

Невидимость конечного диэлектрического цилиндра в условиях резонанса Фано

© К.Б. Самусев^{1,2}, М.В. Рыбин^{1,2}, А.К. Самусев^{1,2}, М.Ф. Лимонов^{1,2}

¹ Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
Санкт-Петербург, Россия

² Университет ИТМО, кафедра Нанопотоники и Метаматериалов,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: K.Samusev@mail.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 2 февраля 2015 г.
В окончательной редакции 17 апреля 2015 г.)

Теоретически исследован эффект невидимости конечного однородного диэлектрического цилиндра, обусловленный существенным уменьшением рассеяния электромагнитных волн в определенных спектральных диапазонах. Рассматривается режим невидимости цилиндра в воздушном пространстве без дополнительных маскирующих устройств. Эффект основан на резонансном гашении рассеянных волн, в результате чего цилиндр становится невидимым для наблюдателя, расположенного в любой точке пространства. Условие невидимости определяется резонансом Фано между переизлученными модами Ми и нерезонансным рассеянием на цилиндре. Детально исследована зависимость спектров интегрального сечения рассеяния от соотношения длины и радиуса цилиндра. Показано, что переход от модельного бесконечного цилиндра к цилиндру конечной длины сопровождается появлением новых резонансов и дополнительного рассеяния, которое, однако, не нарушает самую низкую по частоте область невидимости при определенных соотношениях длины и диаметра цилиндра.

1. Введение

В последние годы на фоне непрерывно растущего интереса к тематике метаматериалов сформировалось новое направление научных исследований, связанное с невидимостью и маскировкой объектов [1–3]. Развитие технологии изготовления метаматериалов привело к появлению устройств, позволяющих сделать объект невидимым в определенном спектральном интервале. Функционирование ряда таких устройств основано на принципах, которые разрабатываются в рамках нового направления — трансформационной оптики [1,4]. На основе трансформационной оптики можно смоделировать, а с помощью метаматериалов изготовить материал, в котором свет распространяется по почти произвольным заранее заданным траекториям. Так, на практике реализовалась литературная концепция „плаща-невидимки“ для оптической маскировки. Плащ, по сути представляющий собой маскировочный слой, искривляет фронт падающей электромагнитной волны, изгибая траектории распространения света таким образом, что волны огибают спрятанный объект и выходят из этого слоя так, словно его не было, делая и сам слой, и скрытый под ним объект невидимыми [1,5–7]. В результате наблюдатель вместо замаскированного объекта видит пространство позади него. При этом должно соблюдаться еще одно условие: оптическая длина пути каждого луча в маскировочном слое должна быть такой же, как если бы луч распространялся прямолинейно в свободном пространстве, иначе лучи, прошедшие этот слой, будут интерферировать с лучами, не взаимодействовавшими с

ними, искривляя фронт прошедшего излучения. Такой „плащ-невидимка“, или маскировочный слой, должен быть анизотропным и пространственно неоднородным, а его конкретные параметры определяются методами трансформационной оптики. Метод основан на том, что уравнения Максвелла инвариантны по отношению к пространственным преобразованиям, и заключается в определении внутри маскировочного слоя пространства с искривленной метрикой, для чего находится необходимое преобразование координат. Простой маскировочный шаровой (либо цилиндрический) слой можно построить с помощью линейного преобразования, которое переводит шар (цилиндр) радиуса R_2 в шаровой слой (кольцо) ограниченное двумя радиусами $R_1 < r < R_2$, согласно формуле $r' = R_1 + \frac{R_2 - R_1}{R_2} r$ [8]. Следует отметить, что любой материал обладает дисперсией, а также поглощением, поэтому идеальный маскировочный слой получить невозможно. Более того, формулы трансформационной оптики задают параметры слоя для определенной рабочей частоты, т.е. такая маскировка является монохроматической, и для других частот условия маскировки не выполняются.

Альтернативный метод маскировки, который не требует создания маскировочного слоя, был предложен в работе [9]. Метод может быть использован для маскировки тел, рассеяние на которых описывается теорией Ми [10–12], в первую очередь для цилиндра и шара. Характерной особенностью рассеяния Ми является его резонансный характер в области спектра, где целое число длин волн совпадает с оптической „толщиной“ рассеивающей частицы na . Резонансы наблюдаются при

совпадении частоты падающей волны ω с одной из собственных частот ω_0 , что приводит к переизлучению частицей электромагнитных волн на той же частоте ω_0 . В работах [13,14] было доказано, что в области резонансов Ми рассеяние света в окружающую среду имеет интерференционную природу и представляет собой не что иное, как каскады резонансов Фано, причем форма каждой полосы, соответствующей определенному резонансу Ми, описывается классической формулой Фано [15]. Резонанс Фано наблюдается в самых разных физических экспериментах [16–29] в том случае, если относительно узкая полоса расположена на широком фоновом контуре и интерферирует с ним. Из-за интерференции симметричный лоренцевский контур узкой резонансной линии трансформируется в общем случае в несимметричный контур, форма которого описывается формулой Фано [15]

$$I(\omega) = A \frac{(q + \Omega)^2}{1 + \Omega^2}, \quad (1)$$

где q — параметр Фано, $\Omega = (\omega - \omega_0)/\Gamma$ — безразмерная частота, ω_0 и Γ — положение и ширина узкого резонанса соответственно. Резонанс Фано может приводить к полному пропаданию рассеяния на некоторой частоте либо вдоль некоторого направления [30], причем в настоящей работе нас будет интересовать случай пропадания рассеяния в спектральных координатах. Из выражения (1) следует, что при выполнении соотношения $q + (\omega - \omega_0)/\Gamma = 0$ рассеяние тождественно равно нулю на некоторой частоте ω_f , которая совпадает с ω_0 при $q = 0$, а в общем случае определяется формулой $\omega_f = \omega_0 - q\Gamma$. Таким образом, на рабочей частоте ω_f рассеяние на частице будет полностью отсутствовать. Рассеяние Ми представимо в виде каскада резонансных контуров Фано, которые перекрываются и таким образом вносят некоторое рассеяние на частоте ω_f для выбранного контура. Однако в работе [9] было показано, что для бесконечного цилиндра существуют такие спектральные области, в которых суммарный вклад соседних резонансов в рассеяние мал, и объект на частоте ω_f рассеивает очень слабо. Если учесть, что любой „плащ-невидимка“ также не является идеальным маскировочным слоем из-за дисперсии и поглощения, то маскировку за счет резонанса Фано следует признать интересным альтернативным подходом к решению проблемы невидимости объектов. В этом случае задача маскировки сводится к подбору параметров самой частицы, удовлетворяющих условию $\omega_f = \omega_0 - q\Gamma$ для заданной рабочей частоты ω_f .

В настоящей работе, направленной на развитие метода маскировки за счет резонансов Фано, исследуется случай цилиндра, имеющего конечную длину, в отличие от работы [9], где анализировалась идеальная картина с бесконечным цилиндром. Цель работы — выяснить, как меняется рассеяние при уменьшении длины цилиндра, в первую очередь в тех спектральных областях, которые удовлетворяют условию невидимости $\omega_f = \omega_0 - q\Gamma$.

2. Аналитическое решение задачи о невидимости бесконечного цилиндра

Аналитическое решение задачи о рассеянии электромагнитной волны на однородном шаре или цилиндре произвольного радиуса с произвольной диэлектрической проницаемостью строится на основании теории, которую принято называть теорией Лоренца–Ми [10,11,31,32]. Рассмотрим рассеяние на однородном цилиндре радиуса r с вещественной диэлектрической проницаемостью ε_1 . Будем считать, что цилиндр находится в воздушной среде с $\varepsilon_2 = 1$. Решение задачи представляется в виде бесконечных рядов для компонент внутреннего и рассеянного полей и описывается цилиндрическими коэффициентами Лоренца–Ми a_n и b_n , соответствующими электрическому и магнитному моменту. Следуя работе [9], рассмотрим ТЕ-поляризацию, в которой вектор электрического поля \mathbf{E} перпендикулярен оси цилиндра z , и от нуля отличны компоненты электромагнитного поля (E_x , H_y , H_z). В поляризации ТЕ рассеяние определяется одним цилиндрическим коэффициентом Лоренца–Ми a_n ($b_n = 0$). Коэффициенты Лоренца–Ми находятся из условий непрерывности тангенциальных составляющих поля на границе раздела между цилиндром и окружающей средой, которые для тангенциальных составляющих компонент поля H и E (поляризация ТЕ) имеют вид

$$\begin{cases} E_n J_n(x\sqrt{\varepsilon_2}) + A_n H_n^{(1)}(x\sqrt{\varepsilon_2}) = D_n J_n(x\sqrt{\varepsilon_1}), \\ \varepsilon_1 E_n \frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\varepsilon_2}) + \varepsilon_1 A_n \frac{\partial}{\partial n} H_n^{(1)}(x\sqrt{\varepsilon_2}) \\ = \varepsilon_2 D_n \frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\varepsilon_1}), \end{cases} \quad (2)$$

где $x = r\omega/c = 2\pi r/\lambda$ — безразмерная частота, параметры E_n , A_n и D_n задают цилиндрические гармоники амплитуд падающего, рассеянного и внутрицилиндрового магнитного поля, $J_n(\xi)$ и $H_n^{(1)}(\xi)$ — функции Бесселя и Ханкеля. Коэффициент Лоренца–Ми для рассеянного магнитного поля определяется как $a_n = A_n/E_n$, коэффициент $d_n = D_n/E_n$ характеризует поле внутри цилиндра. Резонансные моды бесконечного цилиндра, возбуждаемые в поляризации ТЕ, будем обозначать как TE_{nk} , где индекс $n = 0, 1, 2, \dots$ соответствует порядку мультиполя ($n = 0$ — диполь, $n = 1$ — квадруполь и т.д.), а индекс $k = 1, 2, 3, \dots$ определяет порядок резонанса для каждого n . Интегральное рассеяние на бесконечном цилиндре характеризуют величиной $Q_{sca}^\infty = \frac{2}{x} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2$, в которую входит дипольная компонента $Q_{sca,0}^\infty = \frac{2}{x} |a_0|^2$ и мультипольные компоненты $Q_{sca,n}^\infty = \frac{4}{x} |a_n|^2$ при $n \geq 0$.

Далее перепишем второе уравнение системы (2) в следующем виде:

$$a_n = d_n \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \frac{\frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\epsilon_1})}{\frac{\partial}{\partial r} H_n^{(1)}(x\sqrt{\epsilon_2})} + (-1)^n \frac{\frac{\partial}{\partial r} J_n(x\sqrt{\epsilon_2})}{\frac{\partial}{\partial r} H_n^{(1)}(x\sqrt{\epsilon_2})}. \quad (3)$$

В работах [13,14] была продемонстрирована прямая аналогия между формулой (3) для коэффициента Лоренца–Ми a_n , определяющего рассеянное магнитное поле, и формулой Фано, представленной как

$$\frac{(q + \Omega)^2}{1 + \Omega^2} \sin^2 \Delta = A(\omega) \exp(i\varphi_A(\omega)) \frac{1}{\Omega + 1} + B(\omega) \exp(i\varphi_B(\omega)). \quad (4)$$

Первые члены в правой части уравнений (3), (4) определяют узкий резонансный член, а вторые — широкий нерезонансный член в сценарии резонанса Фано. На рис. 1 представлена спектральная зависимость интегрального сечения рассеяния Q_{sca}^∞ , а также парциальных сечений $Q_{sca,n}^\infty$ в низкочастотной области спектра, где наблюдаются дипольная мода TE_{0k} и высшие мультипольные моды TE_{nk} . Все линии в спектрах имеют асимметричные контуры, которые идеально описываются формулой Фано (1). Из рис. 1 следует, что интегральное сечение Q_{sca}^∞ имеет ряд относительно узких спектральных областей, которые характеризуются крайне слабым рассеянием электромагнитных волн на бесконечном цилиндре. Для сравнения и определения спектральных областей невидимости нами использовался стандартный реперный спектр интегрального сечения

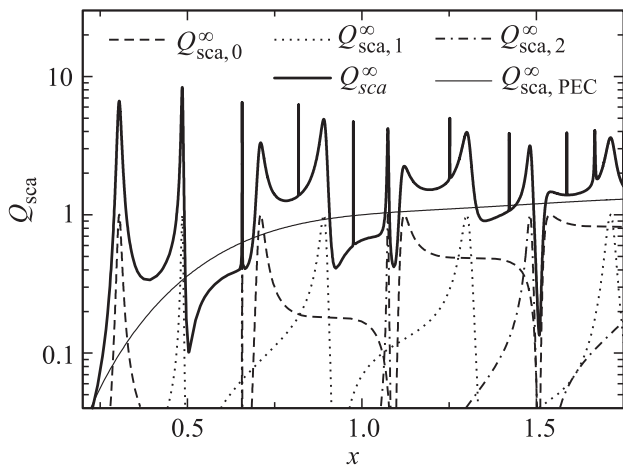


Рис. 1. Спектры интегрального сечения рассеяния Q_{sca}^∞ , а также парциальных сечений $Q_{sca,n}^\infty$ для дипольной и мультипольных мод TE_{nk} при рассеянии Ми на бесконечном однородном цилиндре с диэлектрической проницаемостью $\epsilon_1 = 60$. Для сравнения тонкой сплошной линией показан спектр интегрального сечения рассеяния на идеальном проводящем металлическом цилиндре $Q_{sca,PEC}^\infty$. Диэлектрическая проницаемость окружающей среды $\epsilon_2 = 1$, падающая волна распространяется перпендикулярно оси цилиндра z , поляризация TE, $x = r\omega/c = 2\pi r/\lambda$ — безразмерная частота.

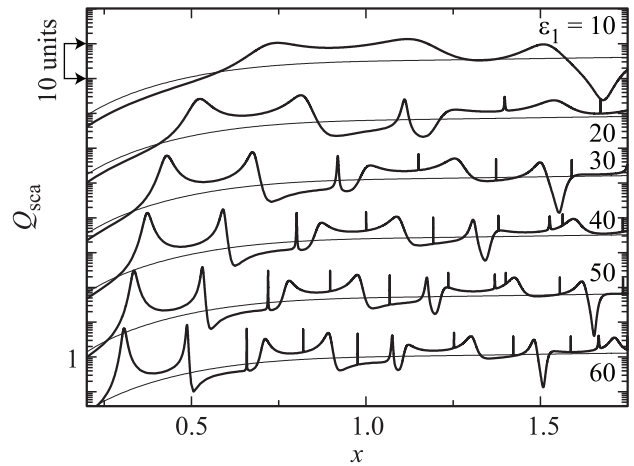


Рис. 2. Спектры интегрального сечения бесконечного цилиндра Q_{sca}^∞ в зависимости от диэлектрической проницаемости ϵ_1 в сравнении со спектром интегрального сечения рассеяния на идеальном проводящем металлическом цилиндре $Q_{sca,PEC}^\infty$ (тонкая линия), $x = r\omega/c = 2\pi r/\lambda$ — безразмерная частота. Параметры окружающей среды и падающей волны те же, что для рис. 1. Спектры смещены по оси ординат на величину 10^2 в логарифмической шкале.

рассеяния на идеальном проводящем металлическом цилиндре ($\epsilon_1 \rightarrow \infty$): $Q_{sca,PEC}^\infty$ (PEC — perfect electric conductor) [9]. В частности, при $x \approx 0.5$ и 1.5 в рассеянии наблюдаются провалы, которые отвечают выполнению условия Фано $\omega_f = \omega_0 - q\Gamma$ для наиболее интенсивных мод в соответствующих спектральных интервалах. В этих областях рассеяние существенно слабее, чем рассеяние на идеальном металлическом цилиндре, и такие области рассматриваются как области невидимости объекта.

На рис. 2 приведены спектры бесконечного цилиндра Q_{sca}^∞ в зависимости от диэлектрической проницаемости ϵ_1 и спектр сравнения $Q_{sca,PEC}^\infty$ ($\epsilon_1 \rightarrow \infty$). Рисунок демонстрирует существенную трансформацию спектра Q_{sca}^∞ при увеличении ϵ_1 : наблюдаются сужение резонансных линий рассеяния и смещение всех особенностей в низкочастотную область. В частности, первая по частоте область невидимости, которая следует за двумя пиками интенсивного рассеяния, не приводит к невидимости цилиндра при $\epsilon_1 = 10$ ($x \sim 1.3$). Однако уже при $\epsilon_1 = 20$ цилиндр становится невидимым в области $x \sim 1$, которая плавно смещается к частоте $x \approx 0.5$ при $\epsilon_1 = 60$.

Дополнительно отметим, что в работе [9] были проведены эксперименты по рассеянию электромагнитных волн на цилиндрическом сосуде с водой в микроволновой области спектра. Использование воды связано с ее высокой диэлектрической проницаемостью, которая зависит от температуры и меняется от $\epsilon_1 = 80$ при 20°C до $\epsilon_1 = 50$ при 90°C в диапазоне от 1 до 6 GHz [33]. В результате было получено прекрасное совпадение с предсказаниями теории; водяной цилиндр практически

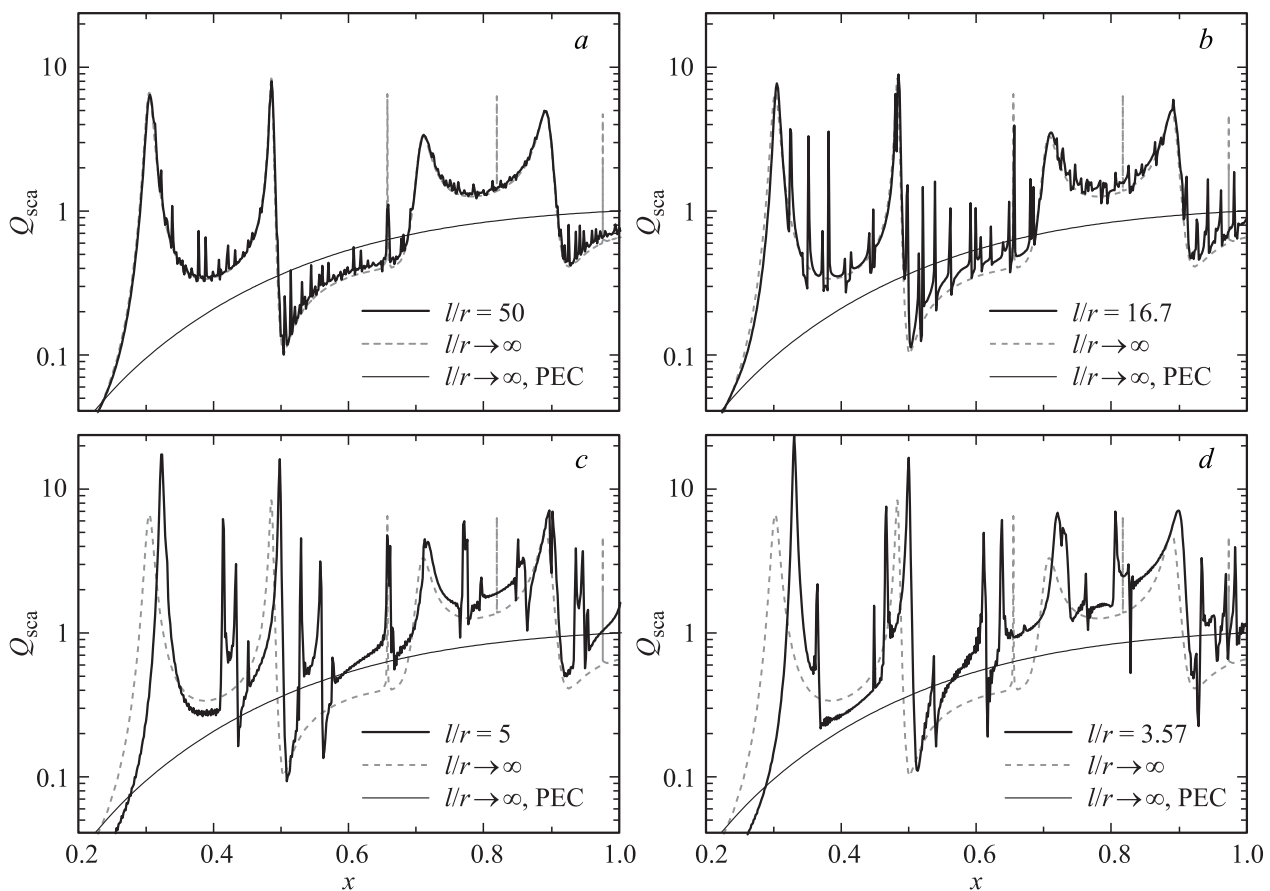


Рис. 3. Спектры интегрального сечения рассеяния $Q_{sca}^{l/r}$ на однородном диэлектрическом цилиндре в зависимости от соотношения длины и радиуса цилиндра l/r при $\epsilon_1 = 60$ в сравнении со спектром интегрального сечения рассеяния на идеальном металлическом цилиндре $Q_{sca,PEC}^\infty$, $x = r\omega/c = 2\pi r/\lambda$ — безразмерная частота. Параметры окружающей среды и падающей волны те же, что для рис. 1.

не рассеивал электромагнитные волны в области частот $x \sim 0.5$, что означает его невидимость для наблюдателя, находящегося в произвольной точке вне цилиндра. В этих экспериментах длина цилиндра с водой была значительно больше сечения СВЧ-пучка. Кроме того, длина была во много раз больше диаметра цилиндра, т. е. цилиндр по отношению к падающему пучку можно было рассматривать как бесконечный. В настоящей работе нас интересует другой случай, когда цилиндр имеет длину и диаметр, сопоставимые с размером пучка электромагнитной волны.

3. Численное решение задачи о невидимости конечного цилиндра

Перейдем к изложению основного результата работы — расчету интенсивности рассеяния электромагнитных волн на цилиндре конечной длины. Рассмотрим однородный диэлектрический цилиндр длиной l , радиусом r с вещественной диэлектрической проницаемостью ϵ_1 в воздушной среде с $\epsilon_2 = 1$. Нас интересует рассеяние в поляризации ТЕ при распростране-

нии падающего пучка вдоль оси x , перпендикулярной оси цилиндра z . Спектры интегрального сечения рассеяния $Q_{sca}^{l/r}$ рассчитывались численно с использованием коммерчески доступного программного пакета CST Microwave Studio. Величина $Q_{sca}^{l/r}$ определялась как отношение полного сечения рассеяния (radar cross section), рассчитываемого с помощью пакета CST, к фронтальному геометрическому сечению объекта, т. е. к площади падающей плоской волны, перекрываемой объектом; в случае цилиндра конечной длины это величина $S = 2rl$.

На рис. 3 приведены рассчитанные спектры интегрального сечения рассеяния $Q_{sca}^{l/r}$ в зависимости от соотношения длины и радиуса цилиндра l/r , а также для сравнения спектр Q_{sca}^∞ бесконечного цилиндра, рассчитанный аналитически по формулам Лоренца-Ми. Кроме того, показан спектр интегрального сечения рассеяния на идеальном проводящем металлическом цилиндре $Q_{sca,PEC}^\infty$. Все спектры приведены для фиксированного значения диэлектрической проницаемости $\epsilon_1 = 60$.

Рис. 3 демонстрирует появление новых резонансов в спектре интегрального сечения рассеяния $Q_{sca}^{l/r}$ цилиндра конечной длины. Если говорить об аналитическом решении, то задача о рассеянии электромагнитных волн

на бесконечном цилиндре в плоскости xu переходит в задачу о рассеянии на так называемом объемном резонаторе [34]. Соответственно двумерная задача о нахождении собственных резонансов бесконечного цилиндра (теория Лоренца–Ми для тел, имеющих ось вращения) переходит в трехмерную задачу нахождения нормальных колебаний электромагнитного поля внутри конечного диэлектрического цилиндра, которая сводится к решению уравнений Максвелла при определенных граничных условиях на стенках цилиндра. Типы колебаний в цилиндрических объемных резонаторах характеризуются индексами m, n, p , которые соответствуют числу полувольт электрического или магнитного поля, укладываемых по его диаметру, окружности и длине (например, E_{mnp} или H_{mnp}). Следует отметить, что в аксиально-симметричных открытых диэлектрических резонаторах волна многократно отражается от границ за счет эффекта полного внутреннего отражения. Такие резонаторы имеют еще и другое название — резонаторы с модами „шепчущей галереи“ (название дано по аналогии с акустическими модами в шепчущей галерее собора Святого Павла в Лондоне, которые изучал лорд Рэлей [35]). Моды „шепчущей галереи“ распространяются в приповерхностной области резонатора, вдоль его границы. Они характеризуются малыми излучательными потерями и обладают чрезвычайно высокой добротностью.

Возвращаясь к результатам численных расчетов (рис. 3), отметим, что новые линии, которые появились в спектре интегрального сечения рассеяния $Q_{sca}^{l/r}$ на диэлектрическом цилиндре длины l , представляют собой резонансы, расположенные по всему спектру. На этих частотах цилиндр стал источником резонансного рассеяния и прекрасно наблюдается с различных сторон. С уменьшением длины цилиндра происходит существенная трансформация спектров $Q_{sca}^{l/r}$. Фоновый спектр $Q_{sca}^{l/r}$ конечного, но достаточно длинного цилиндра ($l/r = 50$, рис. 3, *a*) в точности повторяет спектр Q_{sca}^{∞} , при этом на фон накладывается множество узких малоинтенсивных линий, усиливающихся с уменьшением длины цилиндра ($l/r = 16.7$, рис. 3). В частности, в области невидимости бесконечного цилиндра при $x \approx 0.5$ появляется ряд новых линий, которые фактически нивелируют эффект невидимости в этом спектральном диапазоне. При дальнейшем уменьшении длины l наблюдается ряд интересных эффектов. В первую очередь торцы цилиндра начинают оказывать заметное влияние на основные резонансы Ми TE_{nk} , что приводит к изменению их частот и формы линий в спектрах. Этот эффект легко проследить на примере самого низкочастотного резонанса TE_{01} , частота соответствующей линии в спектрах $Q_{sca}^{l/r}$ смещается от $x = 0.305$ при $\infty < l/r \leq 16$ до $x = 0.333$ при $l/r = 3.57$. Кроме того, с увеличением x существенно возрастает фоновая подставка спектра $Q_{sca}^{l/r}$, которая оказывается заметно выше фоновой подставки спектра Q_{sca}^{∞} (рис. 3, *c, d*). Что касается новых (по отношению к спектру Q_{sca}^{∞}) линий, то следует отметить две тенденции, которые наблюдаются при уменьшении l : во-первых,

новые линии существенно возрастают по интенсивности и, во-вторых, их число уменьшается. Напомним, что каждый новый резонанс связан с числом полувольт, которое укладывается по длине цилиндра. Поэтому у короткого цилиндра в низкочастотной области спектра, которая соответствует большим длинам волн λ , число собственных мод меньше, чем у длинного цилиндра. Из расчетов спектров $Q_{sca}^{l/r}$, выполненных с малым шагом по параметру l/r , следует, что при некоторых соотношениях длины и радиуса цилиндра эффект невидимости в области $x \approx 0.5$ сохраняется, как например при $l/r = 3.57$ (рис. 3, *d*). При этом следует отметить сужение спектральной области слабого рассеяния по сравнению со случаем бесконечного цилиндра.

4. Заключение

Теоретически рассмотрен эффект невидимости однородного диэлектрического цилиндра конечной длины. В случае бесконечного цилиндра рассеяние электромагнитных волн в плоскости xu , перпендикулярной оси цилиндра z , определяется разложением в ряд по цилиндрическим гармоникам и описывается коэффициентами Лоренца–Ми. Ранее была продемонстрирована интерференционная природа резонансного рассеяния Ми, которая интерпретируется в рамках модели Фано [13]. Рассеяние Ми проявляется в виде каскадов резонансных линий различной формы, каждая из которых описывается классической формулой Фано. В силу особенностей резонанса Фано интегральное сечение рассеяния оказывается малым в определенных спектральных диапазонах, при этом цилиндр практически не виден стороннему наблюдателю. Переход к цилиндру с конечной длиной существенно меняет картину рассеяния. Появляются многочисленные узкие резонансные линии, с уменьшением длины цилиндра их интенсивность возрастает, а число уменьшается. В настоящей работе исследована трансформация спектров рассеяния в первой по частоте области невидимости бесконечного цилиндра вблизи $x \sim 0.5$. В этой области в спектре длинного цилиндра ($l \gg r$) появляется гребенка новых узких линий и эффект невидимости пропадает, однако с уменьшением l удается подобрать такие соотношения между длиной и радиусом цилиндра, при которых эффект невидимости восстанавливается.

Авторы благодарят А.А. Каплянско, Ю.С. Кившаря и П.А. Белова за обсуждение и всестороннюю поддержку работы.

Список литературы

- [1] J.B. Pendry, D. Schurig, D.R. Smith. *Science* **312**, 1780 (2006).
- [2] U. Leonhardt, T.G. Philbin. *Prog. Opt.* **53**, 69 (2009).
- [3] А.В. Кильдишев, В.М. Шалаев. *УФН* **181**, 59 (2011).
- [4] U. Leonhardt. *Science* **312**, 1777 (2006).
- [5] U. Leonhardt. *New J. Phys.* **8**, 118 (2006).

- [6] A.V. Kildishev, W. Cai, U.K. Chettiar, V.M. Shalaev. *New J. Phys.* **10**, 115 029 (2008).
- [7] W. Cai, U.K. Chettiar, A.V. Kildishev, V.M. Shalaev. *Nature Photon.* **1**, 224 (2007).
- [8] U. Leonhardt, T.G. Philbin. *New J. Phys.* **8**, 247 (2006).
- [9] M.V. Rybin, D.S. Filonov, P.A. Belov, Y.S. Kivshar, M.F. Limonov. *Sci. Rep.* **5**, 8774 (2015).
- [10] C.F. Bohren, D.R. Huffman. *Absorption and scattering of light by small particles.* Wiley-VCH, (1998). 544 p.
- [11] H.C. van de Hulst. *Light scattering by small particles.* Dover Publ. (1957). 470 p.
- [12] J.A. Stratton. *Electromagnetic theory.* Wiley (2007). V. 33. 640 p.
- [13] M.V. Rybin, K.B. Samusev, I.S. Sinev, G. Semouchkin, E. Semouchkina, Yu.S. Kivshar, M.F. Limonov. *Opt. Exp.* **21**, 30 107 (2013).
- [14] М.В. Рыбин, И.С. Синев, К.Б. Самусев, М.Ф. Лимонов. *ФТТ* **56**, 560 (2014).
- [15] U. Fano. *Phys. Rev.* **124**, 1866 (1961).
- [16] S. Fan, J.D. Joannopoulos. *Phys. Rev. B* **65**, 235 112 (2002).
- [17] B. Friedl, C. Thomsen, M. Cardona. *Phys. Rev. Lett.* **65**, 915 (1990).
- [18] M. Limonov, S. Lee, S. Tajima, A. Yamanaka. *Phys. Rev. B* **66**, 054 509 (2002).
- [19] M.I. Tribelsky, S. Flach, A.E. Miroshnichenko, A.V. Gorbach, Y.S. Kivshar. *Phys. Rev. Lett.* **100**, 043 903 (2008).
- [20] M.V. Rybin, A.B. Khanikaev, M. Inoue, K.B. Samusev, M.J. Steel, G. Yushin, M.F. Limonov. *Phys. Rev. Lett.* **103**, 023 901 (2009).
- [21] N. Verellen, Y. Sonnefraud, H. Sobhani, F. Hao, V.V. Moschchalkov, P.V. Dorpe, P. Nordlander, S.A. Maier. *Nano Lett.* **9**, 1663 (2009).
- [22] M.V. Rybin, A.B. Khanikaev, M. Inoue, A.K. Samusev, M.J. Steel, G. Yushin, M.F. Limonov. *Photon. Nanostruct.* **8**, 86 (2010).
- [23] A.E. Miroshnichenko, S. Flach, Y.S. Kivshar. *Rev. Mod. Phys.* **82**, 2257 (2010).
- [24] B. Luk'yanchuk, N.I. Zheludev, S.A. Maier, N.J. Halas, P. Nordlander, H. Giessen, C.T. Chong. *Nature Mater.* **9**, 707 (2010).
- [25] A.N. Poddubny, M.V. Rybin, M.F. Limonov, Y.S. Kivshar. *Nature Commun.* **3**, 914 (2012).
- [26] Z. Fang, Y. Wang, Z. Liu, A. Schlather, P.M. Ajayan, F.H. Koppens, P. Nordlander, N.J. Halas. *ACS Nano* **6**, 10 222 (2012).
- [27] A.E. Miroshnichenko, Y.S. Kivshar. *Nano Lett.* **12**, 6459 (2012).
- [28] Y. Francescato, V. Giannini, S.A. Maier. *ACS Nano* **6**, 1830 (2012).
- [29] S.H. Mousavi, I. Kholmanov, K.B. Alici, D. Purtseladze, N. Arju, K. Tatar, D.Y. Fozdar, J.W. Suk, Y. Hao, A.B. Khanikaev, S. Ruoff, G. Shvets. *Nano Lett.* **13**, 1111 (2013).
- [30] M.V. Rybin, P.V. Kapitanova, D.S. Filonov, A.P. Slobozhnyuk, P.A. Belov, Yu.S. Kivshar, M.F. Limonov. *Phys. Rev. B* **88**, 205 106 (2013).
- [31] L. Lorenz. *Vidensk. Selsk. Skrifter* **6**, 1 (1890).
- [32] G. Mie. *Ann. Phys.* **330**, 377 (1908).
- [33] H.R. Zelsmann. *J. Mol. Struct.* **350**, 95 (1995).
- [34] Дж. Джексон. *Классическая электродинамика.* Пер. с англ. Мир, М. (1965). 703 с.
- [35] Lord Rayleigh. *Phil. Mag.* **20**, 1001 (1910).