

03

## О равновесной форме сильно заряженной капли, висящей в слабом электростатическом поле

© С.О. Ширяева, Н.А. Петрушов, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Россия, Ярославль  
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 29 января 2015 г.)

Рассчитана равновесная форма сильно заряженной капли в слабом внешнем однородном электростатическом поле. Расчеты проведены асимптотическим методом четвертого порядка по величине эксцентриситета, которым измерена стационарная деформация капли. Показано, что равновесная форма такой капли может быть аппроксимирована вытянутым сфероидом. Такая форма капли обеспечена не внешним полем, которое считается весьма слабым и фактически просто задает выделенное направление, а собственным зарядом капли. В электростатическом подвесе, где может быть реализована такая ситуация, погрешность измерения критического заряда, связанная с деформацией капли, может быть уменьшена до нуля использованием капель малых размеров.

### Введение

Еще в конце XIX в. Рэлей вывел критерий неустойчивости по отношению к собственному заряду сильно заряженной электропроводной сферической капли в виде [1]

$$\frac{Q^2}{4\pi\sigma R^3} \geq (n + 2),$$

где  $Q$  и  $R$  — заряд и радиус капли,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения жидкости,  $n$  — номер моды осцилляций. Несложно видеть, что по мере увеличения заряда первой теряет устойчивость основная мода ( $n = 2$ ), и ее неустойчивостью определяется неустойчивость всей капли. При потере устойчивости основной моды капля вытягивается в сфероид. По мере увеличения эксцентриситета неустойчивой капли теряют устойчивость и более высокие моды [2,3]. Кроме уточнения механизма реализации неустойчивости капли выяснилось, что критические условия неустойчивости (т.е. критический заряд  $Q$ ) снижаются при деформировании капли по сравнению со сферой.

Критерий Рэля неоднократно проверялся [4–10], и во всех экспериментах был подтвержден с некоторой погрешностью, зависящей от точности измерений. Во всех случаях использовались силовые бесконтактные подвесы различных типов: акустического, аэродинамического, электромагнитного, электростатического и их всевозможных комбинаций, которые деформировали каплю и как следствие вносили свой вклад в погрешность. Представляется целесообразным определить, какая часть погрешности экспериментов вносится подвесом (стационарной деформацией в силовом поле подвеса) и не связана со статистической ошибкой. Это мы и сделаем на примере электростатического подвеса. Зададимся целью найти равновесную форму сильно заряженной капли (около порога устойчивости по Рэлю), удерживающей-

ся в подвешенном состоянии в поле сил тяжести слабым однородным электростатическим полем.

Ясно, что форма сильно заряженной капли во внешнем электрическом поле будет искаженной сфероидальной, а точнее грушевидной. Степень грушевидности должна зависеть от соотношения величин поляризационного и собственного зарядов. Попытаемся оценить для рассматриваемой ситуации степень грушевидности капли.

Следует отметить, что сходные задачи решались ранее (см., например, [11,12]), но в других диапазонах зарядов и полей, с другой точностью и целями.

Заметим, что широкое использование бесконтактных подвесов связано с современными технологиями получения высокочистых веществ.

### Постановка задачи

Рассмотрим каплю несжимаемой идеально проводящей жидкости с зарядом  $Q$ , помещенную в электростатический подвес, в котором коллинеарные внешнее однородное электростатическое поле напряженностью  $E_0$  и гравитационное поле  $g$  удерживают ее в неподвижном положении. Примем, что жидкость имеет плотность  $\rho$  и коэффициент межфазного натяжения  $\sigma$ . В отсутствие электростатического и гравитационного полей форма капли сферическая с радиусом  $R$ . Найдем равновесную форму капли в описанной системе из условий баланса давлений на ее поверхности, учитывая влияние на нее гравитационного и электростатического полей, а также взаимодействия собственного заряда с электростатическим полем.

Принимая плотность жидкости  $\rho$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma$  и радиус сферической (в отсутствие электростатического и гравитационного полей) формы капли  $R$  в качестве трех основных масштабов из-

мерения физических величин, перейдем к безразмерным переменным, в которых  $\rho = \sigma = R = 1$ .

Очевидно, что в коллинеарных полях  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{g}$  равновесная поверхность будет обладать осевой симметрией. Ось симметрии направим вертикально вверх параллельно  $\mathbf{E}_0$  и будем искать форму равновесной поверхности капли в сферических координатах в наиболее общей осесимметричной форме, в виде разложения по полиномам Лежандра

$$r(\theta) = 1 + h(\theta) \equiv 1 + \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(\cos \theta). \quad (1)$$

Рассматривая малые отклонения формы капли от сферической  $h(\theta) \ll 1$ , введем малый параметр  $\eta^2 \propto h(\theta) \ll 1$ . Поскольку в отсутствие внешнего поля  $E_0$  докритический заряд  $Q$  (хоть и сильный) не нарушает сферичности капли, то  $Q \propto \eta^0$ . Внешнее электростатическое поле  $E_0$  по предположению весьма мало, и его роль заключается лишь в задании выделенного направления, вдоль которого капля растягивается электростатическими силами отталкивания собственного заряда на различных половинках капли. В самом деле, на каждой из половинок сферической капли в отсутствие внешнего поля  $E_0$  находится заряд  $Q/2$ . При включении бесконечно слабого поля для задания выделенного направления центры тяжести заряда половинок капли (точнее, центры формального приложения зарядов), разнесенные на расстояние  $\sim R$ , будут расталкиваться вдоль выделенного направления с силой  $\propto Q^2/4R^2$ . Эта сила и обеспечит капле сфероидальную деформацию. Она хоть порождена силами отталкивания собственного заряда, но включается внешним полем, и можно считать, что деформацию капли создает внешнее поле.

Взаимодействие гравитационного поля, заряда и электростатического поля с отклонением формы капли  $h(\theta)$  будет приводить к появлению добавок в соответствующих давлениях (например,  $P_e \propto E_0^2 \propto h(\theta) \propto \eta^2$ ), имеющих величину не ниже второго порядка малости по  $\eta$ .

Гравитационное и электростатическое поля должны обеспечивать неподвижность центра масс капли вне зависимости от формы ее поверхности  $g \propto QE_0 \propto \eta$ . Поскольку про заряд мы знаем, что он имеет нулевой порядок малости, то, следовательно,  $E_0 \propto \eta$ .

Так как слабое электростатическое поле является одним из ключевых моментов задачи, то для того, чтобы учесть влияние  $g$ ,  $E_0$  и  $Q$  на равновесную форму, представим коэффициенты  $a_n$  ряда (1) в виде разложения по малому параметру  $\eta$

$$a_n = \eta^2 a_n^{(2)} + \eta^3 a_n^{(3)} + \eta^4 a_n^{(4)} + Q(\eta^5).$$

Верхний индекс в коэффициентах  $a_n^{(m)}$  указывает порядок малости коэффициентов. Подчеркнем только, что параметр  $\eta$  является формальным и введен лишь для удобства проведения разложений. В конечном счете его следует убрать. Степень малости различных слагаемых в

этом выражении будет выражена через амплитуды  $a_n^{(m)}$ , которые, в свою очередь, будут выражены через напряженность внешнего электростатического поля  $E_0$ , собственный заряд капли  $Q$  и ускорение свободного падения  $g$ .

## Расчет равновесной формы

На поверхности капли в состоянии равновесия должно выполняться условие баланса давлений

$$p_{in} - p_{atm} + p_{QE} + p_g - p_\sigma = 0. \quad (2)$$

Здесь  $p_{in}$  — давление жидкости внутри равновесной капли,  $p_{atm}$  — атмосферное давление,  $p_{QE}$ ,  $p_g$  и  $p_\sigma$  — давления на поверхность (1) электрических, гравитационных сил и сил поверхностного натяжения. Помимо баланса давлений необходимо потребовать выполнения условий неизменности объема и заряда капли и неподвижности ее центра масс

$$\iiint_V dV = 2\pi \int_{-1}^1 \int_0^{r(\theta)} r^2 dr d\mu = \frac{4}{3}\pi, \quad \mu \equiv \cos \theta, \quad (3)$$

$$V \equiv \{0 \leq r \leq r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$\iint_S (\mathbf{n}, \mathbf{E}) dS = -2\pi \int_{-1}^1 (r^2(\mathbf{n}, \nabla\Phi))|_{r(\theta)} d\mu = 4\pi Q, \quad (4)$$

$$S \equiv \{r = r(\theta), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\},$$

$$\iiint_V \mathbf{r} dV = 2\pi \int_{-1}^1 \int_0^{r(\theta)} \mathbf{e}_r r^3 dr d\mu = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\mathbf{n}$  — орт нормали к поверхности (1),  $\Phi$  — потенциал электростатического поля напряженностью  $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$ . Для расчета напряженности электростатического поля  $\mathbf{E}$  в окрестности капли добавим уравнение Максвелла, граничные условия и условие эквипотенциальности поверхности капли:

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}_0, \quad r = r(\theta): \quad \Phi = \Phi_S, \quad (6)$$

где  $\Phi_S$  — потенциал поверхности капли.

Давления, входящие в (2), представим в виде разложения по степеням  $\eta$  с точностью до слагаемых порядка  $\eta^4$

$$p_j \approx p_j^{(0)} + \eta p_j^{(1)} + \eta^2 p_j^{(2)} + \eta^3 p_j^{(3)} + \eta^4 p_j^{(4)} + O(\eta^5).$$

Приравняв слагаемые одного порядка малости в балансе давлений, получим систему уравнений, позволяющую последовательно рассчитать амплитуды  $a_n^{(m)}$ .

Давление капиллярных сил определяется через орт нормали  $\mathbf{n}$  к поверхности капли (1)

$$p_\sigma = \operatorname{div} \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} \equiv \frac{\nabla(r - r(\theta))}{|\nabla(r - r(\theta))|}.$$

Подставив в эти формулы разложение (1), получим

$$p_{\sigma}^{(0)} = 2, \quad p_{\sigma}^{(1)} = 0, \quad p_{\sigma}^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n+2)a_n^{(2)}P_n(\mu),$$

$$p_{\sigma}^{(3)} = \sum_{n=0}^{\infty} (n-1)(n+2)a_n^{(3)}P_n(\mu),$$

$$p_{\sigma}^{(4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n-1)(n+2)a_n^{(4)}P_n(\mu)2(n^2+n-1) \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=|n-k|}^{n+k} a_n^{(2)}a_k^{(2)} \left( C_{(n,k,j)}^{(0,0,0)} \right)^2 P_j(\mu) \right\}.$$

Здесь и далее  $C_{(n,m,k)}^{(0,0,0)}$  — коэффициенты Клебша–Гордана, отличные от нуля, только когда индексы удовлетворяют соотношениям  $|n-m| \leq k \leq |n+m|$ ,  $n+m+k$  — четное.

Гравитационное давление определяется выражением

$$p_g = g(r(0) - r(\theta)) \cos \theta.$$

После подстановки функции  $r(\theta)$ , описывающей форму поверхности (1), несложно получить

$$p_g^{(0)} = 0, \quad p_g^{(1)} = g(1 - \mu) = g(P_0(\mu) - P_1(\mu)),$$

$$p_g^{(2)} = 0,$$

$$p_g^{(4)} = g \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(2)} \left( P_0(\mu) - \sum_{j=n-1}^{n+1} \left( C_{(n,1,j)}^{(0,0,0)} \right)^2 P_j(\mu) \right),$$

$$p_g^{(3)} = g \sum_{n=2}^{\infty} a_n^{(3)} \left( P_0(\mu) - \sum_{j=n-1}^{n+1} \left( C_{(n,1,j)}^{(0,0,0)} \right)^2 P_j(\mu) \right).$$

Для нахождения давления электростатических сил вычислим поле в окрестности капли. Решение для потенциала электростатического поля будем искать в виде разложения

$$\Phi \approx \Phi_0 + \eta\Phi_1 + \eta^2\Phi_2 + \eta^3\Phi_3 + \eta^4\Phi_4 + O(\eta^5).$$

Перейдя в задаче (6), дополненной условием (4), от напряженности электростатического поля к потенциалу, нетрудно получить:

$$\Phi_0 = \frac{Q}{r}, \quad \Phi_1 = E_0\mu \left( \frac{1}{r^2} - r \right),$$

$$\Phi_2 = Q \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} a_n^{(2)} p_n(\mu),$$

$$\Phi_3 = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \times \left( 3E_0 \left( \frac{na_{n-1}^{(2)}}{2n-1} + \frac{(n+1)a_{n+1}^{(2)}}{2n+3} \right) + Qa_n^{(3)} \right) P_n(\mu),$$

$$\Phi_4 = \sum_{n=0}^{\infty} r^{-(n+1)} \left[ 3E_0 \left( \frac{na_{n-1}^{(3)}}{2n-1} + \frac{(n+1)a_{n+1}^{(3)}}{2n+3} \right) + Qa_n^{(4)} \right. \\ \left. + Q \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^n (k+j)a_{k+j}^{(2)}a_{n-j+k}^{(2)} \left( C_{(j+k,n-j+k,n)}^{(0,0,0)} \right)^2 \right] P_n(\mu).$$

Пользуясь полученными выражениями, найдем давление электростатических сил

$$p_{EQ} = \frac{E^2}{8\pi} = \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi}.$$

Вычислив интегралы (3) и (5), получим

$$a_0^{(2)} = 0, \quad a_0^{(3)} = 0, \quad a_0^{(4)} = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n+1} (a_n^{(2)})^2,$$

$$a_1^{(2)} = 0, \quad a_1^{(3)} = 0, \quad a_1^{(4)} = \frac{9}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(n+1)(a_n^{(2)}a_{n+1}^{(2)})}{(2n+1)(2n+3)}. \quad (7)$$

Приравнявая слагаемые одного порядка в балансе давлений (2), с учетом соотношений (7) получим в нулевом порядке малости

$$p_{in}^{(0)} - p_{atm} = 2 - \frac{Q^2}{8\pi},$$

баланс давлений для заряженной сферической капли в отсутствие внешних полей. В первом порядке малости получим поправку к давлению в капле, возникающую в результате действия гравитации, а также условие неподвижности центра масс капли:

$$p_{in}^{(1)} = -g, \quad g = \frac{3}{4\pi} QE_0. \quad (8)$$

Приравнивание слагаемых второго порядка малости позволяет получить поправку к внутреннему давлению в капле и коэффициенты второго порядка малости для формы поверхности (1)

$$p_{in}^{(2)} = -\frac{3E_0^2}{8\pi}, \quad a_n^{(2)} = \frac{3E_0^2}{16\pi - Q} \delta_{n,2}.$$

Здесь и далее  $\delta_{n,k}$  — символ Кронекера. Таким образом, второй порядок имеет лишь коэффициент при  $P_2(\mu)$ , остальные полиномы Лежандра имеют коэффициенты более высокого порядка малости. В третьем порядке малости получим очередную поправку к давлению в капле и коэффициенты третьего порядка малости для формы поверхности (1)

$$p_{in}^{(3)} = \frac{3E_0^2g}{16\pi - Q^2}, \\ a_n^{(3)} = \frac{E_0^2(129QE_0 - 100\pi g)}{10(320\pi^2 - 36\pi Q^2 + Q^4)} \delta_{n,3} \\ = \frac{(129QE_0 - 100\pi g)a_2^{(2)}}{30(20\pi - Q^2)} \delta_{n,3}.$$

Поправка к давлению четвертого порядка малости будет иметь вид

$$P_{\text{in}}^{(4)} = -\frac{E_0^2}{40\pi(20\pi - Q^2)(16\pi - Q^2)} \times \left( 516\pi g Q E_0 (16\pi - Q^2) - 400g^2\pi^2 (16\pi - Q^2) + 9E_0^2 (64\pi - 5Q^2) (20\pi - Q^2) \right) = -\frac{1}{5} \left( 8 - \frac{5Q^2}{8\pi} \right) \left( a_2^{(2)} \right)^2 - g a_3^{(3)}.$$

Среди коэффициентов четвертого порядка малости для формы поверхности (1) отличными от нуля будут лишь

$$a_2^{(4)} = \frac{3E_0^2}{70(16\pi - Q^2)(20\pi - Q^2)} \times \left( 400g^2\pi^2 (16\pi - Q^2) - 1416\pi g Q E_0 (16\pi - Q^2) + 3E_0^2 (50560\pi^2 - 1104\pi Q^2 - 259Q^4) \right),$$

$$a_4^{(4)} = \frac{E_0^2}{105(16\pi - Q^2)^2(20\pi - Q^2)(24\pi - Q^2)} \times \left( 800g^2\pi^2 (16\pi - Q^2) - 4032\pi g Q E_0 (16\pi - Q^2) + 9E_0^2 (37440\pi^2 + 3388\pi Q^2 - 349Q^4) \right).$$

Кроме того, из (7)

$$a_0^{(4)} = -\frac{1}{5} \left( a_2^{(2)} \right)^2, \quad a_1^{(4)} = 0.$$

Таким образом, равновесная форма заряженной капли с точностью до четвертого порядка малости по  $\eta$  в гравитационном и слабом электростатическом полях будет описываться следующим выражением:

$$r(\theta) = 1 + a_0^{(4)} P_0(\mu) + \left( a_2^{(2)} + a_2^{(4)} \right) P_2(\mu) + a_3^{(3)} P_3(\mu) + a_4^{(4)} P_4(\mu). \quad (9)$$

Коэффициенты  $a_n^{(m)}$ , выраженные через параметры Тейлора  $w$  и Рэлея  $W$  с учетом условия неподвижности центра масс капли (8), определяются соотношениями:

$$a_2^{(2)} = \frac{3w}{1-W}, \quad a_3^{(3)} = \frac{108\sqrt{Ww^3}}{5(1-W)(5-4W)},$$

$$a_0^{(4)} = -\frac{9w^2}{5(1-W)^2},$$

$$a_2^{(4)} = \frac{9w^2(79-84W+8W^2)}{7(1-W)^3(5-4W)},$$

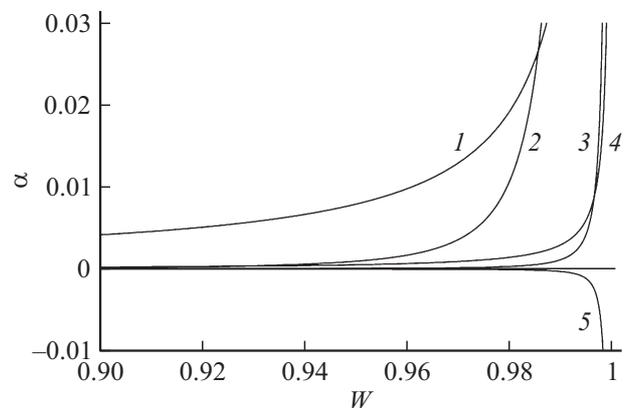
$$a_4^{(4)} = \frac{54w^2(65-33W-28W^2)}{35(1-W)^2(3-2W)(5-4W)}, \quad (10)$$

$$w = \frac{E_0^2}{16\pi}, \quad W = \frac{Q^2}{16\pi}, \quad g = 12\sqrt{Ww}.$$

Выписанная форма поверхности сильно заряженной капли совпадает с формой поверхности, полученной в [12] из несколько иных посылок.

Амплитуды стационарных мод, рассчитанные по (10) для капли воды в электростатическом подвесе при больших собственных зарядах в зависимости от величины параметра Рэлея, представлены на рис. 1 (значения зарядового параметра  $W$  для капли заданного размера связаны со значениями полевого параметра (параметра Тейлора)  $w$  условиями подвеса [11]). Расчеты проводились при изначальном радиусе  $R = 0.1$  см, плотности  $\rho = 1$  г/см<sup>3</sup> и коэффициенте поверхностного натяжения  $\sigma = 73$  дин/см в гравитационном поле  $g = 980.7$  см/с<sup>2</sup>. Следует отметить, что расчеты при меньших радиусах дают качественно такую же картину, только кривые прижимаются к оси абсцисс, и картинка становится менее наглядной.

В табл. 1–4 приведены отношения амплитуд мод, формирующих поверхность капли в расчетах более высоких порядков малости, чем второй, к амплитуде основной моды, возникающей во втором порядке по  $\eta$ , при фиксированных значениях  $W$  и  $w$ , соответствующих условию неподвижности заряженной капли в электростатическом поле, рассчитанные для различных изначальных радиусов капли. Первая строчка соответствует критическим значениям параметра Рэлея  $W$  и параметра Тейлора  $w$ , связанным условием неустойчивости, ранее полученным в [11] в линейном по  $e^2$  приближении и проиллюстрированным рис. 2 (штрихпунктирная линия). Аналитический вид этого условия неустойчивости имеет



**Рис. 1.** Стационарные амплитуды мод деформируемой сильно заряженной капли, висящей в суперпозиции противоположно направленных гравитационного и слабого электростатического полей. Напряженность электростатического поля подобрана из условий подвеса капли. Амплитуды: 1 —  $a_2^{(2)}$ , 2 —  $a_2^{(4)}$ , 3 —  $a_3^{(3)}$ , 4 —  $a_4^{(4)}$ , 5 —  $a_0^{(4)}$ .

вид [11]

$$(1 + 2.07e^2)W + 4.64(1 + 6.6e^2)w + 3\sqrt{Ww}(1 + 0.476e^2) \geq 1, \quad (11)$$

$$e^2 = \frac{9w}{(1 - W)}.$$

Вторая и третья строки таблиц соответствуют состоянию неподвижности капли и лежат в области электростатической устойчивости, они приведены, чтобы продемонстрировать тенденции изменения параметров. В первом столбце таблиц представлены значения параметров  $W$  и  $w$ , при которых были рассчитаны отношения амплитуд возбужденных мод в данной строчке, значения

**Таблица 1.** Соотношения амплитуд при различных значениях заряда капли и напряженности внешнего электростатического поля, при которых капля радиуса  $R = 0.1$  см неподвижна

	$a_3^{(3)}/a_2^{(2)}$	$a_0^{(4)}/a_2^{(2)}$	$a_2^{(4)}/a_2^{(2)}$	$a_4^{(4)}/a_2^{(2)}$
$W = 0.9386$ $w = 1.335 \cdot 10^{-4}$ $a_2^{(2)} = 0.0065$ $e = 0.14$	0.065	-0.0013	0.088	0.0073
$W = 0.92$ $w = 1.36 \cdot 10^{-4}$ $a_2^{(2)} = 0.0051$ $e = 0.124$	0.061	-0.001	0.059	0.0062
$W = 0.9$ $w = 1.39 \cdot 10^{-4}$ $a_2^{(2)} = 0.0042$ $e = 0.112$	0.058	-0.00083	0.042	0.0054

Координаты правой точки пересечения:  $W = 0.002439$ ,  $w = 0.051386$ .

**Таблица 2.** Соотношения амплитуд при различных значениях заряда капли и напряженности внешнего электростатического поля, при которых капля радиуса неподвижна

	$a_3^{(3)}/a_2^{(2)}$	$a_0^{(4)}/a_2^{(2)}$	$a_2^{(4)}/a_2^{(2)}$	$a_4^{(4)}/a_2^{(2)}$
$W = 0.9847$ $w = 7.95 \cdot 10^{-6}$ $a_2^{(2)} = 0.00156$ $e = 0.0684$	0.019	-0.00031	0.055	0.0013
$W = 0.96$ $w = 8.1 \cdot 10^{-6}$ $a_2^{(2)} = 0.00061$ $e = 0.0428$	0.017	-0.00012	0.011	0.00063
$W = 0.94$ $w = 8.3 \cdot 10^{-6}$ $a_2^{(2)} = 0.00042$ $e = 0.0353$	0.016	-0.000083	0.0057	0.00047

Координаты правой точки пересечения:  $W = 0.00015$ ,  $w = 0.0522$ .

**Таблица 3.** Соотношения амплитуд при различных значениях заряда капли и напряженности внешнего электростатического поля, при которых капля радиуса  $R = 0.025$  см неподвижна

	$a_3^{(3)}/a_2^{(2)}$	$a_0^{(4)}/a_2^{(2)}$	$a_2^{(4)}/a_2^{(2)}$	$a_4^{(4)}/a_2^{(2)}$
$W = 0.996$ $w = 4.9 \cdot 10^{-7}$ $a_2^{(2)} = 0.00037$ $e = 0.0332$	0.0049	-0.000074	0.042	0.00027
$W = 0.98$ $w = 5 \cdot 10^{-7}$ $a_2^{(2)} = 0.000075$ $e = 0.0158$	0.0047	-0.000015	0.0022	0.000066
$W = 0.96$ $w = 5.1 \cdot 10^{-7}$ $a_2^{(2)} = 0.000038$ $e = 0.0107$	0.0043	-0.0000076	0.00067	0.000039

Координаты правой точки пересечения:  $W = 0.00000935$ ,  $w \approx 0.0524$ .

**Таблица 4.** Соотношения амплитуд при различных значениях заряда капли и напряженности внешнего электростатического поля, при которых капля радиуса  $R = 0.01$  см неподвижна

	$a_3^{(3)}/a_2^{(2)}$	$a_0^{(4)}/a_2^{(2)}$	$a_2^{(4)}/a_2^{(2)}$	$a_4^{(4)}/a_2^{(2)}$
$W = 0.9994$ $w = 1.254 \cdot 10^{-8}$ $a_2^{(2)} = 6.3 \times 10^{-5}$ $e = 0.0137$	0.0008	-0.0000125	0.045	0.000043
$W = 0.98$ $w = 1.28 \cdot 10^{-8}$ $a_2^{(2)} = 1.9 \times 10^{-6}$ $e = 0.0024$	0.00075	-0.00000038	0.000055	0.0000017
$W = 0.96$ $w = 1.3 \cdot 10^{-8}$ $a_2^{(2)} = 9.8 \times 10^{-7}$ $e = 0.0017$	0.0007	-0.00000019	0.000017	0.000001

Координаты правой точки пересечения:  $W \approx 0$ ,  $w \approx 0.0524$ .

амплитуды  $a_2^{(2)}$  и эксцентриситета  $e$  сфероидальной формы капли.

Из таблиц нетрудно заметить, что с увеличением собственного заряда капли (параметра Рэля) вклад основной моды в форму поверхности уменьшается, но незначительно. Эксцентриситет капли уменьшается с уменьшением ее размера, хотя форма капли остается формально сфероидальной в том смысле, что имеется выделенное направление. Кроме того, бросается в глаза, что вклад третьей моды, определяющий грушевидную деформацию капли, весьма мал и уменьшается с уменьшением размера капли.

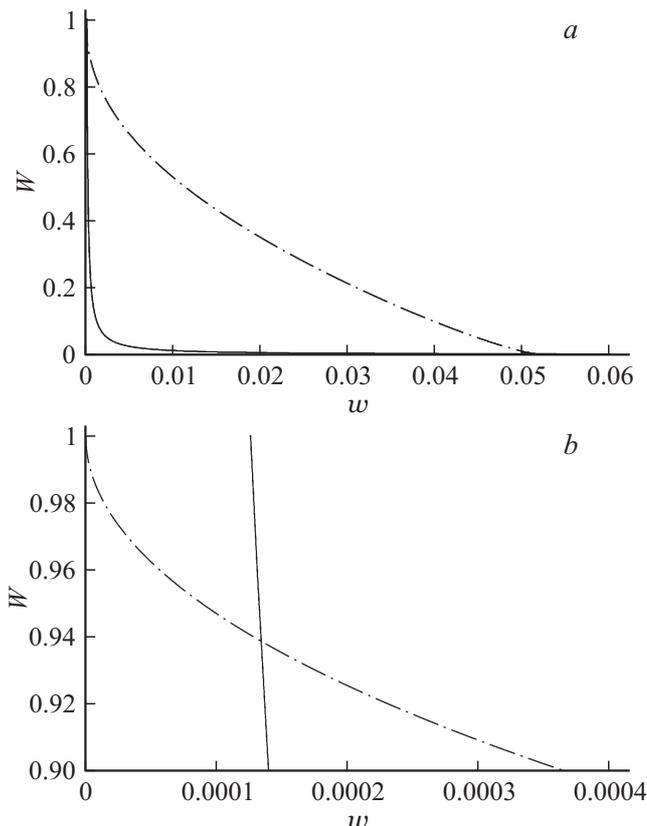
Как видно из таблиц и рис. 1, форма капли будет сформирована в первую очередь основной модой, вклад остальных мод будет весьма мал. Таким образом, форму

сильно заряженной капли, находящейся в суперпозиции гравитационного и слабого электростатического полей, можно считать сфероидальной, описываемой выражениями (9), (10). Тогда квадрат ее эксцентриситета определится соотношением [11,12]

$$e^2 = \frac{9w}{(1-W)}.$$

Как показывают расчеты, эксцентриситет капли всегда незначителен, но отличен от нуля.

На рис. 2, *a* сплошная линия отображает зависимость параметра Рэлея  $W$  от параметра Тейлора  $w$ , удовлетворяющую условию неподвижности заряженной капли в электростатическом подвесе, а штрихпунктирная линия отражает зависимость (11). Несложно видеть, что эти две кривые пересекаются в двух точках, одна соответствует большим зарядам и малым полям, а другая, наоборот, сильным полям и слабым зарядам. При изменении размера капли меняется масштаб обезразмеривания, при этом смещаются координаты точек пересечения: с уменьшением радиуса эти точки расходятся друг от друга, прижимаясь к осям координат. При радиусе капли



**Рис. 2.** *a* — кривые зависимости критического значения параметра  $W$  от критического значения параметра  $w$  (штрихпунктирная линия), полученные по (11), и зависимости  $W$  от  $w$  (сплошная линия), удовлетворяющие условию неподвижности заряженной капли, в электростатическом подвесе; *b* — то же самое, что на рис. 2, *a*, но в более крупном масштабе для малой окрестности левой точки пересечения кривых.

в  $100\mu\text{m}$  координаты точек пересечения отличаются от предельных значений (полученных для сферической сильно заряженной капли [1] и для незаряженной сфероидальной капли в однородном электростатическом поле [11]) на сотые доли процента, а для капли радиуса  $R = 10\mu\text{m}$  координаты точек пересечения фактически сливаются с предельными значениями:  $W \approx 1$ ,  $w \approx 0$  и  $W \approx 0$ ,  $w \approx 0.0524056$ . Конечно, ни поле (в левой точке пересечения), ни заряд (в правой точке пересечения) не будут точно равны нулю, но будут принимать бесконечно малые значения.

Только эти две обсуждаемые точки удовлетворяют условию неподвижности критически заряженной капли, подвешенной в критическом для данного заряда поле. Данное рассмотрение посвящено сильно заряженной капле, подвешенной в суперпозиции гравитационного и слабого электростатического полей, чему соответствует левая точка. Положение именно этой точки иллюстрируется на рис. 2, *b* в более крупном масштабе, чем на рис. 2, *a*. Точному значению критического заряда соответствует точка пересечения критической кривой с осью  $W$ , но в этой точке он не может быть измерен, поскольку эта точка не удовлетворяет условию электростатического подвеса. Реальные измерения возможны лишь в точке пересечения кривых, изображенных на рис. 2, *b*, и, следовательно, измеряемое критическое значение заряда будет заведомо отличаться от истинного. Величина ошибки зависит от координат точки пересечения, и, как упоминалось выше, для мелких капель может быть сделана исчезающе малой.

Указанное снижение практически до нуля ошибки измерения параметра Рэлея  $W$ , связанное с подвесом, еще ничего не означает с точки зрения достижения максимальной точности измерений: существует еще один плохо контролируемый источник ошибок, исследованный в [13], связанный с нелинейными осцилляциями капель. Но к данному рассмотрению это уже не относится.

Подводя итог, отметим, что ошибка, вносимая подвесом, для капель с теми размерами, что использовались в экспериментах [4–10], весьма незначительна.

Интересен факт возбуждения нулевой моды. Известно, что в линейных расчетах для капли несжимаемой жидкости возбуждение нулевой моды не фиксируется в теории [14]. Ее возбуждение обнаруживается лишь в расчетах более высокого порядка малости, и носит компенсационный характер [15].

## Заключение

Равновесная форма сильно заряженной капли, подвешенной в суперпозиции гравитационного и слабого электростатического полей, когда ее деформация по сравнению с исходной сферической формой обусловлена не взаимодействием поляризационного заряда с внешним электростатическим полем, но отталкиванием собственного заряда, находящегося на половинках кап-

ли вдоль выделенного направления, заданного слабым внешним электростатическим полем, может считаться вытянутой сфероидальной.

Степенью грушевидного искажения можно пренебрегать. Принципиальная ошибка определения критерия Рэлея в электростатическом подвесе может составлять единицы процентов, в зависимости от размера капли, и уменьшается практически до нуля с уменьшением размера капли до десятков микрометров.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170 и № 14-08-00240.

## Список литературы

- [1] Rayleigh (*Strutt J.W.*) // *Phil. Mag.* 1882. Vol. 14. P. 184–186.
- [2] Григорьев А.И. // *ЖТФ.* 1986. Т. 56. Вып. 7. С. 1272–1278.
- [3] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Корниенко Д.О. // *ЖТФ.* 2010. Т. 80. Вып. 11. С. 11–20.
- [4] Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B. // *J. Coll. Sci.* 1964. Vol. 19. P. 136–143.
- [5] Berg T.G.O., Trainor R.J., Vaughan U. // *J. Atmosph. Sci.* 1970. Vol. 27. N 11. P. 1173–1181.
- [6] Schweizer J.D., Hanson D.N. // *J. Coll. Int. Sci.* 1971. Vol. 35. N 3. P. 417–423.
- [7] Roulleau M., Desbois M. // *J. Atmosph. Sci.* 1972. Vol. 29. N 4. P. 565–569.
- [8] Duft D., Lebbeus H., Huber B.A. // *Phys. Rev. Lett.* 2002.
- [9] Duft D., Achtzehn T., Muller R. et al. Rayleigh // *Nature.* 2003. V. 421. P. 128.
- [10] Grimm R.L., Beauchamp J.L. // *J. Phys. Chem. B.* 2005. Vol. 109. P. 8244–8250.
- [11] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И. // *ЖТФ.* 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
- [12] Ширяева С.О. // *ЖТФ.* 2006. Т. 76. Вып. 10. С. 32–40.
- [13] Григорьев А.И., Жаров А.Н., Ширяева С.О. // *ЖТФ.* 2005. Т. 75. Вып. 8. С. 44–53.
- [14] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Гидродинамика.* М.: Наука, 1986. 733 с.
- [15] Ширяева С.О. // *ЖТФ.* 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–22.