

01
Влияние флексоэлектрического эффекта на ориентационные переходы в ферронематических жидких кристаллах

© А.Н. Захлевных, Д.А. Петров

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990 Пермь, Россия
e-mail: anz@psu.ru

(Поступило в Редакцию 30 октября 2014 г.)

Исследовано влияние индуцированной внешними электрическим и магнитным полями флексоэлектрической поляризации в ферронематическом жидком кристалле на ориентационные переходы между однородной и неоднородной фазами. Найдены зависимости поля перехода Фредерикса и поля насыщения от материальных параметров ферронематика. Исследованы бифуркационные диаграммы ориентационных фаз. Показано, что ориентационные переходы могут быть переходами первого или второго рода в зависимости от значения параметра сегрегации дисперсной фазы.

Введение

Как известно [1], жидкие кристаллы (ЖК) обладают высокой чувствительностью к внешним полям различной природы. Если магнитное поле \mathcal{H} приложено перпендикулярно оптической оси (директору \mathbf{n}) слоя нематического жидкого кристалла (НЖК) с положительной анизотропией χ_a диамагнитной восприимчивости, то однородная ориентация теряет устойчивость и направление директора искажается в полях \mathcal{H} , больших некоторого порогового значения, называемого полем Фредерикса. Этот эффект называется переходом Фредерикса [1]. Критическое поле такого перехода зависит от толщины слоя и материальных параметров НЖК и для ячеек типичных размеров довольно велико (порядка $10^5 - 10^6 \text{ A} \cdot \text{m}^{-1}$) вследствие малости χ_a ($\sim 10^{-5} - 10^{-6}$). С целью снижения управляющих магнитных полей Брошар и де Жен [2] предложили внедрить магнитные частицы в жидкокристаллическую матрицу. Такие магнитные жидкости на основе НЖК получили название ферронематиков (ФН). Если магнитные частицы имеют анизометричную форму (например, иглообразную), упругие взаимодействия вызывают их ориентацию в ЖК-матрице. Эти суспензии, сохраняя все особенности ориентационного поведения НЖК, имеют магнитную восприимчивость, на несколько порядков большую, чем чистые НЖК, что позволяет управлять их текстурой относительно слабым магнитным полем.

Будем полагать, что твердая фаза ФН состоит из однодоменных иглообразных частиц ферромагнетика. Сильная анизометричность частиц приводит к жесткой связи магнитного момента с телом частицы. Обработка частиц поверхностно-активными веществами обеспечивает ориентационную связь их длинных осей с локальным направлением директора \mathbf{n} . Однородное магнитное поле \mathcal{H} вызывает поворот феррочастиц (дипольный механизм ориентации) и, тем самым, искажения поля директора матрицы. Такая ситуация соответствует так называемому коллективному поведению ФН [2], при котором концен-

трация магнитных зерен должна превышать некоторое критическое значение, определяемое характерным размером образца. Меньшие концентрации магнитной фазы приводят лишь к локальным искажениям поля директора вблизи каждой частицы независимо от других.

Для ФН характерно наличие двух механизмов ориентационного отклика на приложенное магнитное поле. Один из них — дипольный (ферромагнитный) механизм обусловлен взаимодействием магнитных моментов μ_α феррочастиц с полем, другой — квадрупольный (диамагнитный) связан с воздействием поля на директор диамагнитной НЖК-матрицы, в то время как в чистых ЖК имеется только квадрупольный механизм. Дипольный механизм линеен по полю, и именно он определяет поведение ФН в слабых полях, что приводит к существенному снижению управляющих магнитных полей. Заметим также, что ввиду ориентационной связи между иглообразными частицами и анизотропной ЖК-матрицей, эти механизмы взаимосвязаны: воздействие поля на магнитные моменты частиц меняет ориентацию директора матрицы, и наоборот.

В отсутствие магнитного поля ФН может быть компенсированным ($\sum \mu_\alpha = 0$, см., например, [3–5]) либо некомпенсированным ($\sum \mu_\alpha \neq 0$), т.е. намагниченным. Ниже мы будем рассматривать ФН, обладающие в отсутствие поля собственной намагниченностью. Они являются оптически анизотропными средами, в то время как обычная магнитная жидкость [6] является анизотропной только в поле.

В большинстве случаев недеформированные нематические ЖК не обладают собственной поляризацией, поскольку электрические дипольные моменты молекул, как правило, локально компенсированы, однако поляризация возникает в них вследствие ориентационно-упругих деформаций. Если же молекулы обладают асимметрией формы (например, грушевидные или баноновидные), то переориентация их дипольных моментов приводит к возникновению искаженной текстуры. Появление электрической поляризации в деформированном нематике

называют флексоэлектрическим эффектом [7], а индуцированный ориентационными деформациями вектор поляризации \mathcal{P} пропорционален градиентам директора

$$\mathcal{P} = e_1 \mathbf{n}(\nabla \mathbf{n}) + e_3 (\nabla \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}.$$

Здесь коэффициенты e_1 и e_3 описывают флексоэлектрические вклады от поперечных (splay) и продольных (bend) деформаций поля директора соответственно. В этом случае в плотности свободной энергии жидкого кристалла появляется дополнительное слагаемое $F_{fl} = -\mathcal{P}\mathcal{E}$, где \mathcal{E} — напряженность приложенного электрического поля. Это выражение связывает электрическое поле и градиенты директора, между тем как в отсутствие флексоэлектрического эффекта имеется только взаимодействие между полем и диэлектрической анизотропией $F_{el} = -\frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_a(\mathbf{n}\mathcal{E})^2$ (здесь ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума, ϵ_a — анизотропия диэлектрической проницаемости ЖК), вызывающее поворот директора, но не его деформации. В последнем случае деформации поля директора возникают опосредованно, как результат конкуренции с силами ориентационной упругости ЖК и его сцеплением с ограничивающими поверхностями.

Взаимодействие между флексоэлектрической поляризацией и внешним электрическим полем приводит в физике жидких кристаллов к многочисленным интересным явлениям, которые не вытекают из обычного для ЖК механизма взаимодействия поля с диэлектрической анизотропией. В частности, известно, что сцепление ЖК с поверхностью играет важную роль во всех устройствах отображения информации, а флексоэлектрический эффект приводит к возникновению дополнительных ориентационно-упругих воздействий на директор не только в объеме образца, но и на ограничивающих поверхностях, приводя к поверхностной поляризации. Мягкие условия сцепления директора с поверхностью усиливают флексоэлектрический эффект.

В настоящей работе анализируется влияние флексоэлектрического эффекта на ориентационные переходы в плоском слое ферронематического ЖК, индуцированные совместным действием электрического и магнитного полей.

1. Свободная энергия и уравнения равновесия

Рассмотрим слой ферронематического жидкого кристалла толщиной L , ограниченный двумя параллельными плоскостями (рис. 1). Направим ось x прямоугольной системы координат вдоль ограничивающих плоскостей, ось z — перпендикулярно плоскости слоя, начало координат поместим в середину слоя. Сцепление директора \mathbf{n} с ограничивающими поверхностями будем предполагать мягким и планарным (оси легкого ориентирования на поверхности слоя \mathbf{n}_0 параллельны оси x). Электрическое $\mathcal{E} = (0, 0, \mathcal{E})$ и магнитное $\mathcal{H} = (0, 0, \mathcal{H})$ поля направим

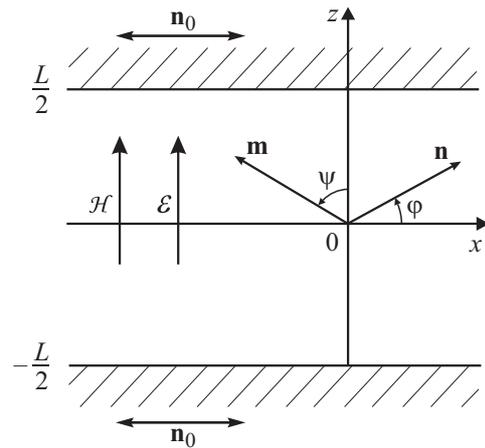


Рис. 1. Ориентация ФН в слое в электрическом \mathcal{E} и магнитном \mathcal{H} полях.

перпендикулярно слою в положительном направлении оси z .

Будем полагать анизотропии диэлектрической проницаемости ϵ_a и диамагнитной восприимчивости χ_a положительными. В этом случае включение электрического или магнитного полей вызывает поворот директора в направлении поля. Пусть магнитные частицы однородно распределены по объему слоя и внедрены в ЖК-матрицу таким образом, что в отсутствие внешних полей направления директора и намагниченности ортогональны; такое сцепление частиц с матрицей принято называть гомеотропным. Включение магнитного поля вызывает поворот намагниченности, чему, однако, препятствует директор, также стремящийся ориентироваться вдоль поля. Это значит, что в рассматриваемом случае магнитное поле оказывает конкурирующее воздействие на магнитные частицы и директор. Целью работы является изучение равновесных ориентационных явлений в ФН в сонаправленных электрическом и магнитном полях. В такой постановке задача решена в работах [8,9]; в настоящей работе мы изучаем влияние флексоэлектрических деформаций на ориентационное упорядочение ФН и переход Фредерикса в параллельных электрическом и магнитном полях.

Равновесному состоянию ФН отвечает минимум свободной энергии $\mathcal{F} = \int F_V dV + \oint F_S dS$. Здесь объемная плотность свободной энергии в электрическом и магнитном полях с мягким сцеплением магнитных частиц с ЖК-матрицей имеет вид [2,10]

$$F_V = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6 + F_7, \quad (1)$$

$$F_1 = \frac{1}{2} [K_1(\nabla \mathbf{n})^2 + K_2(\mathbf{n}(\nabla \times \mathbf{n}))^2 + K_3(\mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{n}))^2],$$

$$F_2 = -\frac{1}{2}\mu_0\chi_a(\mathbf{n}\mathcal{H})^2, \quad F_3 = -\mu_0M_s f \mathbf{m}\mathcal{H},$$

$$F_4 = \frac{k_B T}{v} f \ln f, \quad F_5 = \frac{W_p}{d} f(\mathbf{nm})^2, \quad F_6 = -\frac{1}{2}\epsilon_0\epsilon_a(\mathbf{n}\mathcal{E})^2,$$

$$F_7 = -e_1(\mathcal{E}\mathbf{n})(\nabla \mathbf{n}) - e_3\mathcal{E}[(\nabla \times \mathbf{n}) \times \mathbf{n}].$$

Здесь K_1, K_2 и K_3 — модули ориентационной упругости НЖК (константы Франка), μ_0 — магнитная проницаемость вакуума, M_s — намагниченность насыщения материала магнитных частиц, $f(z)$ — локальная объемная плотность магнитных частиц в суспензии, \mathbf{m} — единичный вектор намагниченности суспензии, v — объем магнитной частицы, d — диаметр магнитной частицы, k_B — постоянная Больцмана, T — температура, W_p — поверхностная плотность энергии сцепления молекул НЖК с поверхностью магнитных частиц.

Обсудим вклады в выражении (1). Здесь F_1 представляет собой объемную плотность свободной энергии ориентационно-упругих деформаций поля директора (потенциал Озеена–Франка), F_2 — объемная плотность свободной энергии взаимодействия ЖК-матрицы с магнитным полем описывает квадрупольный (диамагнитный) механизм взаимодействия поля с ФН, F_3 — объемная плотность свободной энергии взаимодействия магнитных частиц с магнитным полем (дипольный механизм). Слагаемое F_4 — вклад энтропии смешения идеального раствора магнитных частиц в объемную плотность свободной энергии. Здесь мы предполагаем, что объемная доля магнитной примеси достаточно мала ($f \ll 1$), поэтому можно пренебречь межчастичными магнитными диполь-дипольными взаимодействиями, но превосходит, конечно, критическую концентрацию, необходимую для создания коллективного поведения суспензии [2]. Слагаемое F_5 описывает энергию ориентационного взаимодействия вытянутых частиц дисперсной фазы в нематической матрице [10], F_6 — объемная плотность свободной энергии взаимодействия НЖК с электрическим полем, наконец, F_7 описывает объемную плотность свободной энергии флексоэлектрических деформаций поля директора.

Поверхностная плотность свободной энергии F_5 взаимодействия ЖК-матрицы с ограничивающими поверхностями описывается выражением [11]

$$F_5 = \frac{W^-}{2} (\mathbf{n}^- \times \mathbf{n}_0)^2 + \frac{W^+}{2} (\mathbf{n}^+ \times \mathbf{n}_0)^2, \quad (2)$$

где W^+ и W^- — энергии сцепления НЖК с верхней и нижней границами слоя соответственно. При конечных и положительных W^+ и W^- минимум выражения (2) достигается, когда направления директора \mathbf{n} на верхней (\mathbf{n}^+) и нижней (\mathbf{n}^-) границах слоя параллельны направлению (\mathbf{n}_0) оси легкого ориентирования, что отвечает мягкому планарному сцеплению директора с границами слоя.

Будем полагать сцепление молекул НЖК с магнитными частицами гомеотропным ($W_p > 0$). В этом случае в отсутствие внешних полей минимуму энергии F_5 отвечает взаимно перпендикулярная ориентация намагниченности и директора ($\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$). При $\mathcal{H} = 0$ это условие определяет плоскость, перпендикулярную директору \mathbf{n} , в которой расположены магнитные моменты $\boldsymbol{\mu}$ частиц. Если ФН приготовлен путем охлаждения из изотропной

фазы в отсутствие магнитного поля, его макроскопическая намагниченность отсутствует $\Sigma \alpha \boldsymbol{\mu}_\alpha = 0$, так как направления магнитных моментов частиц вырождены в плоскости, перпендикулярной директору (компенсированный ферронематик [3–5]). Это вырождение можно снять, если производить охлаждение суспензии из изотропной фазы в магнитном поле, тогда ниже точки перехода в нематическую фазу ФН сохраняет свою намагниченность при выключении поля из-за ориентационной упорядоченности ЖК-матрицы. Именно в этом случае слагаемое F_5 минимизируется при $\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$. Из-за ортогональности намагниченности и директора возникает конкуренция между магнитным дипольным механизмом ориентации [$\sim \mu_0 M_s f \mathbf{m} \mathcal{H}$] и магнитным [$\sim \mu_0 \chi_a (\mathbf{n} \mathcal{H})^2$] и электрическим [$\sim \varepsilon_0 \varepsilon_a (\mathbf{n} \mathcal{E})^2$] квадрупольными механизмами.

В рассматриваемой геометрии (рис. 1) выражения для директора и единичного вектора намагниченности могут быть записаны в виде

$$\mathbf{n} = (\cos \varphi(z), 0, \sin \varphi(z)), \quad \mathbf{m} = (-\sin \psi(z), 0, \cos \psi(z)). \quad (3)$$

Подставляя выражения (3) в объемный (1) и поверхностный (2) вклады в свободную энергию, получим полную свободную энергию ФН в электрическом и магнитном полях

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = & \int \left[\frac{1}{2} (K_1 \cos^2 \varphi + K_3 \sin^2 \varphi) \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right. \\ & - \frac{1}{2} (\mu_0 \chi_0 \mathcal{H}^2 + \varepsilon_0 \varepsilon_a \mathcal{E}^2) \sin^2 \varphi - \mu_0 M_s f \mathcal{H} \cos \psi + \frac{k_B T}{v} f \ln f \\ & \left. + \frac{W_p}{d} f \sin^2(\varphi - \psi) - \frac{1}{2} \mathcal{E} (e_1 + e_3) \frac{d\varphi}{dz} \sin 2\varphi \right] dV \\ & + \oint_s \left(\frac{W^-}{2} \sin^2 \varphi^- + \frac{W^+}{2} \sin^2 \varphi^+ \right) dS. \quad (4) \end{aligned}$$

Здесь φ^\pm — углы между директором и осью x на верхней (+) и нижней (–) границах слоя соответственно.

Выберем толщину слоя L в качестве единицы длины и определим безразмерную координату $\tilde{z} = z/L$ (в дальнейшем знак тильда будем опускать). Введем безразмерные напряженности магнитного и электрического полей

$$H = \mathcal{H} L \sqrt{\frac{\mu_0 \chi_a}{K_1}}, \quad E = \mathcal{E} L \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_a}{K_1}} \quad (5)$$

и безразмерные параметры

$$\begin{aligned} b = M_s \bar{f} L \sqrt{\frac{\mu_0}{\chi_a K_1}}, \quad \kappa = \frac{k_B T \bar{f} L^2}{K_1 v}, \quad \omega^\pm = \frac{W^\pm L}{K_1}, \\ \sigma = \frac{W_p \bar{f} L^2}{K_1 d}, \quad k = \frac{K_3}{K_1}, \quad a = \frac{e_1 + e_3}{\sqrt{K_1 \varepsilon_0 \varepsilon_a}}. \quad (6) \end{aligned}$$

Здесь $\bar{f} = Nv/V$ — средняя объемная доля дисперсной фазы ФН. В качестве единицы измерения магнитного поля в выражении (5) выбрана величина

$\mathcal{H}_q = L^{-1} \sqrt{K_1/(\mu_0 \chi_a)}$. При $\mathcal{H} \approx \mathcal{H}_q$ плотность энергии ориентационно-упругих деформаций F_1 и диамагнитный вклад F_2 оказываются одного порядка. В случае $\mathcal{H} \gtrsim \mathcal{H}_q$ ориентационные искажения в образце вызываются преимущественно диамагнитной анизотропией ЖК-матрицы (квадрупольный механизм), т.е. происходит индуцированный магнитным полем переход Фредерикса в чистом НЖК. Сопоставляя таким же образом F_1 с плотностью энергии влияния поля на намагниченность F_3 , получаем другое характерное поле $\mathcal{H}_d = K_1/(\mu_0 M_s \bar{f} L^2)$. При $\mathcal{H} \gtrsim \mathcal{H}_d$ искажения директора вызваны взаимодействием магнитных моментов частиц с магнитным полем (дипольный механизм). Безразмерный параметр $b = \mathcal{H}_q/\mathcal{H}_d$, как видно из определения (6), представляет собой отношение этих двух полей [12] и задает характер взаимодействия ФН с магнитным полем. При $b > 1$, когда $\mathcal{H}_q > \mathcal{H}_d$, искажения структуры ФН вызываются дипольным механизмом, а при $b < 1$ ($\mathcal{H}_q < \mathcal{H}_d$) — квадрупольным.

В качестве единицы измерения электрического поля выбрана величина $\mathcal{E}_q = L^{-1} \sqrt{K_1/(\epsilon_0 \epsilon_a)}$, характеризующая поле электрического перехода Фредерикса в чистом нематике. Она находится из сопоставления в (1) вклада F_1 с диэлектрическим вкладом F_6 в свободную энергию.

Мы определили также в (6) сегрегационный параметр κ , представляющий собой квадрат отношения двух характерных длин $\kappa = (L/L_S)^2$ толщины слоя L и сегрегационной длины $L_S = (vK_1/k_B T f)^{1/2}$, которая задает характерный масштаб области концентрационного перераспределения магнитной фазы (так называемый эффект сегрегации [2]). При $\kappa \gg 1$ распределение магнитных частиц в ФН близко к однородному, а при $\kappa \lesssim 1$ неоднородность в распределении магнитных частиц становится заметной [12].

Безразмерный параметр σ характеризует энергию сцепления молекул ЖК с поверхностью магнитных частиц [9], ω^\pm — энергию сцепления директора с границами слоя, параметр k определяет отношение упругих модулей, безразмерный параметр a характеризует влияние флексоэлектрических деформаций.

В принятых обозначениях (6) выражение (4) для безразмерной полной свободной энергии $\tilde{\mathcal{F}} = \mathcal{F}L/(K_1 S)$ ферронематика в электрическом и магнитном полях (S — площадь поверхности пластин слоя) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{F}} = & \int_{-1/2}^{1/2} \left[\frac{1}{2} \mathcal{K}(\varphi) \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 - \frac{aE}{2} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right) \sin 2\varphi \right. \\ & - \frac{1}{2} (H^2 + E^2) \sin^2 \varphi - bHg \cos \psi + \kappa g \ln g \\ & \left. + \sigma g \sin^2(\varphi - \psi) \right] dz + \frac{1}{2} \omega^- \sin^2 \varphi^- + \frac{1}{2} \omega^+ \sin^2 \varphi^+. \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь введены обозначения

$$g(z) = f(z)/\bar{f}, \quad (8)$$

$$\mathcal{K}(\varphi) = \cos^2 \varphi + k \sin^2 \varphi. \quad (9)$$

Свободная энергия (7) представляет собой функционал относительно $\varphi(z)$ и $g(z)$; термодинамически устойчивым состоянием системы отвечает минимум этого функционала. Производя минимизацию по $\varphi(z)$ и $g(z)$, получим уравнения

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\varphi) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + \frac{1}{2} \frac{d\mathcal{K}(\varphi)}{d\varphi} \left(\frac{d\varphi}{dz} \right)^2 + \frac{1}{2} (H^2 + E^2) \sin 2\varphi \\ - \sigma g \sin 2(\varphi - \psi) = 0, \end{aligned} \quad (10)$$

$$bH \sin \psi - \sigma \sin 2(\varphi - \psi) = 0. \quad (11)$$

Выражение (11) называют уравнением связи [10]; оно определяет зависимость между углами ориентации намагниченности и директора.

Минимизация функционала (7) по $g(z)$ с учетом условия постоянства числа частиц в системе

$$\int f dV = Nv$$

приводит к выражениям

$$g = Q \exp \left\{ \frac{bH}{\kappa} \cos \psi - \frac{\sigma}{\kappa} \sin^2(\varphi - \psi) \right\}, \quad (12)$$

$$Q^{-1} = \int_{-1/2}^{1/2} \exp \left\{ \frac{bH}{\kappa} \cos \psi - \frac{\sigma}{\kappa} \sin^2(\varphi - \psi) \right\} dz,$$

которые описывают равновесное распределение примесных частиц в слое ФН. Как видно из (12), наличие магнитного поля приводит к перераспределению магнитной примеси в слое (эффект сегрегации [2]): частицы мигрируют в те области слоя, где минимальна энергия их взаимодействия с внешними полями и ЖК-матрицей. При $\kappa \gg 1$ эффект сегрегации частиц несущественен, так как в этом случае $g(z) \rightarrow 1$, или $f(z) \rightarrow \bar{f}$, т.е. локальные значения объемной доли частиц остаются близкими к среднему значению. Наоборот, при $\kappa \lesssim 1$ сегрегационный эффект приводит к сильному различию концентрации магнитных частиц в различных областях слоя.

Варьирование поверхностных вкладов в (7) приводит к граничным условиям

$$\left(\pm \frac{\partial F_V}{\partial \frac{\partial \varphi}{\partial z}} + \frac{\partial F_S}{\partial \varphi} \right) \Big|_{z=\pm 1/2} = 0,$$

где знак первого слагаемого выбирается в зависимости от взаимной ориентации внешней нормали к границам слоя и направления оси z . Используя (4), находим

$$\mathcal{K}(\varphi^+) \frac{d\varphi}{dz} \Big|_{z=+1/2} - \frac{1}{2} (aE - \omega^+) \sin 2\varphi^+ = 0, \quad (13)$$

$$\mathcal{K}(\varphi^-) \frac{d\varphi}{dz} \Big|_{z=-1/2} - \frac{1}{2} (aE + \omega^-) \sin 2\varphi^- = 0, \quad (14)$$

где введено обозначение $\varphi^\pm = \varphi|_{z=\pm 1/2}$ для углов ориентации директора на верхней (+) и нижней (-) границах слоя.

Как видно из системы уравнений (10)–(14), флексоэлектрические вклады содержатся только в граничных условиях (13) и (14). Флексоэлектрические деформации создают асимметрию в граничных условиях и, следовательно, во всем объеме ФН. Из (13) и (14) видно, что слагаемое aE , ответственное за флексоэффект, можно рассматривать как добавку к поверхностной энергии. В случае $E > 0$ флексоэффект стабилизирует ориентацию директора на нижней границе слоя, и дестабилизирует ее на верхней границе. Заметим, что флексоэлектрический вклад F_7 в выражении (1) для объемной плотности свободной энергии линеен по градиентам и при интегрировании по объему сводится к поверхностному вкладу. Это позволяет включить флексоэлектрический вклад в эффективную поверхностную энергию; выражение (2) в этом случае примет вид

$$F_S^{ef} = \frac{W_{ef}^-}{2} (\mathbf{n}^- \times \mathbf{n}_0)^2 + \frac{W_{ef}^+}{2} (\mathbf{n}^+ \times \mathbf{n}_0)^2, \quad (15)$$

где введено обозначение для эффективных энергий сцепления

$$W_{ef}^\pm = W^\pm \mp \mathcal{E}(e_1 + e_3). \quad (16)$$

Для чистого нематика с аналогичной геометрией этот эффект был рассмотрен в работах [13–15], где показано, что в случае $W^+ = W^-$ происходит электрический переход Фредерикса, усиленный флексоэффектом и не зависящий от полярности ($\pm \mathcal{E}$) приложенного электрического поля, а в случае $W^+ \neq W^-$ переход зависит от полярности.

Таким образом, возникающая из-за флексоэлектрических деформаций поверхностная поляризация изменяет симметрию решения даже при $\omega^- = \omega^+$. Положение максимального отклонения директора от оси легкого ориентирования

$$\frac{d\varphi}{dz} \Big|_{z=z^*} = 0 \quad (17)$$

смещается из середины слоя ($z = 0$) в точку $z = z^*$, значение которой, а также угла $\varphi^* \equiv \varphi|_{z=z^*}$ максимального отклонения директора и углов поворота директора на верхней и нижней границах слоя (φ^\pm), определяются параметрами a , ω и напряженностями полей.

Система уравнений равновесия (10)–(14) допускает решения $\varphi = \psi = 0$ и $\varphi = \pi/2$, $\psi = 0$ отвечающие однородным фазам ФН. Первое из них описывает невозмущенное состояние, для которого директор направлен вдоль оси легкого ориентирования, а намагниченность перпендикулярна директору (гомеотропная фаза ФН [16], $\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$), второе — состоянию ориентационного и магнитного насыщения, для которого директор и намагниченность параллельны и направлены вдоль

направления внешних полей (планарная фаза ФН [16], $\mathbf{n} \parallel \mathbf{m}$).

Наряду с однородными решениями система уравнений равновесия допускает неоднородные решения (угловая фаза ФН [16], в которой угол между директором и намагниченностью отличен от нуля и $\pi/2$). Для их получения умножим уравнение (10) на $d\varphi/dz$ и вычтем из него уравнение (11), умноженное на $gd\psi/dz$. Это позволяет найти первый интеграл

$$\frac{d\varphi}{dz} = G^{1/2}(\varphi, \psi) \mathcal{K}^{-1/2}(\varphi), \quad z \in \left[-\frac{1}{2}, z^*\right], \quad (18)$$

$$\frac{d\varphi}{dz} = -G^{1/2}(\varphi, \psi) \mathcal{K}^{-1/2}(\varphi), \quad z \in \left[z^*, +\frac{1}{2}\right]. \quad (19)$$

Здесь введены обозначения

$$G(\varphi, \psi) = (H^2 + E^2)(\cos^2 \varphi - \cos^2 \varphi^*) - 2\kappa(g - g^*),$$

$$g^* = g(\varphi^*, \psi^*), \quad \varphi|_{z=z^*} = \varphi^*, \quad \psi|_{z=z^*} = \psi^*$$

для функции распределения частиц и углов отклонения директора и намагниченности при значении $z = z^*$, определенном соотношением (17).

Граничные условия (13) и (14) с учетом (18) и (19) примут вид

$$\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}(\varphi^-) G^{\frac{1}{2}}(\varphi^-, \psi^-) = -\frac{1}{2} (aE + \omega^-) \sin 2\varphi^-, \quad (20)$$

$$\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}(\varphi^+) G^{\frac{1}{2}}(\varphi^+, \psi^+) = \frac{1}{2} (aE - \omega^+) \sin 2\varphi^+. \quad (21)$$

Интегрируя (18) и (19), получим

$$z + \frac{1}{2} = \int_{\varphi^-}^{\varphi} \mathcal{K}^{\frac{1}{2}}(\varphi) G^{-\frac{1}{2}}(\varphi, \psi) d\varphi, \quad (22)$$

$$-z + \frac{1}{2} = - \int_{\varphi}^{\varphi^+} \mathcal{K}^{\frac{1}{2}}(\varphi) G^{-\frac{1}{2}}(\varphi, \psi) d\varphi. \quad (23)$$

Построенная система уравнений ориентационного и магнитного состояний позволяет изучить влияние магнитного и электрического полей на ориентационную структуру и магнитные свойства ФН.

Для типичных значений материальных параметров НЖК и магнитных частиц [9,10,15] $\chi_a = 2.1 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_a = 13.5$, $e_1 + e_3 = 10^{-12} - 10^{-11} \text{ C m}^{-1}$, $K_1 = 6.4 \cdot 10^{-12} \text{ N}$, $K_3 = 1.0 \cdot 10^{-11} \text{ N}$, $T = 298 \text{ K}$, $W^\pm = 10^{-6} - 10^{-5} \text{ N m}^{-1}$, $W_p = 10^{-6} - 10^{-4} \text{ N m}^{-1}$, $\bar{f} = 2.0 \cdot 10^{-7}$, $M_s = 5 \cdot 10^5 \text{ A m}^{-1}$, $d = 7.5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$, $v = 8.8 \cdot 10^{-22} \text{ m}^3$ и полагая $L = 250 \mu\text{m}$, получаем следующую оценку безразмерных величин (6): $\kappa \approx 10^{-2}$, $k \approx 1$, $\sigma \approx 10^{-2} - 1$, $b \approx 10$, $\omega^\pm \approx 10^1 - 10^2$, $a \approx 10^{-1} - 1$. Малые значения параметра κ свидетельствуют о том, что сегрегационный эффект существенен.

2. Поле Фредерикса

Уравнения (10)–(12) и граничные условия (13), (14) допускают решение $\varphi(z) \equiv \psi(z) \equiv 0$, которому соответствует однородная планарная ориентация директора по всему слою ($\mathbf{n} \equiv \mathbf{n}_0$) с гомеотропным сцеплением директора и намагниченности ($\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$). Такое решение имеет место не только в случае, когда внешние электрическое и магнитное поля отсутствуют ($E = H = 0$), но и в присутствии полей. Оно становится, однако, неустойчивым и сменяется неоднородным решением (переход Фредерикса), когда электрическое или магнитное поле достигнет некоторого порогового значения [1], называемого полем перехода Фредерикса E_F и H_F . Переход Фредерикса является результатом конкуренции ориентационной упругости ЖК-матрицы, сцепления директора с границами слоя, сцепления молекул ЖК с магнитными частицами, стремящихся сохранить однородное состояние, и внешних электрического и магнитного полей, вызывающих отклонения от исходной ориентации.

Когда напряженности полей близки к пороговым значениям, вызываемые ими искажения ориентации частиц и директора слабо отличаются от однородного распределения, т.е. $\varphi(z) \ll 1$, $\psi(z) \ll 1$. В низшем порядке разложения уравнений (10)–(12) по малым φ и ψ приходим к уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dz^2} + \lambda^2\varphi = 0,$$

где введено обозначение

$$\lambda^2 = E_F^2 + H_F^2 - \frac{2\sigma bH_F}{2\sigma + bH_F}. \quad (24)$$

Используя далее граничные условия (13) и (14), получим

$$\varphi(z) = \varphi_0(\cos \lambda z + \sin \lambda z \operatorname{tg} \lambda z^*), \quad (25)$$

где $\varphi(z)|_{z=0} \equiv \varphi_0$,

$$\operatorname{tg} \lambda z^* = \frac{2aE_F + \omega^- - \omega^+}{2\lambda + (\omega^- + \omega^+) \operatorname{tg} \frac{\lambda}{2}}. \quad (26)$$

Выражение (26) позволяет найти значение поперечной координаты z^* , для которой угол поворота директора максимален, как функцию параметров задачи (в общем случае $z^* \neq 0$). Как видно из (26), в отсутствие флексоэффекта ($z = 0$) и одинаковом сцеплении на границах ($\omega^- = \omega^+ = \omega$) или при жестком сцеплении ($\omega \rightarrow \infty$) максимальный угол отклонения директора отвечает середине слоя ($z^* = 0$), что объясняется восстановлением симметрии граничных условий (20) и (21).

Угол ориентации директора в центре слоя связан с максимальным углом отклонения директора от оси легкого ориентирования соотношением

$$\varphi_0 = \varphi_F^* \cos \lambda z^*, \quad (27)$$

тогда решение (25) можно записать в следующем виде

$$\varphi(z) = \varphi_F^* \cos \lambda(z - z^*). \quad (28)$$

Выражение для пороговых полей перехода Фредерикса следует из условия существования нетривиального решения (28):

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\lambda(\omega^- + \omega^+)}{\lambda^2 + (aE_F - \omega^+)(aE_F + \omega^-)}. \quad (29)$$

Здесь λ определено формулой (24). Это уравнение позволяет найти порог ориентационного перехода из однородной фазы ФН в неоднородную при совместном действии электрического и магнитного полей.

В частном случае одинаковых энергий сцепления на нижней и верхней границах слоя ($\omega^- = \omega^+ \equiv \omega$) уравнение (29) примет вид

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{2\lambda\omega}{\lambda^2 + (aE_F)^2 - \omega^2}. \quad (30)$$

Как видно из (30), при $\omega^- = \omega^+ \equiv \omega$ переход Фредерикса не зависит от полярности приложенного поля [13–15].

В чистом, т.е. беспримесном ($\bar{f} = 0$), нематике выражение (24) примет вид $\lambda^2 = E_F^2 + H_F^2$, а уравнение (29) не изменится. В отсутствие флексоэффекта ($a = 0$) для чистого нематика уравнение (29) упрощается

$$\operatorname{tg} \lambda = \frac{\lambda(\omega^- + \omega^+)}{\lambda^2 - \omega^- \omega^+}. \quad (31)$$

Эти результаты совпадают при $H = 0$ с полученными ранее в работе [15]. В случае жесткого сцепления директора с ограничивающими поверхностями ($\omega^- = \omega^+ = \omega \gg 1$) уравнение для поля Фредерикса примет простой вид $\pi^2 = E_F^2 + H_F^2$.

Будем полагать в дальнейшем электрическое поле заданным, а все изменения ориентационной и магнитной структуры связанными с вариацией магнитного поля. Переход от однородной структуры к неоднородной в этом случае называют магнитным переходом Фредерикса.

2.1. Флексоэффект отсутствует

Рассмотрим вначале магнитный переход Фредерикса в заданном электрическом поле при условии мягкого сцепления директора с ограничивающими поверхностями (ω^- и ω^+ конечны) в отсутствие флексоэффекта ($a = 0$). Результаты численного решения системы уравнений (24) и (31) для одинаковых энергий сцепления на нижней и верхней границах слоя ($\omega^- = \omega^+ \equiv \omega$) показаны на рис. 2.

Кривые на этом рисунке определяют порог перехода Фредерикса в ФН при совместном действии электрического и магнитного полей. Области под кривыми отвечают невозмущенному состоянию системы, т.е. однородной планарной ориентации директора ($\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$) и

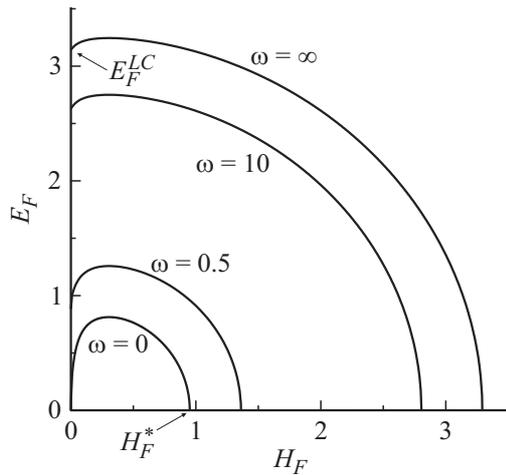


Рис. 2. Фазовая диаграмма электрического E_F и магнитного H_F полей перехода Фредерикса для $b = 10$, $\sigma = 0.5$, $a = 0$ и различных значений энергии сцепления ω директора с границами слоя ($E_F^{LC} = \pi$).

ортогональной ему намагниченности ($\mathbf{n} \perp \mathbf{m}$). Области над кривыми отвечают неоднородному состоянию ФН. Как видно, в отсутствие магнитного поля ($H = 0$) увеличение энергии сцепления с границами слоя приводит к росту напряженности электрического поля, при котором происходит переход из однородного состояния в неоднородное. Наибольшее значение электрического поля, необходимого для искажения ориентационной структуры ФН, отвечает жесткому сцеплению директора с границами слоя (кривая $\omega = \infty$ на рис. 2), рассмотренному в работах [8,9]. Для $\omega = \infty$ в отсутствие магнитного поля оно равно электрическому полю перехода Фредерикса в чистом нематике ($E_F^{LC} = \pi$ [1]). В этом случае выражения (24) и (29) для пороговых полей перехода Фредерикса сводятся к уравнению

$$E_F^2 + H_F^2 - \frac{2\sigma b H_F}{2\sigma + b H_F} = \pi^2. \quad (32)$$

В частном случае отсутствия сцепления с ограничивающими поверхностями ($\omega^- = \omega^+ = 0$) система уравнений (24) и (29) примет вид

$$E_F^2 + H_F^2 - \frac{2\sigma b H_F}{2\sigma + b H_F} = 0. \quad (33)$$

Этому уравнению отвечает кривая $\omega = 0$ на рис. 2. Из выражения (33) видно, что в отсутствие магнитного поля ($H = 0$) ФН переходит в неоднородное состояние при сколь угодно слабых электрических полях, в то время как в отсутствие электрического поля ($E = 0$) ФН остается в невозмущенном (однородном) состоянии, пока магнитное поле не достигнет величины

$$H_F^* = \frac{\sigma}{b} \left[-1 + \sqrt{1 + \frac{2b^2}{\sigma}} \right], \quad (34)$$

которая зависит от энергии сцепления ЖК с магнитными частицами σ и параметра b , характеризующего степень влияния квадрупольного и дипольного механизмов действия магнитного поля на ФН. Такое поведение ФН объясняется тем, что магнитное поле действует как на магнитные частицы ($\sim M_s f \mathbf{m} \mathcal{H}$), так и на сам жидкий кристалл ($\sim \chi_a (\mathbf{n} \mathcal{H})^2$), стремясь ориентировать директор \mathbf{n} и намагниченность \mathbf{m} вдоль магнитного поля. Из-за гомеотропного сцепления магнитных частиц с ЖК-матрицей возникает конкуренция между этими механизмами ориентации, которая и определяет значение поля H_F^* .

Как видно из рис. 2, в некотором диапазоне значений электрического поля оказываются возможными возвратные переходы, характеризующиеся чередованием состояний системы: неоднородное — однородное — неоднородное. Они обусловлены конкуренцией между магнитным [$\sim \mu_0 \chi_a (\mathbf{n} \mathcal{H})^2$] и электрическим [$\sim \epsilon_0 \epsilon_a (\mathbf{n} \mathcal{E})^2$] квадрупольными механизмами влияния полей на ЖК-матрицу и магнитным дипольным механизмом ориентации [$\sim \mu_0 M_s f \mathbf{m} \mathcal{H}$] магнитных моментов феррочастиц. В этом случае для заданного E имеются два пороговых значения напряженности магнитного поля. Меньшее из них является полем перехода из неоднородного состояния в однородное, а большее — полем последующего перехода из однородного состояния в неоднородное (рис. 2). При заданных значениях энергии сцепления σ магнитных частиц с ЖК-матрицей и параметра b имеется диапазон значений напряженности электрического поля, для которого по мере роста магнитного поля происходит последовательность переходов из неоднородного состояния ФН (обусловленного электрическим переходом Фредерикса при $E = E_F^{LC}$) в однородное состояние, а затем снова в неоднородное состояние. При этом, поскольку из соотношения (33) следует, что E является однозначной функцией H , возвратные переходы не могут быть вызваны изменением электрического поля. Ширина области возвратных переходов в случае жесткого сцепления директора с границами слоя найдена аналитически в работах [8,9], где показано, что диапазон значений напряженности электрического поля, допускающий возвратную однородную фазу ФН, расширяется с ростом энергии сцепления σ магнитных частиц с ЖК-матрицей и параметра b .

2.2. Флексоэлектрический эффект присутствует

Проанализируем теперь уравнения (24) и (30) в общем виде, полагая сцепление на границах слоя мягким (ω — конечна) и учитывая вклад флексоэлектрической поляризации ($a \neq 0$). На рис. 3 и 4 показаны бифуркационные фазовые диаграммы, построенные с помощью этих уравнений, для различных значений флексоэлектрического параметра. Здесь, как и на рис. 2, кривая $E_F(H)$ разграничивает области однородной (под кривой) и неоднородной (над кривой) фаз ФН. Видно, что с ростом флексоэлектрического параметра напряженность

электрического поля перехода Фредерикса E_F уменьшается.

Наличие области двузначности кривых $H_F(E_F)$ свидетельствует о возможности возвратных переходов. Этот случай подробно показан на рис. 4, где такие переходы возможны в области, ограниченной двумя пунктирными прямыми E_F^* и E_F^m . Нижней прямой отвечает значение порогового поля электрического перехода Фредерикса в отсутствие магнитного поля E_F^* , определяемое выражением

$$\operatorname{tg} E_F^* = \frac{2\lambda\omega}{(1+a^2)[(E_F^*)^2 - \omega^2]}.$$

Верхней прямой отвечает максимальное значение электрического поля E_F^m , при котором возможен переход из однородной фазы в неоднородное состояние, и соответствующее ему значение магнитного поля H_F^m . Как видно из рис. 4, при заданном $E_F^* < E < E_F^m$ включение

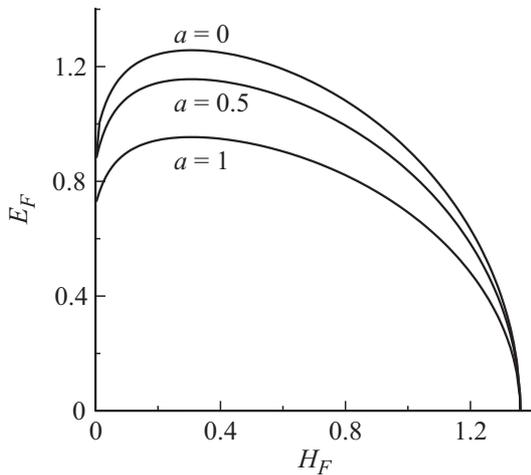


Рис. 3. Фазовая диаграмма электрического E_F и магнитного H_F полей перехода Фредерикса для $b = 10$, $\sigma = 0.5$, $\omega = 0.5$ и различных значений флексоэлектрического параметра a .

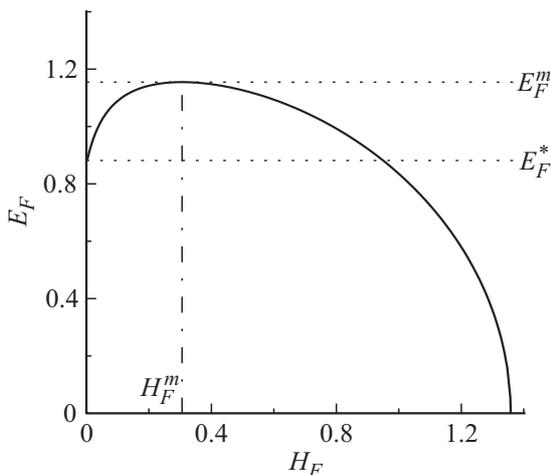


Рис. 4. Фазовая диаграмма электрического E_F и магнитного H_F полей перехода Фредерикса для $b = 10$, $\sigma = 0.5$, $\omega = 0.5$ и $a = 0.5$ (здесь $H_F^m = 0.31$, $E_F^* = 0.88$, $E_F^m = 1.16$).

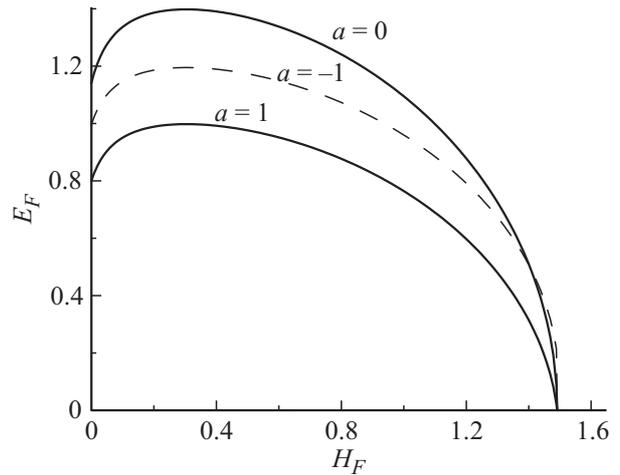


Рис. 5. Фазовая диаграмма электрического E_F и магнитного H_F полей перехода Фредерикса для $b = 10$, $\sigma = 0.5$, $\omega^- = 1$, $\omega^+ = 0.5$ и различных значений флексоэлектрического параметра a .

магнитного поля вызывает переходы неоднородная — однородная — неоднородная фазы.

Флексоэлектрический вклад входит в выражение (30) квадратичным образом, что означает независимость результатов от знака флексоэлектрического коэффициента a . В настоящее время известны ЖК как с положительным, так и с отрицательным a [17,18]. Отметим также, что выражение (30) получено для одинаковых значений энергии сцепления с ограничивающими поверхностями. При разных энергиях сцепления на границах слоя ($\omega^- \neq \omega^+$) картина становится более сложной из-за наличия в (29) слагаемого $[aE_F(\omega^- - \omega^+)]$, содержащего первую степень флексоэлектрического параметра, т.е. становятся существенными величина и знак параметра a , а также направление электрического поля и соотношение между значениями энергии сцепления директора с границами слоя.

На рис. 5 показана бифуркационная диаграмма полей Фредерикса при различных значениях энергии сцепления на нижней и верхней границах слоя. Как отмечалось выше, в этом случае ориентационное поведение ФН определяется знаком флексоэлектрического коэффициента a . Сравнение кривых $a = -1$ и $a = 1$ на рис. 5 показывает, что при $a < 0$ электрические поля переходов Фредерикса больше, чем для $a > 0$.

3. Поле насыщения

Уравнения ориентационного равновесия (10)–(12) допускают в присутствии полей другое однородное решение $\varphi(z) = \pi/2$, $\psi(z) = 0$, отвечающее состоянию насыщения, в котором директор и намагниченность параллельны и направлены вдоль \mathcal{E} и \mathcal{H} ортогонально оси легкого ориентирования. Напряженности полей перехода из неоднородного состояния в однородное

состояние насыщения обозначим E_S и H_S . Полагая в уравнениях равновесия (10)–(12) отклонения директора и намагниченности от направления полей малыми: $\varphi(z) = \pi/2 - \delta\varphi(z)$, $\delta\varphi(z) \ll 1$, $\psi(z) \ll 1$ в низшем порядке разложения находим

$$k \frac{d^2\delta\varphi}{dz^2} - (E_S^2 + H_S^2)\delta\varphi + 2\sigma(\delta\varphi + \psi) = 0, \quad (35)$$

$$bH_S\psi - 2\sigma(\delta\varphi + \psi) = 0 \quad (36)$$

с граничными условиями (13)–(14)

$$k \frac{d(\delta\varphi)}{dz} \Big|_{z=\pm\frac{1}{2}} + (aE_S \mp \omega^\pm)\delta\varphi^\pm = 0. \quad (37)$$

Исключая из системы (35), (36) угол ориентации намагниченности ψ , получим уравнение

$$\frac{d^2\delta\varphi}{dz^2} - \Lambda^2\delta\varphi = 0, \quad (38)$$

где введено обозначение

$$\Lambda^2 = \frac{1}{k} \left(E_S^2 + H_S^2 + \frac{2\sigma bH_S}{2\sigma - bH_S} \right). \quad (39)$$

Решая уравнение (38) с граничными условиями (37), находим выражение

$$\text{th } \Lambda = \frac{\Lambda k(\omega^- + \omega^+)}{\Lambda^2 k^2 - (aE_S - \omega^+)(aE_S + \omega^-)}. \quad (40)$$

Уравнения (39) и (40) позволяют найти пороговые значения электрического и магнитного полей переходов ФН в состояние ориентационного и магнитного насыщения, в котором директор и намагниченность направлены вдоль электрического и магнитного полей.

В случае одинаковых энергий сцепления на границах выражение (40) принимает вид

$$\text{th } \Lambda = \frac{2\Lambda k\omega}{\Lambda^2 k^2 - (aE_S)^2 + \omega^2}. \quad (41)$$

Отметим, что в случае абсолютно жесткого сцепления директора с границами слоя состояние насыщения достигается лишь в бесконечно больших полях.

На рис. 6–9 показаны бифуркационные диаграммы переходов из неоднородного состояния ФН (область под бифуркационной кривой) в фазу насыщения (область выше кривой), построенные по формулам (39) и (41). Заметим, что при $H \leq H_S^a$, где

$$H_S^a = 2\sigma/b, \quad (42)$$

ферронематик не переходит в состояние насыщения даже в сколь угодно больших электрических полях (рис. 6, где $H_S^a = 0.1$). Это связано с тем, что директор ЖК ориентируется вдоль оси z благодаря совместному действию электрического и магнитного полей (квадрупольные механизмы), в то время как на магнитные частицы

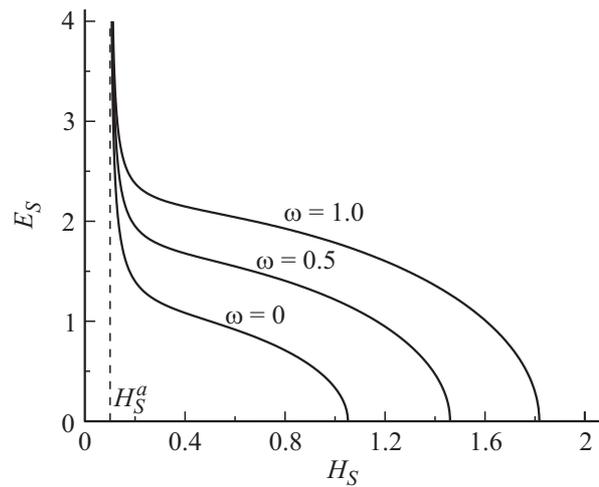


Рис. 6. Фазовая диаграмма электрического E_S и магнитного H_S полей насыщения при $b = 10$, $\sigma = 0.5$, $a = 0.5$, $k = 1.5$ и различных значениях параметра ω .

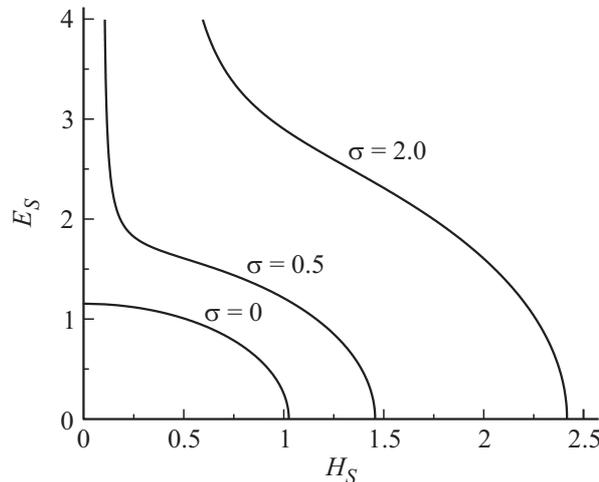


Рис. 7. Фазовая диаграмма электрического E_S и магнитного H_S полей насыщения для $b = 10$, $\omega = 0.5$, $a = 0.5$, $k = 1.5$ и различных значениях энергии сцепления σ магнитных частиц с ЖК-матрицей.

действует лишь магнитное поле. Из-за гомеотропного сцепления дисперсной фазы с директором при $H < H_S^a$ не происходит переориентации магнитных частиц в ЖК-матрице, и тем самым, переход в состояние насыщения оказывается невозможным.

На рис. 6 показаны фазовые диаграммы электрического E_S и магнитного H_S полей насыщения при различных значениях энергий сцепления директора с ограничивающими поверхностями ω . Видно, что с ростом параметра ω поля перехода ФН из неоднородной фазы в состояние насыщения увеличиваются. На рис. 7 показаны поля перехода в состояние насыщения при различных значениях энергии сцепления магнитных частиц с матрицей. В случае отсутствия примеси (кривая $\sigma = 0$ на рис. 7) из (42) следует $H_S^a = 0$, т. е. переход в состоя-

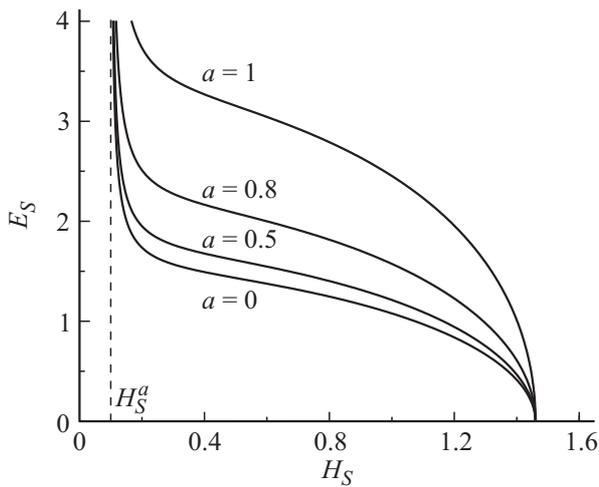


Рис. 8. Фазовая диаграмма электрического E_S и магнитного H_S полей насыщения для $b = 10, \sigma = 0.5, \omega = 0.5, k = 1.5$ и различных значениях флексоэлектрического параметра a .

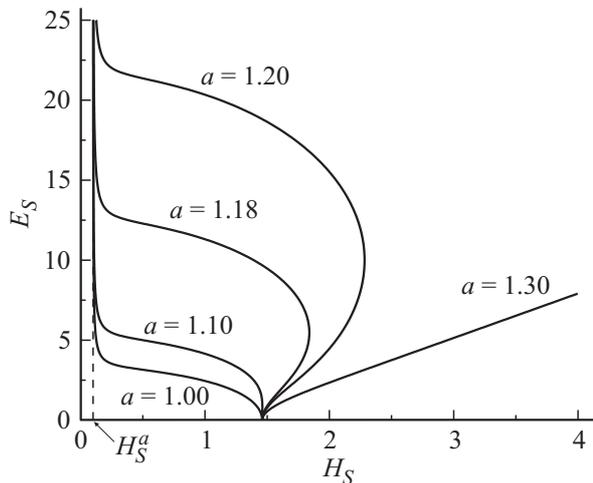


Рис. 9. Фазовая диаграмма электрического E_S и магнитного H_S полей насыщения для $b = 10, \sigma = 0.5, \omega = 0.5, k = 1.5$ и различных значениях флексоэлектрического параметра a .

ние насыщения в чистом нематике возможен при любых магнитных полях, как и должно быть, согласно [15]. Для чистого нематика уравнение (39) примет вид

$$\Lambda^2 = \frac{1}{k} (E_S^2 + H_S^2), \quad (43)$$

а уравнения (40) и (41) не изменятся. Как видно из рис. 7, с ростом энергии сцепления частиц с матрицей область, в которой отсутствует переход в состояние насыщения, расширяется, а пороговые электрическое и магнитное поля растут из-за возрастающей конкуренции между дипольным и квадрупольным механизмами ориентации.

На рис. 8 и 9 показаны кривые, определяющие границу перехода ФН из неоднородного состояния в фазу магнитного насыщения, при совместном действии элек-

трического и магнитного полей, для разных значений параметра флексоэлектрической поляризации a . Видно, что с ростом a переход в состояние насыщения происходит в больших электрических полях. Особый интерес представляет поведение ФН с сильной поверхностной поляризацией ($a > 1$), показанное на рис. 9. Видно, что с ростом a кривые переходов ведут себя немонотонно, т.е. на фазовой диаграмме $E(H)$ имеются области двузначности, что приводит к возможности существования возвратных ориентационных фаз ФН. В этом случае в некотором диапазоне значений напряженности магнитного поля рост электрического поля вызывает последовательность переходов: состояние насыщения — неоднородное состояние — состояние насыщения, причем ширина области существования возвратных фаз быстро увеличивается с ростом a .

На рис. 10 показан случай сильной флексоэлектрической поляризации ($a = 1.18$), когда на бифуркационной диаграмме появляется область возвратных ориентационных фаз, ограниченная двумя пунктирными линиями $H = H_S^*$ и $H = H_S^m$. Правой пунктирной прямой отвечает максимальное значение магнитного поля H_S^m , при котором возможен переход из неоднородного состояния в фазу насыщения, и соответствующее ему электрическое поле E_S^m .левой пунктирной прямой отвечает значение H_S^* порогового поля магнитного перехода Фредерикса в отсутствие электрического поля, определяемое уравнениями

$$\text{th } \Lambda = \frac{2\Lambda k \omega}{\Lambda^2 k^2 + \omega^2}, \quad \Lambda^2 = \frac{1}{k} \left[(H_S^*)^2 + \frac{2\sigma b H_S^*}{2\sigma - b H_S^*} \right].$$

Как видно из рис. 10, при заданном $H_S^* < H < H_S^m$ включение электрического поля вызывает переходы: фаза насыщения—неоднородная фаза—фаза насыщения.

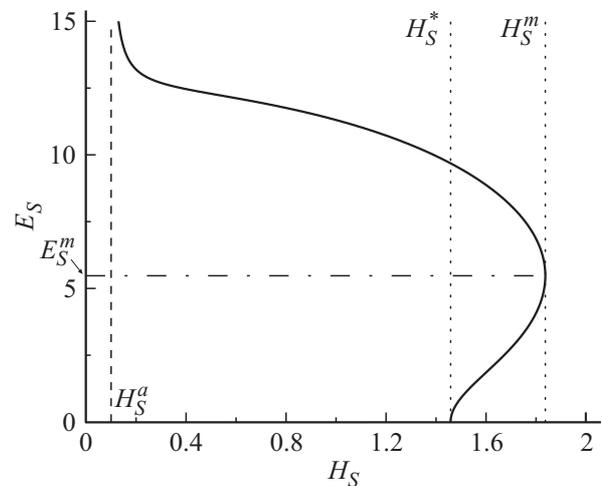


Рис. 10. Фазовая диаграмма электрического E_S и магнитного H_S полей насыщения для $b = 10, \sigma = 0.5, \omega = 0.5, k = 1.5$ и $a = 1.18$ ($H_S^a = 0.1, E_S^m = 5.47, H_S^* = 1.46, H_S^m = 1.84$).

4. Характер переходов между ориентационными фазами

4.1. Магнитный переход Фредерикса

Рассмотрим магнитный переход Фредерикса ФН в заданном электрическом поле. Вблизи точки перехода H_F из однородной фазы в неоднородное состояние углы отклонения директора от оси легкого ориентирования φ и намагниченности от направления магнитного поля ψ малы, поэтому систему уравнений (10)–(14) можно линеаризовать по $\varphi(z) \ll 1$ и $\psi(z) \ll 1$. Ее нетривиальное решение, отвечающее неоднородной фазе, имеет вид $\varphi(z) = \varphi_F^* \cos \lambda(z - z_F^*)$, $\psi(z) = s_F^h \varphi(z)$ где введено обозначение $s_F^h = 2\sigma / (2\sigma + bH_F)$. Здесь φ_F^* — максимальное значение угла отклонения директора от оси легкого ориентирования, определяемое условием (17), а z_F^* — координата максимального отклонения директора от оси легкого ориентирования.

Полученное решение позволяет выполнить интегрирование свободной энергии (7). В четвертом порядке по малым φ и ψ она принимает вид разложения Ландау

$$\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}_0^F + \frac{1}{2} \alpha_F^h (H_F - H) (\varphi_F^*)^2 + \frac{1}{4} \beta_F^h (\varphi_F^*)^4, \quad (44)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_0^F = -bH,$$

$$\alpha_F^h = \frac{1}{2\lambda} (2H_F - b(s_F^h)^2) (\lambda + \cos(2\lambda z_F^*) \sin \lambda),$$

$$\beta_F^h = \frac{1}{4\kappa} \left\{ \frac{p_F^h + 4\lambda^2(k-1)}{4} + \frac{p_F^h}{3\lambda} \cos(2\lambda z_F^*) \sin \lambda + \frac{p_F^h - 12\lambda^2(k-1)}{24\lambda} \cos(4\lambda z_F^*) \sin 2\lambda + \frac{8}{3} \tau_F^h \right\} (\kappa - \kappa_F^h).$$

Здесь введены обозначения

$$p_F^h = 4\lambda^2 + 3bH_F (s_F^h)^2 (2 - s_F^h)^2,$$

$$\tau_F^h = aE \sin \lambda \left(\frac{1}{2} \sin(4\lambda z_F^*) \cos \lambda + \sin 2\lambda z_F^* \right) - \omega \left(\frac{1}{4} \cos(4\lambda z_F^*) \cos 2\lambda + \cos(2\lambda z_F^*) \cos \lambda + \frac{3}{4} \right),$$

$$\kappa_F^h = [3(s_F^h)^2 b^2 H_F^2 (\lambda \cos(4\lambda z_F^*) \sin 2\lambda + 2\lambda^2 - 4 \cos^2(2\lambda z_F^*) \sin^2 \lambda)] [6\lambda^2 (p_F^h + 4\lambda^2(k-1)) + 8p_F^h \lambda \cos(2\lambda z_F^*) \sin \lambda + 64\lambda^2 \tau_F^h + \lambda (p_F^h - 12\lambda^2(k-1)) \cos(4\lambda z_F^*) \sin 2\lambda]^{-1}. \quad (45)$$

Значение параметра λ задается выражением (24).

В пределе абсолютно жесткого сцепления директора с границами слоя и в отсутствие флексоэлектрической поляризации среды выражения для коэффициентов разложения (44) совпадают с полученными ранее в работе [9]. В отсутствие электрического поля для одноконстантного

приближения ($K_1 = K_2 = K_3$) выражения (44) совпадают с результатами работы [19].

Минимизация свободной энергии (44) по φ_F^* приводит к выражению для максимального угла отклонения директора от оси легкого ориентирования в точке z_F^* :

$$\varphi_F^* = \pm \sqrt{\frac{\alpha_F^h (H - H_F)}{\gamma_F^h (\kappa - \kappa_F^h)}}, \quad (46)$$

где

$$\gamma_F^h = \frac{1}{4\kappa} \left\{ \frac{p_F^h + 4\lambda^2(k-1)}{4} + \frac{p_F^h}{3\lambda} \cos(2\lambda z_F^*) \sin \lambda + \frac{p_F^h - 12\lambda^2(k-1)}{24\lambda} \cos(4\lambda z_F^*) \sin 2\lambda + \frac{8}{3} \tau_F^h \right\} > 0.$$

Из выражения (46) видно, что характер перехода зависит от знаков коэффициента разложения α_F и разности $(\kappa - \kappa_F^h)$, где параметр κ_F^h отвечает трикритической точке. Анализ выражения (44) для α_F^h показывает, что $\alpha_F^h > 0$ для $H > H_F^m$ и $\alpha_F^h < 0$ для $H < H_F^m$. Значение H_F^m отвечает максимуму кривой, изображенной на рис. 4 (штрихпунктирная линия). Кроме этого, в точке максимума коэффициент разложения α_F^h обращается в нуль.

Как видно из выражения (46), при $\kappa \geq \kappa_F^h$ ориентационный переход является переходом второго рода, а для $\kappa < \kappa_F^h$ — первого рода. В случае $E_F^* < E \leq E_F^m$ возможны возвратные переходы. Слева от бифуркационной кривой ФН находится в неоднородной угловой фазе (рис. 4). С ростом магнитного поля происходит ориентационный переход обратно в гомеотропную фазу. При $\kappa \geq \kappa_F^h$ этот переход является переходом второго рода, а при $\kappa < \kappa_F^h$ — первого рода. Дальнейший рост магнитного поля приводит к тому, что однородная фаза становится неустойчивой и вновь появляются искажения ориентационной и магнитной структур. В этом случае переход Фредерикса при $\kappa \geq \kappa_F^h$ является переходом второго рода, а для $\kappa < \kappa_F^h$ — первого рода. В электрических полях $E > E_F^m$ при любых значениях магнитного поля возвратного перехода из неоднородного состояния в однородную фазу не происходит.

Характер магнитного перехода Фредерикса в зависимости от значений параметра сегрегации κ и знака коэффициента α_F^h для пороговых полей H_F , соответствующих левой и правой ветвям бифуркационной кривой, изображенной на рис. 4, представлен в табл. 1 (столбцы 1–3 и 4–6 соответственно).

Таблица 1. Характер магнитного перехода Фредерикса

$H_F < H_F^m$	$\kappa \geq \kappa_F^h$	$\kappa < \kappa_F^h$	$H_F > H_F^m$	$\kappa \geq \kappa_F^h$	$\kappa < \kappa_F^h$
$\alpha_F^h < 0$	II род	I род	$\alpha_F^h > 0$	II род	I род

4.2. Магнитный переход в состояние насыщения

Рассмотрим переход ФН из неоднородной угловой фазы в состояние насыщения, индуцированный магнитным полем в заданном электрическом поле. Вблизи точки перехода углы отклонения директора $\varphi(z) = \pi/2 - \delta\varphi(z)$ и намагниченности $\psi(z)$ от направления магнитного поля малы. В низшем порядке по $\delta\varphi(z) \ll 1$ и $\psi(z) \ll 1$ решение системы уравнений (10)–(14) имеет вид $\delta\varphi(z) = \varphi_S^* \operatorname{ch} \lambda(z - z_S^*)$, $\psi(z) = s_S^h \delta\varphi(z)$, $s_S^h = 2\sigma/(bH_S - 2\sigma)$, где φ_S^* — максимальное значение угла отклонения директора от направления магнитного поля, определяемое условием (17), а z_S^* — координата максимального отклонения директора от направления поля. Полученное решение позволяет выполнить интегрирование по координатам в свободной энергии (7), тогда в четвертом порядке по малым $\delta\varphi$ и ψ свободная энергия (7) принимает вид разложения Ландау:

$$\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}_0^S + \frac{1}{2} \alpha_S^h (H_S - H) (\varphi_S^*)^2 + \frac{1}{4} \beta_S^h (\varphi_S^*)^4, \quad (47)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_0^S = \sigma - bH + \omega - \frac{1}{2} E^2 - \frac{1}{2} H^2,$$

$$\alpha_S^h = -\frac{1}{\Lambda} \left(H_S + \frac{b(s_S^h)^2}{2} \right) (\Lambda + \operatorname{ch}(2\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} \Lambda),$$

$$\beta_S^h = \frac{1}{4\kappa} \left\{ \frac{p_S^h + 4\Lambda^2(k-1)}{4} + \frac{p_S^h}{3\Lambda} \operatorname{ch}(2\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} \Lambda + \frac{p_S^h - 12\Lambda^2(k-1)}{24\Lambda} \operatorname{ch}(4\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} 2\Lambda + \frac{8}{3} \tau_S^h \right\} (\kappa - \kappa_S^h).$$

Здесь введены обозначения

$$p_S^h = -4\Lambda^2 k + 3bH_S (s_S^h)^2 (2 + s_S^h)^2,$$

$$\tau_S^h = aE \operatorname{sh} \Lambda \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh}(4\Lambda z_S^*) \operatorname{ch} \Lambda + \operatorname{sh} 2\Lambda z_S^* \right) + \omega \left(\frac{1}{4} \operatorname{ch}(4\Lambda z_S^*) \operatorname{ch} 2\Lambda + \operatorname{ch}(2\Lambda z_S^*) \operatorname{ch} \Lambda + \frac{3}{4} \right),$$

$$\kappa_S^h = [3(s_S^h)^2 b^2 H_S^2 (\Lambda \operatorname{ch}(4\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} 2\Lambda + 2\Lambda^2 - 4 \operatorname{ch}^2(2\Lambda z_S^*) \operatorname{sh}^2 \lambda)] [6\Lambda^2 (p_S^h + 4\Lambda^2(k-1)) + 8p_S^h \Lambda \operatorname{ch}(2\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} \Lambda + 64\Lambda^2 \tau_S^h + \Lambda (p_S^h - 12\Lambda^2(k-1)) \operatorname{ch}(4\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} 2\Lambda]^{-1}. \quad (48)$$

Здесь параметр Λ задается выражением (39).

Минимизация свободной энергии (47) по φ_S^* позволяет получить выражение для максимального угла отклонения директора от направления магнитного поля в точке z_S^* :

$$\varphi_S^* = \pm \sqrt{\frac{|\alpha_S^h| (H_S - H)}{\gamma_S^h (\kappa - \kappa_S^h)}}, \quad (49)$$

где

$$\gamma_S^h = \frac{1}{4\kappa} \left\{ \frac{p_S^h + 4\Lambda^2(k-1)}{4} + \frac{p_S^h}{3\Lambda} \operatorname{ch}(2\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} \Lambda + \frac{p_S^h - 12\Lambda^2(k-1)}{24\Lambda} \operatorname{ch}(4\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} 2\Lambda + \frac{8}{3} \tau_S^h \right\} > 0.$$

Из формулы (49) видно, что при $\kappa \geq \kappa_S^h$ переход из неоднородной фазы в состояние насыщения происходит по типу фазового перехода второго рода, а при $\kappa < \kappa_S^h$ — первого рода; здесь κ_S^h — значение параметра сегрегации, отвечающее трикритической точке.

4.3. Электрический переход Фредерикса

Теперь рассмотрим переход Фредерикса, индуцированный электрическим полем в заданном магнитном поле. Как и в случае магнитного перехода Фредерикса, вблизи точки перехода E_F из однородного в неоднородное состояние свободную энергию (7) можно представить в виде разложения Ландау

$$\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}_0^F + \frac{1}{2} \alpha_F^e (E_F - E) (\varphi_F^*)^2 + \frac{1}{4} \beta_F^e (\varphi_F^*)^4, \quad (50)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_0^F = -bH,$$

$$\alpha_F^e = E_F + \frac{1}{\lambda} (a\lambda \sin(2\lambda z_F^*) + E_F \cos(2\lambda z_F^*)) \sin \lambda,$$

$$\beta_F^e = \frac{1}{4\kappa} \left\{ \frac{p_F^e + 4\lambda^2(k-1)}{4} + \frac{p_F^e}{3\lambda} \cos(2\lambda z_F^*) \sin \lambda + \frac{p_F^e - 12\lambda^2(k-1)}{24\lambda} \cos(4\lambda z_F^*) \sin 2\lambda + \frac{8}{3} \tau_F^e \right\} (\kappa - \kappa_F^e).$$

Здесь введены обозначения

$$p_F^e = 4\lambda^2 + 3bH (s_F^e)^2 (2 - s_F^e)^2, \quad s_F^e = \frac{2\sigma}{2\sigma + bH},$$

$$\tau_F^e = aE_F \sin \lambda \left(\frac{1}{2} \sin(4\lambda z_F^*) \cos \lambda + \sin 2\lambda z_F^* \right) - \omega \left(\frac{1}{4} \cos(4\lambda z_F^*) \cos 2\lambda + \cos(2\lambda z_F^*) \cos \lambda + \frac{3}{4} \right),$$

$$\kappa_F^e = [3(s_F^e)^2 b^2 H^2 (\lambda \cos(4\lambda z_F^*) \sin 2\lambda + 2\lambda^2 - 4 \cos^2(2\lambda z_F^*) \sin^2 \lambda)] [6\lambda^2 (p_F^e + 4\lambda^2(k-1)) + 8p_F^e \lambda \cos(2\lambda z_F^*) \sin \lambda + 64\lambda^2 \tau_F^e + \lambda (p_F^e - 12\lambda^2(k-1)) \cos(4\lambda z_F^*) \sin 2\lambda]^{-1}. \quad (51)$$

Выражения (50) и (51) в случае абсолютно жесткого сцепления директора с границами слоя и в отсутствие флексоэлектрической поляризации среды совпадают с результатами работы [9].

Минимизация свободной энергии (50) по φ_F^* дает выражение для угла отклонения директора в точке z_F^* :

$$\varphi_F^* = \pm \sqrt{\frac{\alpha_F^e (E - E_F)}{\gamma_F^e (\kappa - \kappa_F^e)}}, \quad (52)$$

где

$$\gamma_F^e = \frac{1}{4\kappa} \left\{ \frac{p_F^e + 4\lambda^2(k-1)}{4} + \frac{p_F^e}{3\lambda} \cos(2\lambda z_F^*) \sin \lambda + \frac{p_F^e - 12\lambda^2(k-1)}{24\lambda} \cos(4\lambda z_F^*) \sin 2\lambda + \frac{8}{3} \tau_F^e \right\} > 0.$$

Так как в рассматриваемом случае $\alpha_F^e > 0$ и $\gamma_F^e > 0$, то характер ориентационного перехода Фредерикса, индуцированного электрическим полем, определяется разностью $(\kappa - \kappa_F^e)$, где κ_F^e — параметр сегрегации, отвечающий трикритической точке. Электрический переход Фредерикса в заданном магнитном поле не может быть возвратным, так как пороговое поле E_F — однозначная функция магнитного поля H (рис. 3–5), т. е. при $\kappa \geq \kappa_F^e$ ориентационный переход является фазовым переходом второго рода, а при $\kappa < \kappa_F^e$ — первого рода.

4.4. Электрический переход в состояние насыщения

В заключение рассмотрим переход ФН между неоднородной фазой и фазой насыщения, индуцированный электрическим полем в заданном магнитном поле. Аналогично представленным выше разложениям, получим выражение для свободной энергии в виде разложения Ландау вблизи E_S :

$$\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{F}}_0^F + \frac{1}{2} \alpha_S^e (E_S - E) (\varphi_S^*)^2 + \frac{1}{4} \beta_S^e (\varphi_S^*)^4, \quad (53)$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_0^S = \sigma - bH + \omega - \frac{1}{2} E^2 - \frac{1}{2} H^2,$$

$$\alpha_S^e = -E_S + \frac{1}{\Lambda} (a\Lambda \operatorname{sh}(2\Lambda z_S^*) - E_S \operatorname{ch}(2\Lambda z_S^*)) \operatorname{sh} \Lambda,$$

$$\beta_S^e = \frac{1}{4\kappa} \left\{ \frac{p_S^e + 4\Lambda^2(k-1)}{4} + \frac{p_S^e}{3\Lambda} \operatorname{ch}(2\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} \Lambda + \frac{p_S^e - 12\Lambda^2(k-1)}{24\Lambda} \operatorname{ch}(4\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} 2\Lambda + \frac{8}{3} \tau_S^e \right\} (\kappa - \kappa_S^e).$$

Здесь введены обозначения

$$p_S^e = -4\Lambda^2 k + 3bH (s_S^e)^2 (2 + s_S^e)^2, \quad s_S^e = \frac{2\sigma}{bH - 2\sigma},$$

$$\tau_S^e = aE_S \operatorname{sh} \Lambda \left(\frac{1}{2} \operatorname{sh}(4\Lambda z_S^*) \operatorname{ch} \Lambda + \operatorname{sh} 2\Lambda z_S^* \right) + \omega \left(\frac{1}{4} \operatorname{ch}(4\Lambda z_S^*) \operatorname{ch} 2\Lambda + \operatorname{ch}(2\Lambda z_S^*) \operatorname{ch} \Lambda + \frac{3}{4} \right),$$

$$\begin{aligned} \kappa_S^e &= [3(s_S^e)^2 b^2 H^2 (\Lambda \operatorname{ch}(4\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} 2\Lambda + 2\Lambda^2 - 4 \operatorname{ch}^2(2\Lambda z_S^*) \operatorname{sh}^2 \Lambda)] [6\Lambda^2 (p_S^e + 4\Lambda^2(k-1)) + 8p_S^e \Lambda \operatorname{ch}(2\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} \Lambda + 64\Lambda^2 \tau_S^e + \Lambda (p_S^e - 12\Lambda^2(k-1)) \operatorname{ch}(4\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} 2\Lambda]^{-1}. \end{aligned} \quad (54)$$

Значение параметра Λ задается выражением (39).

Минимизация свободной энергии (53) по φ_S^* дает выражение для угла отклонения директора от направления электрического поля в точке z_S^* :

$$\varphi_S^* = \pm \sqrt{\frac{\alpha_S^e (E - E_S)}{\gamma_S^e (\kappa - \kappa_S^e)}}, \quad (55)$$

где

$$\gamma_S^e = \frac{1}{4\kappa} \left\{ \frac{p_S^e + 4\Lambda^2(k-1)}{4} + \frac{p_S^e}{3\Lambda} \operatorname{ch}(2\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} \Lambda + \frac{p_S^e - 12\Lambda^2(k-1)}{24\Lambda} \operatorname{ch}(4\Lambda z_S^*) \operatorname{sh} 2\Lambda + \frac{8}{3} \tau_S^e \right\} > 0,$$

а знак коэффициента α_S^e зависит от значений порогового поля E_S . Выражение (53) для α_S^e показывает, что $\alpha_S^e > 0$ для $E_S < E_S^m$ и $\alpha_S^e < 0$ для $E_S > E_S^m$, где E_S^m отвечает максимуму функции $H_S(E_S^m)$, изображенной на рис. 10, причем в точке экстремума коэффициент разложения α_S^e равен нулю.

Как было показано выше, при сильном флексоэффекте ($a > 1$) возможно появление возвратных ориентационных фаз. В диапазоне магнитных полей $H_S^a < H \leq H_S^*$ (рис. 10) с ростом электрического поля происходит переход из неоднородного состояния в фазу насыщения. Этот переход при $\kappa \geq \kappa_S^e$ является переходом второго рода, а при $\kappa < \kappa_S^e$ — первого рода. В диапазоне магнитных полей $H_S^* < H \leq H_S^m$ становятся возможными возвратные ориентационные переходы. В этом случае области, ограниченной снизу прямой $H_S = 0$, а сверху нижней ветвью двузначной бифуркационной кривой, отвечает фаза насыщения. С ростом электрического поля происходит ориентационный переход обратно в неоднородную фазу, который при $\kappa \geq \kappa_S^e$ является переходом второго рода, а при $\kappa < \kappa_S^e$ — первого рода. Дальнейший рост электрического поля приводит к тому, что угловая фаза становится неустойчивой и ФН переходит в состояние насыщения. Этот переход при $\kappa \geq \kappa_S^e$ является переходом второго рода, а при $\kappa < \kappa_S^e$ — первого рода.

В табл. 2 представлена зависимость характера ориентационного перехода в состояние насыщения, индуцированного электрическим полем, от значений параметра

Таблица 2. Характер перехода ФН между неоднородной фазой и фазой насыщения

$E_S < E_S^m$	$\kappa \geq \kappa_S^*$	$\kappa < \kappa_S^*$	$E_S > E_S^m$	$\kappa \geq \kappa_S^*$	$\kappa < \kappa_S^*$
$\alpha_S^e > 0$	II род	I род	$\alpha_S^e < 0$	II род	I род

сегрегации κ и знака коэффициента α_S^e для порогового поля E_S , соответствующих нижней (столбцы 1–3) и верхней (столбцы 4–6) ветвям бифуркационной кривой, изображенной на рис. 10.

Заключение

В работе изучено влияние флексоэлектрической поляризации на ориентационное поведение ФН во внешних электрическом и магнитном полях. Показано, что флексоэффект существенно влияет на величину пороговых полей перехода между неоднородными и однородными состояниями ФН и при сильной поверхностной поляризации ЖК-матрицы становятся возможными возвратные ориентационные переходы.

Получены выражения для свободной энергии в форме разложения Ландау вблизи точек ориентационных переходов. Показано, что переходы между исходной однородной гомеотропной фазой и неоднородной угловой фазой, а также переход между неоднородной фазой и фазой насыщения могут быть переходами первого или второго рода в зависимости от параметра сегрегации.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 13-02-96001).

Список литературы

- [1] *de Жен П.* Физика жидких кристаллов. М.: Мир, 1977. 400 с.
- [2] *Brochard F., de Gennes P.G.* // J. Phys. (France). 1970. Vol. 31. P. 691–708.
- [3] *Petrov D.A., Zakhlevnykh A.N.* // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 2012. Vol. 557. P. 60–72.
- [4] *Захлевных А.Н., Петров Д.А.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 9. С. 28–38.
- [5] *Zakhlevnykh A.N., Petrov D.A.* // Phase Transit. 2014. Vol. 87. P. 1–18.
- [6] *Шлюomis М.И.* Магнитные жидкости // УФН. 1974. Т. 112. С. 427–458.
- [7] *Meyer R.B.* // Phys. Rev. Lett. 1969. Vol. 22. P. 918–921.
- [8] *Makarov D.V., Zakhlevnykh A.N.* // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 2012. Vol. 553. P. 199–210.
- [9] *Makarov D.V., Zakhlevnykh A.N.* // Soft Matter. 2012. Vol. 8. P. 6493–6503.
- [10] *Burylov S.V., Raikher Yu.L.* // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1995. Vol. 258. P. 107–122.
- [11] *Rapini A., Papoular M.* // J. Phys. Colloq. (France) 1969. Vol. 30. P. C4–54.
- [12] *Zakhlevnykh A.N., Sosnin P.A.* // J. Magn. Magn. Mater. 1995. Vol. 146. P. 103–110.
- [13] *Derzhanski A., Petrov A.G., Mitov M.D.* // J. Phys. (France). 1978. Vol. 39. P. 273–285.
- [14] *Sin-Doo Lee, Patel J.S.* // Phys. Rev. Lett. 1990. Vol. 65. P. 56–59.
- [15] *Barberi R., Barbero G., Gabbasova Z., Zvezdin A.* // J. Phys. (France) II. 1993. Vol. 3. P. 147–164.
- [16] *Zakhlevnykh A.N.* // J. Magn. Magn. Mater. 2004. Vol. 269. P. 238–244.
- [17] *Rudquist P., Lagerwall S.T.* // Liq. Cryst. 1997. Vol. 23. P. 503–510.
- [18] *Maheswara Murthy P.R., Raghunathan V.A., Madhusudana N.V.* // Liq. Cryst. 1993. Vol. 14. P. 483–496.
- [19] *Захлевных А.Н., Семенова О.Р.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 8. С. 1–10.