

03

## Кризис, вызванный внешней силой в вихреисточнике, истекающем в вакуум

© А.Н. Кучеров

Центральный аэрогидродинамический институт им. проф. Н.Е. Жуковского,  
140180 Жуковский, Московская область, Россия  
e-mail: ank@aerocentr.msk.su, ank19512006@rambler.ru

(Поступило в Редакцию 10 февраля 2015 г.)

В режиме истечения вихреисточника в вакуум изучен кризис, вызванный внешней силой: торможение потока до радиального числа Маха, равного единице. Исследованы зависимости критических характеристик (критического радиуса, температуры, скорости) от циркуляции газа  $\Gamma$  в двух ситуациях: при постоянной функции распределения внешней силы и при постоянном давлении в зоне действия силы. Показано сохранение адиабатической связи между давлением, температурой и плотностью. Найдены явные аналитические решения внутри зоны при  $\Gamma = 0$  и неявные при  $\Gamma > 0$ . В случае однородного распределения внешней силы установлено преобладающее влияние интеграла силы (работы) на критические характеристики и независимость от начальных параметров — координаты зоны, температуры на входе и других. В случае постоянного давления построены области реализации кризиса в пространстве параметров подобия: силового, циркуляции, начальных координаты и температуры.

### Введение

В газовой динамике [1], которая есть раздел физики, в частности механики сплошной среды [2], одними из интересных и важных физических процессов являются ударные волны [3]. Причина образования ударных волн или скачков уплотнения в том, что при некоторых скоростях одномерного (квазиодномерного) течения расход газа не может быть выполнен в стационарных условиях. В скачке уплотнения возрастают давление, температура, плотность газа, падают скорость и число Маха. Появление ударных волн связано также с переходом потока через скорость звука, в том числе в многомерных течениях [4,5]. В трансзвуковом потоке ударные волны могут быть вызваны малыми возмущениями, например, слабым теплоподводом [6–8]. Теплоподвод в строго одномерном стационарном потоке приводит к изменению числа Маха: в дозвуковом потоке увеличиваются скорость и число Маха (приближается к единице), в сверхзвуковом потоке скорость и число Маха снижаются (последнее удаляется от единицы). Переход через скорость звука невозможен в стационарном одномерном потоке [9–11], явление называют тепловым кризисом.

Стационарный поток, зависящий от одной координаты — радиуса, возможен также в сферически или в цилиндрически симметричном случае [12–14]: источник, сток, вихреисточник, вихресток. Теплоподвод, распределенный в некотором интервале координаты, меняет число Маха, в пределе до значения единица наступает кризис [7,8,15]. Отличительной особенностью квазиодномерных сферического источника и цилиндрического вихреисточника является наличие сверхзвуковых ветвей решения в вакуум I, из вакуума IV и двух дозвуковых — в затопленное пространство II и из затопленного про-

странства III [15]. Нумерация позволяет сокращать и упрощать изложение сути, не повторяя названия ситуаций и вариантов, количество которых по сравнению с чисто одномерным случаем [9,10] возрастает более чем в 10 раз.

В случае приложения внешней силы, заданной, например, на единицу массы или в единицу объема в некотором интервале значений координаты, изменение числа Маха за счет ускорения потока в дозвуковых режимах или за счет торможения потока в сверхзвуковых режимах приводит к кризису. Исследованию кризиса, вызванного действием внешней силы на источник (вихреисточник), посвящена настоящая работа. Количество вариантов возрастает, анализ кризиса с учетом и теплоподвода усложняется. Как и в задачах с тепловым кризисом, начнем с простых ситуаций, постепенно усложняя и расширяя область применения. Выделение простых вариантов позволяет определить присущие той или иной ситуации особенности поведения критических параметров, силовых, энергетических, геометрических, газодинамических, термодинамических. Постепенный переход от модели совершенного газа к физическим моделям, более близким к реальным, и геометрическим условиям позволяет выделять влияние конкретных факторов. На практике такие ситуации, течения, варианты встречаются как фрагменты более сложных многомерных течений, с более точным уравнением состояния и свойствами газа, зависящими от температуры и других газодинамических величин.

Особый интерес представляют границы возможности и реализации кризиса. В закритической области параметров подобия от области возмущений побегут волны, возможно образование ударных волн, изменение конфигурации течений, установление или неустановление новых газодинамических величин [16].

## Постановка задачи

Предположим, что на бесконечности в вариантах с затопленным пространством плотность равна  $\rho_{0n}$ , давление  $p_{0n}$ , температура  $T_{0n}$ , полная энтальпия  $H_{0n} = h_{0n} = \gamma p_{0n} / [(\gamma - 1)\rho_{0n}] = C_p T_{0n}$ , где  $\gamma$  — постоянная адиабаты,  $C_p$  — теплоемкость при постоянном давлении. Рассмотрим сверхзвуковой режим I, в котором скорость на бесконечности равна максимальной  $u_{0n} = (2h_{0n})^{1/2}$ . Величины  $\rho_{0n}$ ,  $p_{0n}$ ,  $T_{0n}$ ,  $h_{0n}$ ,  $u_{0n}$  выберем за характерные, за характерный размер примем минимальный радиус  $r_0$ , при котором радиальное число Маха равно единице. Уравнения сохранения массы, импульса, энергии и уравнение состояния запишем для плоского вихреисточника в цилиндрически симметричном варианте в следующем виде [15]:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr} + \frac{1}{u} \frac{du}{dr} + \frac{1}{r} = 0, \quad r\rho u = m \equiv \frac{m_0}{2\pi\rho_{0n}u_{0n}r_0}, \quad (1)$$

$$u \frac{du}{dr} + \frac{\gamma - 1}{2\gamma\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{v^2}{2} + \frac{F(r)}{2\rho},$$

$$F(r) = \begin{cases} F_E f_E(r), & F_E = \frac{\varphi_{0E} r_0}{\rho_{0n} h_{0h}}, & F_Q = \frac{\varphi_{0Q} r_0}{h_{0h}}, \\ \rho F_Q f_Q(r), & \end{cases} \quad (2)$$

$$vr = \Gamma = \frac{\Gamma_0}{2\pi r_0 u_{0n}}, \quad (3)$$

$$\frac{dT}{dr} - \frac{\gamma - 1}{\gamma\rho} \frac{dp}{dr} = \frac{g(r)}{\rho u},$$

$$g(r) = \begin{cases} E g_E(r), & E = \frac{e_0 r_0}{\rho_{0n} u_{0n} h_{0h}}, & Q = \frac{q_0 r_0}{u_{0n} h_{0h}}, \\ \rho(r) Q g_Q(r), & \end{cases} \quad (4)$$

$$\int_{r_b}^{r_{ex}} \frac{f_E(r)}{\rho} dr = 1 = \int_{r_b}^{r_{ex}} f_Q(r) dr,$$

$$\int_{r_b}^{r_{ex}} g_E(r) r dr = 1 = \int_{r_b}^{r_{ex}} \rho g_Q(r) r dr, \quad p = \rho T. \quad (5)$$

Здесь  $m_0$ ,  $\Gamma_0$  — физические размерные расход и циркуляция,  $m$  и  $\Gamma$  — соответствующие безразмерные параметры подобия, связанные соотношением  $m(\Gamma) = \{(\gamma - 1)/2[2/(\gamma + 1)(1 - \Gamma^2)]^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}\}^{1/2}$ . Силовые параметры подобия  $F_E$ ,  $F_Q$  определяются физическими  $\varphi_{0E}$ ,  $\varphi_{0Q}$ , заданными в единицу объема или на единицу массы (приняли  $\varphi_{0E} = \rho_{0n}\varphi_{0Q}$ ). Энергетические параметры  $E$ ,  $Q$  задаются удельными величинами энерговыделения  $e_0$ ,  $q_0$  в единицу объема или на единицу массы (приняли  $e_0 = \rho_{0n}q_0$ ), безразмерная полная скорость равна  $V = (u^2 + v^2)^{1/2}$ , где  $u$ ,  $v$  — радиальная и азимутальная составляющие. При выбранной нормировке функций распределения  $f_Q(r)$  и  $g_E(r)$  после интегрирования по интервалу действия внешней силы и теплоподвода  $[r_b, r_{ex}]$  величины  $F_Q$  и  $E$  равны совершенной силой работе и подведенной энергии соответственно.

Ввиду того что плотность  $\rho(r)$  — искомая функция, нормировку  $f_E(r)$  и  $g_Q(r)$  можно делать без  $\rho(r)$  под знаком интегрирования, при этом величины  $F_E$  и  $Q$  количественно не совпадают с работой внешней силы и подведенной энергией.

Критерием кризиса является достижение радиальным числом Маха  $M_r(r)$  значения единица. Скорость звука  $a$ , компоненты  $M_r$ ,  $M_v$  и полное число Маха  $M$  запишем в виде

$$M_r = \frac{u}{a}, \quad M_v = \frac{v}{a}, \quad M = \frac{V}{a}, \quad a = \sqrt{\frac{\gamma - 1}{2}} T. \quad (6)$$

Учитывая интегральные связи, достаточно решить одно дифференциальное уравнение из (1)–(6), например (2), для одной из независимых переменных  $\rho$ ,  $p$ ,  $T$ ,  $M$ ,  $M_r$ ,  $u$ ,  $V$ .

Удобна и полезна эквивалентная система [17,18]

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\gamma p}{1 - M_r^2} \left[ \frac{M^2}{r} + \frac{F(r)}{(\gamma - 1)p} - \frac{M_r^2 g(r)}{up} \right],$$

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho}{1 - M_r^2} \left[ \frac{M^2}{r} + \frac{F(r)}{(\gamma - 1)p} - \frac{g(r)}{up} \right]. \quad (7)$$

В некоторых ситуациях систему (1)–(6) удобно использовать в дивергентной форме [19].

В отсутствие теплоподвода и внешней силы  $F(r) = 0 = g(r)$  справедливо следующее решение уравнений (1)–(6):

$$r^2 = \frac{m^2}{1 - \rho^{\gamma-1}} + \Gamma^2 = \frac{m^2}{T^{2/(\gamma-1)} + \Gamma^2},$$

$$\rho = p^{1/\gamma} = T^{1/(\gamma-1)} = \frac{m}{ru}, \quad v = \frac{\Gamma}{r}. \quad (8)$$

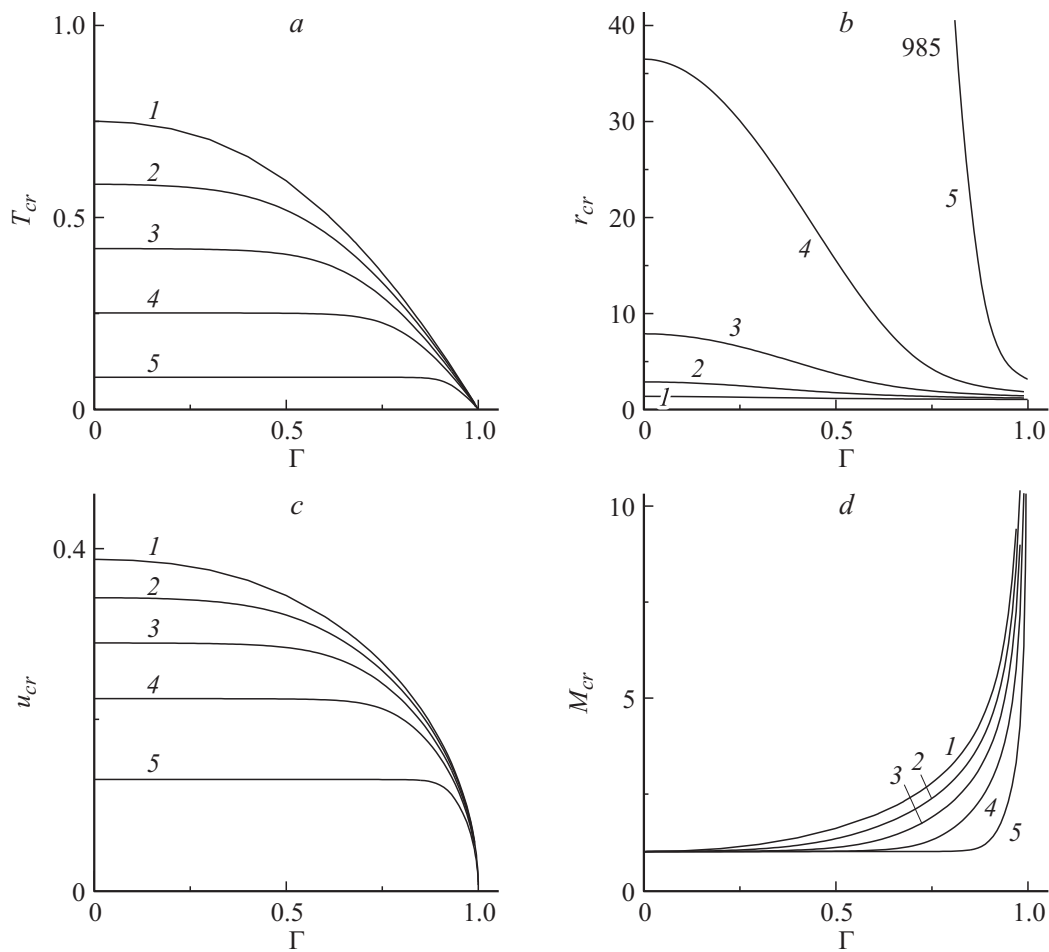
Решение (8) задает начальные условия на входе в зону при  $r = r_b$ : температуру  $T_b$ , числа Маха  $M_{rb}$ ,  $M_{vb}$ ,  $M_b$  и другие величины.

Силовые параметры подобия  $F_E$ ,  $F_Q$  и параметры энергоподвода  $E$ ,  $Q$ , при которых в замыкающем сечении радиальное число Маха  $M_r(r_{ex})$  достигнет значения единица, будем называть критическими:  $F_E = F_{E,cr}$ ,  $F_Q = F_{Q,cr}$  и  $E = E_{cr}$ ,  $Q = Q_{cr}$  при  $M_r(r_{ex}) = 1$ ,  $r_{cr} = r_{ex}$ .

## Кризис, вызванный внешней силой без энергоподвода

Для определенности рассмотрим  $F_Q$ -вариант (удельная сила задана на единицу объема) при  $f_Q(r) = \text{const} = C_Q$ . Значение постоянной дает нормировка при условии, что замыкающее сечение  $r_{ex}$  есть критическое:  $C_Q = 1/(r_{cr} - r_b)$ . В отсутствие теплоподвода из уравнений (4), (5) получим связь между температурой  $T(r)$ , давлением  $p(r)$ , плотностью  $\rho(r)$

$$\rho = p^{1/\gamma} = T^{1/(\gamma-1)}. \quad (9)$$



**Рис. 1.** *a* — критическая температура  $T_{cr}$ , *b* — критические сечения  $r_{cr}$ , *c* — радиальная скорость  $u_{cr}$ , *d* — полное число Маха  $M_{cr}$  как функции циркуляции  $\Gamma$  при различных значениях силового параметра  $F_{Q,cr} = -0.1$  (кривые 1),  $-0.3$  (2),  $-0.5$  (3),  $-0.7$  (4),  $-0.9$  (5).

Эта адиабатическая связь справедлива и до зоны, см. (8), и в начальном сечении  $\rho_b = p_b^y = T_b^{1/(\gamma-1)}$ . Радиальную скорость  $u(r)$  (затем и полную  $V(r)$ ) находим из уравнения расхода

$$u(r) = \frac{m}{r\rho(r)} = \frac{m}{rT^{1/(\gamma-1)}}. \quad (10)$$

Интегрируем (2), с учетом (3) и (9) получим

$$V^2 + T = \frac{\Gamma^2}{r^2} + \frac{m^2}{r^2 T^{2/(\gamma-1)}} + T = 1 + F_Q \frac{r - r_b}{r_{cr} - r_b}. \quad (11)$$

Установили неявную связь координаты внутри зоны с температурой  $T(r)$ . В критическом сечении  $r_{cr}$  радиальное число Маха обращается в единицу

$$M_{cr}^2(r_{cr}) = \frac{2u_{cr}^2}{(\gamma - 1)T_{cr}} = 1. \quad (12)$$

Уравнения (12) и (11) представим в виде двух выражений для критического радиуса

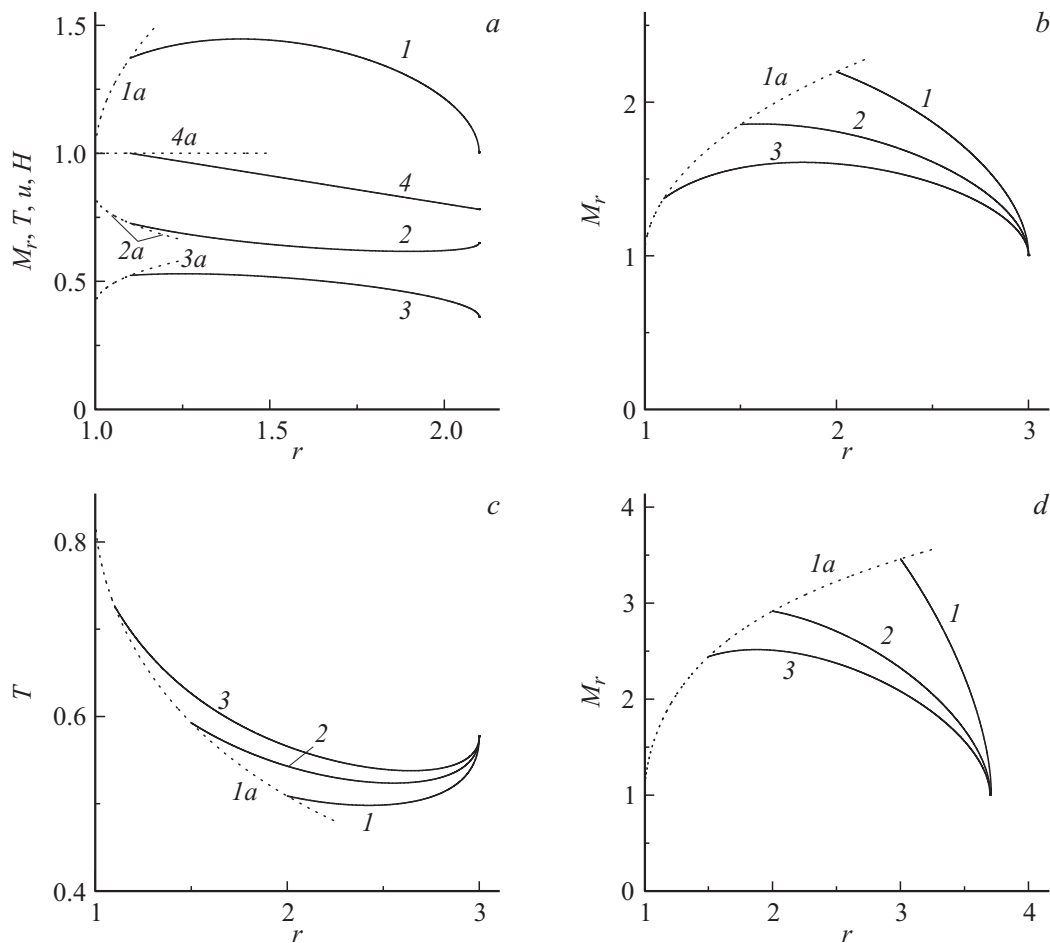
$$r_{cr}^2 = \frac{2m^2}{(\gamma - 1)T_{cr}^{(\gamma+1)/(\gamma-1)}} = \frac{\Gamma^2}{1 + F_{Q,cr} - (\gamma + 1)T_{cr}/2}. \quad (13)$$

Получили уравнение для критической температуры  $T_{cr}$ , решив которое при заданных значениях силового параметра  $F_{Q,cr}$  и циркуляции  $\Gamma$ , вычислим все остальные искомые критические величины  $r_{cr}$ ,  $u_{cr}$ ,  $V_{cr}$ ,  $M_{cr}^2 = 1 + 2\Gamma^2/[(\gamma - 1)T_{cr}r_{cr}^2]$ .

На рис. 1 в зависимости от циркуляции  $\Gamma$  приведены величины  $T_{cr}$ ,  $r_{cr}$ ,  $u_{cr}$ ,  $M_{cr}$  при различных значениях силового параметра  $F_{Q,cr} = -0.1, -0.3, -0.5, -0.7, -0.9$  (кривые 1–5). Величины  $T_{cr}$ ,  $r_{cr}$ ,  $u_{cr}$  максимальны при  $\Gamma = 0$  и убывают с ростом  $\Gamma$ , причем температура  $T_{cr}$  и радиальная скорость  $u_{cr}$  — до очень малых значений. Предел при  $\Gamma = 1$  не может существовать при действии сколь угодно малой силы  $F_Q$ , которая вызовет радиальное движение. Полное критическое число Маха минимально при  $\Gamma = 0$  ( $M_{cr} = 1$ ) и неограниченно растет при  $\Gamma \rightarrow 1$ .

Критический радиус  $r_{cr}$  при  $\Gamma \rightarrow 1$  убывает до минимального значения  $1/(1 + F_{Q,cr})^{1/2}$ .

На рис. 2, *a* для источника  $\Gamma = 0$  построены радиальное число Маха  $M_r(r)$ , температура  $T(r)$ , скорость  $u(r)$  и полная энтальпия  $H(r)$  внутри зоны при  $r_b = 1.1$ ,



**Рис. 2.** *a* — распределения по радиусам числа Маха  $M_r(r)$ , (кривая *1*), температуры  $T(r)$  (*2*), скорости  $u(r)$  (*3*), полной энтальпии  $H(r)$  (*4*), циркуляция  $\Gamma = 0$ , начальная координата  $r_b = 1.1$ , критическая —  $r_{cr} = 2.1$ , силовым параметром  $F_{Q,cr} = -0.21915$ ,  $f_Q = 1$ ; *1a, 2a, 3a, 4a* — без внешней силы; *b* —  $M_r(r)$  кривые *1–3* (при  $r_b = 2, 1.5, 1.1$ ),  $\Gamma = 0$ ,  $F_{Q,cr} = -0.3066$ ,  $r_{cr} = 3.0$ ; *c* —  $T(r)$  кривые *1–3* ( $r_b = 2, 1.5, 1.1$ ),  $\Gamma = 0$ ,  $F_{Q,cr} = -0.3066$ ,  $r_{cr} = 3.0$ ; *d* —  $M_r(r)$  кривые *1–3* (при  $r_b = 3, 2, 1.5$ ), циркуляция  $\Gamma = 0.5$ ,  $F_{Q,cr} = -0.5$ ,  $r_{cr} = 3.70$ .

$r_{cr} = 2.1$  и силовым параметром  $F_{Q,cr} = -0.21915$ . В силу выбранной длины зоны, равной  $d = r_{cr} - r_b = 1$ , функция распределения  $f_Q = 1$ . Полная энтальпия убывает на величину работы (энергии), затраченной на торможение потока:  $H(r_b) = H_b = 1$  уменьшается до  $H(r_{cr}) = H_{cr} = 1 + F_{Q,cr} = 0.78085$ . Критические величины для источника выражаются в явном виде через работу внешней силы  $F_{Q,cr}$

$$r_{cr} = \left( \frac{1}{1 + F_{Q,cr}} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad T_{cr} = \frac{2(1 + F_{Q,cr})}{(\gamma + 1)},$$

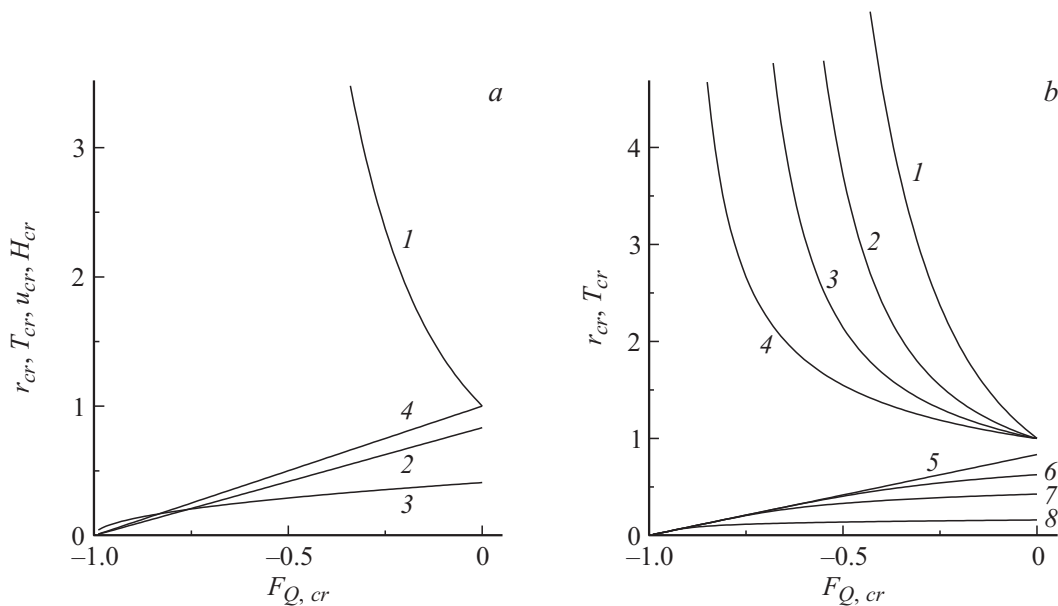
$$u_{cr}^2 = \frac{(\gamma - 1)(1 + F_{Q,cr})}{(\gamma + 1)}. \quad (14)$$

На рис. 2, *b, c* при  $\Gamma = 0$ ,  $F_{Q,cr} = -0.3066$  при различных начальных координатах  $r_b = 1.1–2$  (температурах  $T_b = 0.726–0.508$ , числах Маха  $M_{rb} = 1.371–2.197$ ) под воздействием внешней силы приходим к одному и тому же сечению  $r_{cr} = 3.0$  ( $M_r = 1$ ) и к температуре  $T_{cr} = 0.577$ .

На рис. 2, *d* при  $\Gamma = 0.5$ ,  $F_{Q,cr} = -0.5$ , начальных координатах  $r_b = 1.5–3.0$  (температурах  $T_b = 0.405–0.286$ , числах Маха  $M_{rb} = 2.441–3.459$ ) получили критическое сечение  $r_{cr} = 3.70$  и температуру  $T_{cr} = 0.403$ .

В соответствии с решениями (13), (14) и результатами, представленными на рис. 2, критические величины  $r_{cr}$ ,  $T_{cr}$ ,  $u_{cr}$  не зависят от начальной координаты зоны  $r_b$  и от других величин на входе в зону. Этот результат справедлив при  $\Gamma = 0$  и ненулевой циркуляции. При изменении силового параметра  $F_{Q,cr}$  изменяются критические параметры, при выбранном фиксированном  $F_{Q,cr}$  (и фиксированном  $\Gamma$ ) критические параметры  $r_{cr}$ ,  $T_{cr}$ ,  $u_{cr}$  не зависят от начальных  $r_b$ ,  $T_b$  и других. Этот факт важен для теории и приложений. Можно варьировать протяженность зоны воздействия  $d = |r_{cr} - r_b|$  при заданной силе, критические параметры сохраняются.

На рис. 3 в зависимости от силового параметра  $F_{Q,cr}$  представлены критические радиус  $r_{cr}$ , температура  $T_{cr}$ , скорость  $u_{cr}$ , полная энтальпия  $H_{cr}$  при нулевой цир-



**Рис. 3.** *a* — критические параметры как функции силового параметра  $F_{Q,cr}$ : радиус  $r_{cr}$  (1), температура  $T_{cr}$  (2), скорость  $u_{cr}$  (3), полная энтальпия  $H_{cr}$  (4) при  $\Gamma = 0$ ; *b* — при различных циркуляциях  $\Gamma$ : радиус  $r_{cr}(F_{Q,cr})$  — 1 ( $\Gamma = 0$ ), 2 (0.5), 3 (0.7), 4 (0.9), температура  $T_{cr}(F_{Q,cr})$  — 5 ( $\Gamma = 0$ ), 6 (0.5), 7 (0.7), 8 (0.9).

куляции (источник, рис. 3, *a*) и критические радиус  $r_{cr}$  и температура  $T_{cr}$  при  $\Gamma = 0, 0.5, 0.7, 0.9$  (рис. 3, *b*). Температура  $T_{cr}$  линейно убывает с ростом по модулю силового параметра  $|F_{Q,cr}|$  при  $\Gamma = 0$  и нелинейно изменяется при  $\Gamma > 0$ , причем отклонения от линейной зависимости растут с увеличением циркуляции. Рост критического радиуса максимален при  $\Gamma = 0$  и близких к  $-1$  значениях силового параметра.

### Ограничения на реализацию кризиса, вызванного внешней силой при постоянном давлении

Есть ситуации, интересные как с точки зрения теории, так и для приложений, например участки трассы с распределенным теплоподводом, на которых давление остается постоянным. В [20, 21] для ситуации теплоподвода с постоянным давлением построены границы по параметрам подобия (начальный радиус  $r_b$ , температура  $T_b$ , циркуляция  $\Gamma$ , протяженность зоны  $d = |r_{ex} - r_b|$ ), в которых реализуется кризис и вне которых кризиса нет. Давление остается постоянным за счет подбора функций распределения  $g_E(r)$ ,  $g_Q(r)$ . Рассмотрим аналогичный случай в отсутствие энергообмена и при наличии внешней силы. Условие  $p = p_b = \text{const}$  дает, согласно (4), (5), (8), постоянство температуры и плотности  $T = T_b = \text{const}$ ,  $\rho = \rho_b = \text{const}$ , а также связь между ними, согласно уравнению адиабаты,  $p = \rho^\gamma = T^{\gamma/(\gamma-1)}$ . Из (1), (2) находим решение для скоростей, чисел Маха,

функций распределения внешней силы  $f_E(r)$ ,  $f_Q(r)$ :

$$u(r) = \frac{m}{\rho_b r} = u_b \frac{r_b}{r}, \quad M_r(r) = M_{rb} \frac{r_b}{r},$$

$$V(r) = V_b \frac{r_b}{r}, \quad M(r) = M_b \frac{r_b}{r}, \quad (15)$$

$$\frac{d}{dr} V^2 \equiv -\frac{2r_b^2 V_b^2}{r^3} = \begin{cases} F_E f_E(r) / \rho_b \\ F_Q f_Q(r) \end{cases},$$

$$F_Q f_Q(r) = \frac{F_E f_E(r)}{\rho_b} = -\frac{2r_b^2 V_b^2}{r^3}. \quad (16)$$

Критический радиус есть, согласно  $M_r(r_{cr}) = 1$ :

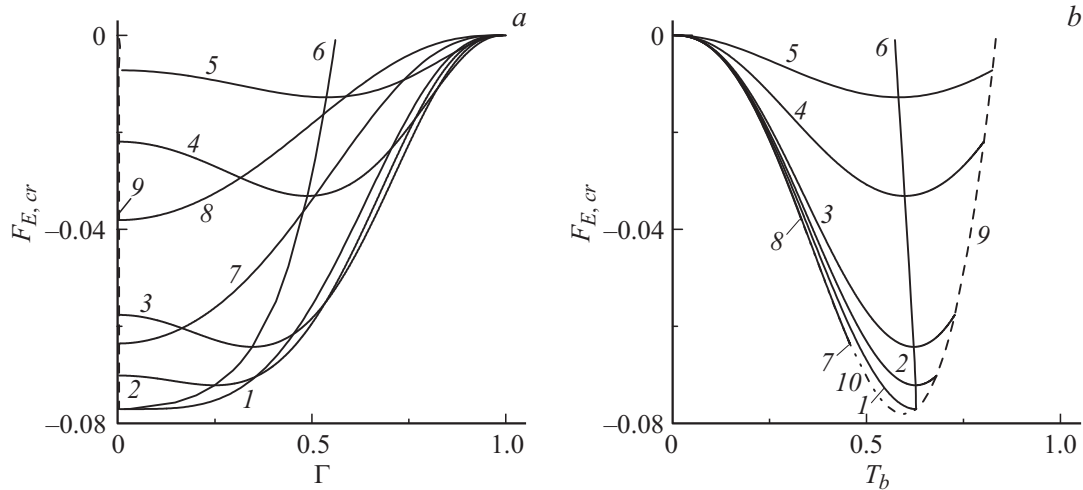
$$r_{cr} = r_b M_{rb}. \quad (17)$$

Нормировка функций распределения силы  $f_E(r)$ ,  $f_Q(r)$  дает связь силовых параметров подобия  $F_{E,cr}$ ,  $F_{Q,cr}$  с начальными параметрами подобия  $\rho_b$ ,  $V_b$ ,  $M_{rb}$ :

$$F_{E,cr} = \rho_b F_{Q,cr} = \rho_b V_b^2 \left( \frac{1}{M_{rb}^2} - 1 \right). \quad (18)$$

В случае  $F_{Q,cr}$  (сила задана на единицу массы) в рассматриваемом режиме I вихреисточника в вакуум силовой параметр отрицателен, возможно торможение до  $M_r = 1$ . Значение силового параметра меняется от 0 до  $-1$  с ростом начальной координаты  $r_b = 1 - \infty$  (при  $\Gamma = \text{const}$ ) или при изменении циркуляции  $\Gamma$  от нуля до 1 (при  $r_b = \text{const}$ ).

Изменения силового параметра  $F_{E,cr}$  (на единицу объема) немонотонно и неоднозначно при постоянной начальной координате  $r_b$ . Рассмотрим изменения  $F_{E,cr}(\Gamma)$  при  $r_b = \text{const}$ .



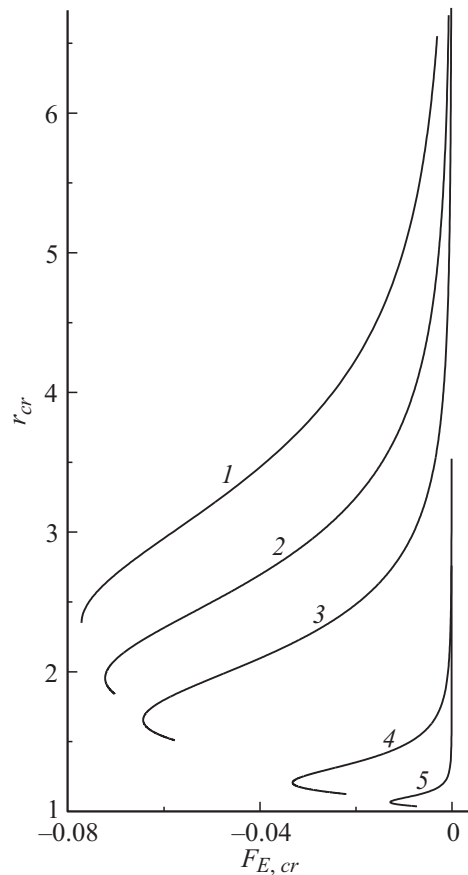
**Рис. 4.** Режим I,  $E = 0 = Q$ , воздействие внешней силы при постоянном давлении. Критические значения силового параметра: *a* —  $F_{E,cr}$  как функция циркуляции  $\Gamma$  (при  $r_b = 1.362$  (1), 1.2 (2), 1.1 (3), 1.01 (4), 1.001 (5), 2.5 (7), 5.0 (8), кривая 6 —  $F_{E,cr, min}$ ); *b* —  $F_{E,cr}$  от температуры  $T_b(\Gamma)$  при  $r_b = const$ , 9 — огибающая кривых 1–5 при  $\Gamma = 0$ , 10 — огибающая кривых 7, 8.

На рис. 4, *a* представлены зависимости  $F_{E,cr}$  от циркуляции  $\Gamma$  при фиксированных  $r_b = 1.362, 1.2, 1.1, 1.01, 1.001$ , кривые 1–5. Предел  $r_b \rightarrow 1$  требует специального исследования в рамках новой физико-математической модели. Строго говоря, начальная температура  $T_b$  в одном и том же начальном сечении  $r_b$  меняется, согласно (8), как функция  $\Gamma$ . Изменения  $F_{E,cr}$  в зависимости от  $T_b$  ( $\Gamma, r_b = const$ ) показаны на рис. 4, *b*. Кривая 6 соединяет точки минимума силового параметра  $F_{E,cr, min}$  на кривых 1–5, кривая 9 — огибающая справа при  $\Gamma = 0$ . Сечение 1 ( $r_b = 1.362$ ) является предельным из семейства локальных внутренних минимумов в диапазоне  $\Gamma$  от 0 до 1, представленных кривыми 1–5. При  $r_b > 1.362$  (см., например, кривые 7 и 8) минимумы силового параметра  $F_{E,cr}$  наблюдаются только на краю полного диапазона циркуляций  $[0, 1]$  при  $\Gamma = 0$ . Для этих минимумов производная по циркуляции  $\Gamma$  от  $F_{E,cr}$  не равна нулю. Кривая 10 — огибающая (при  $\Gamma = 0$ ) кривых 7, 8... семейства краевого минимума в диапазоне начальных радиусов  $1.362 - \infty$  ( $r_b > 1.362$ ). Для кривых 7 и 8 отмечены точки краевого минимума  $F_{E,cr, min}$ . Заметим также, что абсолютный минимум — крайовой при  $\Gamma = 0, T_{b, min} = 2/(\gamma(\gamma + 1)) \approx 0.595, F_{E,cr, min} \approx -0.781, r_b = m/(T_{b, min})^{1/(\gamma-1)} \sqrt{1 - T_{b, min}} \approx 1.488$  (см. минимум кривой 10 на рис. 4, *b* при  $dF_{E,cr}(T_b)/dT_b|_{\Gamma=0} = 0, r_b$  переменный).

Предельные переходы  $\Gamma \rightarrow 0$  (для устранения излома  $F_{E,cr, min}(\Gamma)$  при  $\Gamma \approx 0$ ) и  $\Gamma \rightarrow 1$  требуют пересмотра физической модели при формулировке физико-математической постановки задачи. Стационарный предел  $\Gamma = 1$  ( $u = 0$ , вихрь без радиального течения) невозможен при сколь угодно малом отличии силы от нуля.

Для идентификации областей реализации кризиса проанализируем конкретные ситуации на плоскости  $F_{E,cr} - T_b$  (рис. 4, *b*). Предположим, что в первую оче-

редь задан силовой параметр  $F_{E,cr}$ , некий уровень, прямая, расположенная выше  $F_{E,cr, min}$ , иначе кризиса в стационарном потоке не получим. Кризиса не будет правее огибающей 9, ограничивающей диапазон циркуляций



**Рис. 5.** Критические радиусы  $r_{cr}(F_{E,cr})$  при  $r_b = 1.362$  (1), 1.001 (5).

при  $\Gamma = 0$ . Возьмем, например, кривую 4 ( $r_b = 1.01$ ) от кривой 6 до кривой 9. Предположим, ее пересекает линия уровня заданной силы  $F_{E,cr}$ . Выше уровня силы есть участок кривой 4. Кризис реализуется в области, которая расположена выше каждого из названных участков. Увеличивая по модулю силу, пройдем всю область между кривой 6 и кривой 9 сверху донизу, кризис реализуется. Аналогично рассмотрим область между кривой 6 минимальных значений и огибающей 10. Кризис реализуется в этой области. Слева от кривой 10 кризис невозможен.

На плоскости  $F_{E,cr} - \Gamma$  (рис. 4, а) в силу связи (8) температуры  $T_b$  на границе кризиса с циркуляцией  $\Gamma$  также есть аналогичные кривые 1–5, кривая 6 минимумов критических значений силового параметра  $F_{E,cr}$ , огибающая 9, кривые 7, 8 с краевыми минимумами и огибающая 10 (не построена). Фактической границей области реализации кризиса справа вместе с кривой 9 слева (и ее продолжением снизу 10) является кривая максимальных значений циркуляций  $\Gamma$  при вариации  $r_b$  (не приведена в силу очень близкого, практически слитного расположения правых краев кривых 1–5, 7, 8).

На рис. 5 показаны критические радиусы  $r_{cr}(F_{E,cr})$  в области неоднозначной границы реализации кризиса в интервале начальных радиусов  $r_b = 1.362$  (кривая 1) — 1.00 (5). Аналогичные „петли“ в зависимости  $r_{cr}(r_b)$  приведены в [21] для теплового кризиса в режиме II в затопленное пространство.

Наличие адиабатической степенной зависимости между давлением, температурой, плотностью в двух рассмотренных ситуациях — постоянная функция распределения силы и постоянное давление в зоне воздействия за счет выбора функции распределения силы — может быть использовано в задаче создания высоко энтальпийного потока [22] для управления потоком на отдельных участках трассы. Знание границ по параметрам подобия и возможностей реализации кризиса позволит избежать разрушения стационарного потока со специально подобранными параметрами.

## Заключение

1. При наличии распределенной внешней силы в отсутствие теплоподвода между плотностью, давлением и температурой справедливы адиабатические соотношения.

2. В случае внешней силы  $F_Q$  с постоянным распределением  $f(r) = \text{const}$  критические параметры — координата  $r_{cr}$ , температура  $T_{cr}$ , скорость, полное число Маха — одинаковы при различных начальных параметрах  $r_b$  ( $T_b$  и др.), зависят только от значений циркуляции  $\Gamma$  и силового параметра  $F_{Q,cr}$ , физический смысл которого — работа внешних сил.

3. Протяженность зоны воздействия и, следовательно, интенсивность силы можно регулировать при заданной суммарной работе внешних сил.

4. Максимальный рост критического радиуса при максимальном по модулю силовом параметре происходит в источнике при нулевой циркуляции.

5. В режиме I в вакууме с торможением при постоянном давлении остаются постоянными и связанными адиабатическими соотношениями все три термодинамические величины: плотность, температура, давление при изменении компонентов и полной скорости (а также чисел Маха) обратно пропорционально координате.

6. Области реализации кризиса при заданном значении силового параметра  $F_{E,cr}$  и начальной координаты  $r_b$  ограничены на плоскости „сила–температура“ огибающими кривых  $F_{E,cr}(T_b(\Gamma), r_b = \text{const})$  при  $\Gamma = 0$  для кривых с локальными минимумами (с одной стороны) и краевыми минимумами (с другой стороны).

7. Области реализации кризиса на плоскости „сила–циркуляция“ являются огибающая граничных кривых  $F_{E,cr}(\Gamma, r_b = \text{const})$  при  $\Gamma = 0$  и кривая максимальных значений циркуляции  $\Gamma$  при соответствующих уровнях силового параметра  $F_{E,cr} = \text{const}$ .

## Список литературы

- [1] Черный Г.Г. Газовая динамика. М.: Наука, 1988. 424 с.
- [2] Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1973. 848 с.
- [3] Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковые течения и ударные волны. М.: ИЛ, 1950. 426 с. Courant R., Friedrichs K.O. Supersonic Flow and Shock Waves. NY: Interscience, 1948.
- [4] Гудерлей К.Г. Теория около звуковых течений. М.: ИЛ, 1960. 422 с. (Guderley K.G. Theorie Schallnaher Strömungen. Berlin, Göttingen, Heidelberg: Springer-Verlag, 1957)
- [5] Коул Дж., Кук Л. Трансзвуковая аэродинамика. М.: Мир, 1989. 360 с. (Julian D. Cole, L. Pamela Cook. Transonic aerodynamics. North Holland, Amsterdam, NY, Oxford, Tokyo: Elsevier Science Publishers B.V., 1986)
- [6] Кучеров А.Н. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 12. С. 32–39.
- [7] Kogan M.N., Kucherov A.N. Thermal choking of a cylindrical or spherical mass source // The 9<sup>th</sup> International Workshop on Magneto-Plasma Aerodynamics. Moscow, April 13–15 2010. Proceedings. P. 59–69.
- [8] Коган М.Н., Кучеров А.Н. Стационарный источник тепла в сверхзвуковом потоке // Теплофизика высоких температур. 2010. Т. 48. № 1 (дополнительный). С. 85–92.
- [9] Абрамович Г.Н. // ДАН СССР. 1946. Т. 54. № 7. С. 579–581.
- [10] Вулис Л.А. // ДАН СССР. 1946. Т. 54. № 8. С. 669–672.
- [11] Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. М.: Наука, 1991. Ч. 1. 600 с.
- [12] Чалыгин С.А. О газовых струях. М.: Университетская типография, 1902. 121 с.
- [13] Фабрикант Н.Я. Аэродинамика. Общий курс. М.: Наука, 1964. 814 с.
- [14] Мизес Р. Математическая теория течений сжимаемой жидкости. М.: ИЛ, 1961. 588 с. (Mises R. Mathematical Theory of Compressible Fluid Flow. NY: Academic Press INC Publishers, 1958)

- [15] Кучеров А.Н. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 7. С. 35–42.
- [16] Кучеров А.Н. Распределенное слабое тепловыделение в трансзвуковом потоке. Матер. VII Междунар. конф. по неравновесным процессам в соплах и струях (NPNJ'2008). Алушта (Крым), 24–31 мая 2008. С. 275–277.
- [17] Кучеров А.Н. // Ученые записки ЦАГИ. 1983. Т. 14. № 4. С. 47–57.
- [18] Кучеров А.Н. // ИФЖ. 2010. Т. 83. № 5. С. 873–877.
- [19] Годунов С.К., Забродин А.В., Иванов М.Я., Крайко А.Н., Прокопов Г.П. Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.: Наука, 1976. 400 с.
- [20] Кучеров А.Н. // ИФЖ. 2014. Т. 87. № 1. С. 129–138.
- [21] Кучеров А.Н. // ИФЖ. 2014. Т. 87. № 5. С. 1149–1159.
- [22] Miles R.B., Brown G.L., Lempert W.R., Yetter R., Williams G.J., jr., Bogdonoff S.M., Natelson D., Guest J.R. // AIAA J. 1995. Vol. 33. N 8. P. 1463–1470.