочного газа, различными профилями легирования, асимметрии системы, с учетом процессов рекомбинации и наличия тока через переход.

Авторы благодарны М.В. Энтину за обсуждение постановки задачи и результатов работы. Работа авторов Ю.П. Пейсаховича и А.А. Штыгашева, выполнена в рамках реализации государственного задания Министерства образования и науки РФ, проект № 3.338.2014/К.

Приложение

Метод Нюстрема [13] позволяет представить уравнение (15) в виде системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^N D_{ji} \varphi_i = B_j \quad (П1)$$

относительно вектора-столбца значений функции $\{\varphi_j\}_1^N$, определенного на координатной сетке $\{x_i : x_i = L_n + i\Delta x_n, i = 1 \dots M_1, x_{i+M_1} = i\Delta x_p, i = 1 \dots N - M_1\}$ с шагом $\Delta x_n = |L_n|/M_1$ при $x < 0$ и $\Delta x_p = L_p/(N - M_1)$ при $x > 0$. Матрица D имеет блочную структуру, показанную на рис. 8.

На рис. 8: 2, 3, 7, 10, 14, 15 — нулевые блоки, блоки 6, 11 — единичные матрицы, в блоках 1, 5, 9, 13 элементы матрицы равны

$$D_{ji} = \delta_{ji} - A_{2n} v_{ji} / \Delta x_n, \quad (П2)$$

а в блоках 4, 8, 12, 16 — равны

$$D_{ji} = \delta_{ji} - A_{2p} v_{ji} / \Delta x_p, \quad (П3)$$

где δ_{ji} — символы Кронекера. Удобно обозначить

$$R_s(x, a, b) = J_s(x, a, b) - \frac{1}{2} J_s(L_n, a, b) - \frac{1}{2} J_s(L_p, a, b), \quad s = 0, 1, 2, \quad (П4)$$

$$\begin{aligned}
 J_0(x, a, b) &= \int_a^b dx' \ln |x - x'|, \\
 J_1(x, a, b) &= \int_a^b dx' (b - x') \ln |x - x'|, \\
 J_2(x, a, b) &= \int_a^b dx' (x' - a) \ln |x - x'|, \quad (\text{П5})
 \end{aligned}$$

тогда матричные элементы даются выражениями

$$\begin{aligned}
 v_{j,i} &= R_2(x_j, x_{i-1}, x_i) + R_1(x_j, x_i, x_{i+1}), \\
 v_{j,0} &= R_1(x_j, x_0, x_1), \\
 v_{j,N_1} &= R_2(x_j, x_{N_1-1}, x_{N_1}), \\
 v_{j,M_2} &= R_1(x_j, x_{M_2}, x_{M_2+1}), \\
 v_{j,N} &= R_2(x_j, x_N, x_{N+1}), \quad (\text{П6})
 \end{aligned}$$

а величины B_j — выражениями

$$\begin{aligned}
 B_j &= A(x_j) + A_{2n} R_1(x_j, x_0, x_1) / \Delta x_n \\
 &\quad - A_{2p} R_1(x_j, x_N, x_{N+1}) / \Delta x_p. \quad (\text{П7})
 \end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Peng Q., Dearden A.K., Crean J., Han L., Liu S., Wen X., De S. // *Nanotechnol. Sci. Appl.* 2014. Vol. 7. P. 1–29.
- [2] Ghrekhanlou B., Khorasani S. // *IEEE T. Electron Dev.* 2010. Vol. 57. N 1. P. 209–214.
- [3] Ghrekhanlou B., Khorasani S., Sarvari R. // *Mat. Res. Express.* 2014. Vol. 1. P. 015 604.
- [4] Kaestner B., Wunderlich J., Hasko D.G., Williams D.A. // *Microelectron. J.* 2003. Vol. 34. P. 423–425.
- [5] Mizuno T., Nakahara Y., Nagata Y., Suzuke Y., Aoki T., Sameshima T. // *Jpn J. Appl. Phys.* 2014. Vol. 53. P. 04EC08.
- [6] Бонч-Бруевич В.Л., Калашиников С.Г. *Физика полупроводников*. М.: Наука, 1990. 688 с.
- [7] Петросян С.Г., Шик А.Я. // *ЖЭТФ*. 1989. Т. 96. № 6. С. 2229–2239.
- [8] Шик А.Я. // *ФТП*. 1995. Т. 29. Вып. 8. С. 1345–1381.
- [9] Ачоян А.Ш., Есаян А.Э., Казарян Э.М., Петросян С.Г. // *ФТП*. 2002. Т. 36. Вып. 8. С. 969–973.
- [10] Liu X., Niu Q. // *Phys. Rev.* 1992. Vol. 46. N 16. P. 10215–10220.
- [11] Ковалевский Д.В., Кучма А.Е. // *Вестник Санкт-Петербургского университета*. Сер. 4. 2008. Вып. 3. С. 20–26.
- [12] Пейсахович Ю.Г., Штыгашев А.А., Борыняк Л.А., Петров Н.Ю. // *Научный вестник НГТУ*. 2013. № 4(53). С. 97–104.
- [13] Atkinson K.E. *The numerical solution of integral equation of the second kind*. Cambridge: Cambridge University Press, 1997. 571 p.