

Аналитическое описание динамики заряженных частиц в поле магнитного сферического диполя

© В.К. Баев, Б.Ю. Богданович, А.В. Нестерович

Национальный исследовательский ядерный университет „МИФИ“,
115409 Москва, Россия
e-mail: baev.valerij2010@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 5 июня 2014 г. В окончательной редакции 11 сентября 2014 г.)

Представлены результаты анализа уравнений движения заряженных частиц в магнитном поле Земли, позволяющие оценивать такие важные характеристики динамики зарядов, как условия их захвата, частоту и амплитуду колебаний, долготный дрейф, а также позволяющие связать эти характеристики с параметрами заряженных частиц и высотой их траектории. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании космических аппаратов, предназначенных для исследований околоземного космического пространства и, в частности, магнитосферы Земли с помощью пучков заряженных частиц.

Введение

В работе [1] были изложены результаты численного моделирования динамики пучков заряженных частиц в магнитосфере Земли, выявившего ряд интересных особенностей этой динамики, пожалуй самой интересной из которых является способность магнитосферы транспортировать пучки на сверхдальние расстояния, сохраняя при этом их небольшие поперечные размеры, что открывает широкие возможности использования пучков в качестве зондов для исследований околоземного космического пространства (ОКП). Вообще-то, в силу многообразия физических явлений, сопровождающих взаимодействие пучков заряженных частиц со средой их распространения, они представляют эффективный инструмент для зондирования и диагностики этой среды, а также для исследования протекающих в ней процессов, и поэтому в настоящее время пучки заряженных частиц применяются для решения широкого круга научных и прикладных задач. Отчасти о таких наиболее важных задачах говорится в работе [1], и поэтому здесь на них останавливаться не будем.

Хотя численное моделирование динамики пучков в магнитосфере Земли и выявило отмеченные выше интересные особенности этой динамики, само по себе такое моделирование является малоэффективным средством на стадии разработок, когда, как правило, требуется перебирать большое количество всевозможных вариантов, добываясь нужных результатов, когда приходится комбинировать множество свободных параметров системы. На стадии разработок неизбежно возникает необходимость в аналитическом описании работы проектируемых систем, которое хотя бы качественно верно представляло их работу, поскольку аналитические выражения связывают между собой параметры системы и ее характеристики, что существенно уменьшает объем расчетов при численном моделировании. Ниже приводятся приближенные решения уравнений движения заряженных частиц в магнитосфере Земли, позволяющие вывести

условия их захвата магнитным полем Земли, оценивать такие важные характеристики этого движения, как частоту и амплитуду колебаний зарядов, долготный дрейф, и связать эти характеристики с параметрами зарядов и высотой их траектории.

Постановка задачи

Везде ниже будут использоваться безразмерные величины со следующей нормировкой:

$$\begin{aligned} x &= \frac{x^*}{\lambda}, & y &= \frac{y^*}{\lambda}, & z &= \frac{z^*}{\lambda}, \\ r &= \frac{r^*}{\lambda}, & \tau &= \frac{ct}{\lambda}, & B &= \frac{eB^*\lambda}{m_0c}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь и ниже звездочкой (*) обозначены размерные величины, c — скорость света в м/с, λ — характерный размер рассматриваемой физической системы, m_0 , e — масса покоя в килограммах и заряд в Кулонах частицы соответственно.

Для записи уравнений движения используются как декартова, так и сферическая системы координат. Магнитное поле Земли в околоземном пространстве в пределах 5–6 ее радиусов с достаточно высокой для математического моделирования точностью аппроксимируется полем магнитного сферического диполя (МСД) [2]:

$$B_r = \frac{2M}{r^2} \cos \theta, \quad B_\theta = \frac{M}{r^2} \cos \theta, \quad B = \frac{M}{r^2} \sqrt{1 + 3 \cos^2 \theta}. \quad (2)$$

Как видно из выражений (2), у МСД, изображенного на рис. 1, из-за круговой симметрии его поля относительно оси z отсутствует φ -я компонента, $B_\varphi = 0$.

Уравнение продольного движения

Если в уравнение продольного движения заряда в магнитном поле ввести выражения (2), то получим

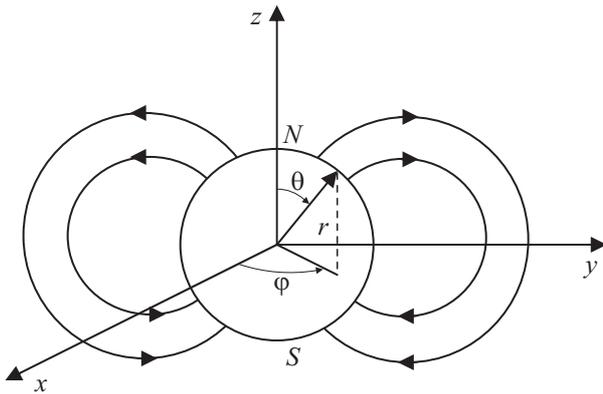


Рис. 1. Поле магнитного сферического диполя в декартовых и сферических координатах.

следующее уравнение движения заряженной частицы в поле МСД:

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{2M\dot{\phi}}{\gamma r^2} \sin\psi \cdot \cos^2\psi. \quad (3)$$

Здесь для удобства сделан переход к углу ψ

$$\psi = \theta - \frac{\pi}{2}, \quad (4)$$

при этом

$$B_r = -\frac{2M}{r^2} \sin\psi, \quad B_\theta = \frac{M}{r^2} \cos\psi. \quad (5)$$

Добавим в это уравнение силы трения, обусловленные неупругими соударениями заряженных частиц с молекулами остаточного газа и в случае электронного пучка синхротронным излучением

$$\frac{d^2z}{d\tau^2} = \frac{3M\dot{\phi}}{\gamma r^2} \sin\psi \cdot \cos^2\psi - \alpha_f \frac{dz}{d\tau}. \quad (6)$$

Коэффициент силы трения α_f складывается из двух слагаемых

$$\alpha_f = \alpha_e + \alpha_c, \quad (7)$$

первое из которых α_e обусловлено синхротронным излучением, а второе α_c — его неупругими соударениями с молекулами остаточного газа.

Величину α_e найдем с помощью известного выражения для потери энергии заряженной частицей за один оборот ΔE_e [3]

$$\Delta E_e = \frac{4\pi r_e E_0}{3} \frac{\beta^2 \gamma^4}{r}, \quad (8)$$

где

$$r_e = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_0 c^2}. \quad (9)$$

Здесь r — ларморов радиус заряженной частицы в метрах; e , m_0 , E_0 — ее заряд в кулонах, масса покоя в килограммах и энергия покоя в электронвольтах

соответственно; c — скорость света в м/с; β — скорость частицы, выраженная в единицах скорости света; ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума в Ф/м.

В безразмерных величинах коэффициент трения α_e , обусловленный синхротронным излучением, будет иметь вид

$$\alpha_e = G_e \frac{\beta^2 \gamma^2}{\eta^2}. \quad (10)$$

Здесь η — безразмерный ларморов радиус заряда,

$$G_e = \frac{|e|}{6\pi\lambda\epsilon_0 E_0}. \quad (11)$$

Величина α_c определяется очевидным выражением

$$\alpha_c = \frac{G_c}{\beta\gamma}, \quad (12)$$

где

$$G_c = \frac{\Delta E_c \lambda}{l_c E_0}. \quad (13)$$

Здесь ΔE_c — потери энергии заряженной частицы в результате неупругих столкновений с молекулами остаточного газа в электронвольтах, l_c — длина свободного пробега заряда, которую можно оценить по известной формуле [4]

$$l_c = \frac{kT}{\sqrt{2}\pi\sigma^2 p}. \quad (14)$$

Здесь k — постоянная Больцмана, σ — диаметр молекулы, T — температура остаточного газа по шкале Кельвина, p — давление остаточного газа.

К уравнению продольного движения (6) следует добавить уравнение изменения полной энергии заряда

$$\frac{d\gamma}{d\tau} = -G_e \frac{\beta^4 \gamma^4}{\eta^2} - G_c \beta. \quad (15)$$

В случае малых продольных колебаний заряженной частицы около экваториальной плоскости МСД, когда $|\psi| \ll 1$, уравнение продольного движения (3) в линейном приближении принимает вид

$$\ddot{z} = \frac{3M\dot{\phi}}{\gamma r^2} \sin\psi \quad (16)$$

или, учитывая, что

$$z = -r \sin\psi, \quad (17)$$

получим следующее уравнение малых продольных колебаний заряженной частицы в поле МСД

$$\ddot{z} + \frac{3M\dot{\phi}}{\gamma r^2} z = 0. \quad (18)$$

Сила Лоренца, удерживающая заряд вблизи его положения равновесия на экваториальной плоскости МСД, обусловлена долготной скоростью и радиальной компонентой магнитного поля B_r (5). Долготное движение заряда складывается из долготного дрейфа и вращения

по ларморовой окружности со скоростью β . Как увидим ниже, линейная скорость долготного дрейфа оказывается много меньше β . Поэтому в уравнении (18) можно ограничиться только той составляющей силы, которая обусловлена вращением заряда по ларморовой окружности со скоростью β .

При таком допущении уравнение малых продольных колебаний принимает окончательно следующий вид:

$$\ddot{z} = \Omega^2 z = 0, \tag{19}$$

где

$$\Omega^2 = \frac{3M}{r_c^4 \gamma^2} \sqrt{\gamma^2 - 1}. \tag{20}$$

Здесь r_c — радиус центра ларморовой окружности, отсчитываемый от центра МСД, а Ω — частота малых продольных колебаний заряженной частицы в поле МСД.

В расчетах удобно в качестве величины, нормирующей длину, взять радиус Земли $\lambda = 6.378 \cdot 10^6$ m, тогда, в частности, безразмерный магнитный момент Земли M будет равен $M = 1.169 \cdot 10^5$.

В зависимости от высоты орбиты электронов, которая варьировала от 300 до 1000 km, и от их энергии в пределах от 1 до 10 MeV, период колебаний электронов около экваториальной плоскости лежит в пределах от сотен микросекунд до миллисекунд.

Долготный дрейф

Из-за спада магнитного поля МСД по радиусу возникает так называемый долготный дрейф, в результате которого заряд смещается (дрейфует) по долготе φ . Механизм долготного дрейфа пояснен на рис. 2.

При движении по ларморовой окружности заряд в поле B_1 в области над осью φ имеет ларморов радиус η_1 больший, чем в области под осью φ , где $B_2 > B_1$.

Найдем угловую скорость долготного дрейфа, исходя из выражения для ларморова радиуса

$$\eta = \frac{\beta \gamma}{B}. \tag{21}$$

По мере движения заряда по ларморовой окружности он будет смещаться по радиусу r , что, в свою очередь, будет вызывать изменение магнитного поля, а следовательно, и ларморова радиуса. Продифференцировав выражение (21) по радиусу, получим величину изменения ларморова радиуса в пределах ларморовой окружности

$$\Delta \eta = \frac{6\beta \gamma}{r B} \eta. \tag{22}$$

Изменение ларморова радиуса вызывает смещение по долготе на величину $\Delta \eta / r$ за период оборота по ларморовой окружности T_η

$$T_\eta = \frac{2\pi \gamma}{B}, \tag{23}$$

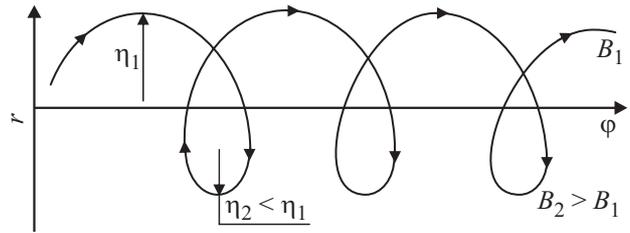


Рис. 2. Механизм долготного дрейфа.

так, что

$$\dot{\varphi} = \frac{\Delta \eta}{r} \frac{B}{2\pi \gamma} = \frac{3\beta^2 \gamma}{2\pi r^2 B}. \tag{24}$$

Ограничимся малыми колебаниями, когда магнитное поле можно аппроксимировать функцией $B = M/r^2$, тогда выражение (24) принимает вид

$$\dot{\varphi} = \frac{3r\beta^2 \gamma}{\pi M} \tag{25}$$

и линейная скорость долготного дрейфа $\beta_\varphi = r\dot{\varphi}$ для малых колебаний будет определяться следующим выражением:

$$\beta_\varphi = \frac{3r^2 \beta^2 \gamma}{\pi M}. \tag{26}$$

Умножив скорость дрейфа (26) на половину периода продольных колебаний, получим величину долготного дрейфа L_d заряженной частицы на экваториальной плоскости, на которой лежит орбита инжектора пучка

$$L_d = \frac{\pi}{\Omega} \beta_\varphi = \frac{\sqrt{3} r^4 (\beta \gamma)^2}{M^{3/2} (\gamma^2 - 1)^{1/4}}. \tag{27}$$

На рис. 3 представлены зависимости величины долготного дрейфа электронов, вернувшихся на экваториальную плоскость после половины периода колебаний относительно этой плоскости, от их безразмерной энергии на разных высотах.

Отдельный интерес представляют изображенные на рис. 4 случаи, когда электроны возвращаются на инжектировавший их аппарат. Очевидно, это произойдет тогда,

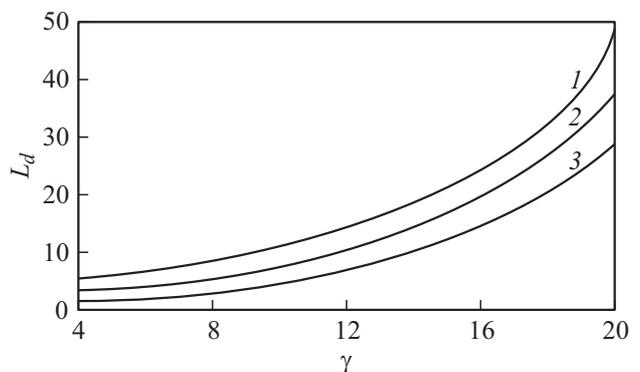


Рис. 3. Зависимости долготного дрейфа L_d в метрах электронов от их полной энергии, отнесенной к энергии покоя на разных высотах: 1 — на высоте 1000, 2 — 600, 3 — 300 km.

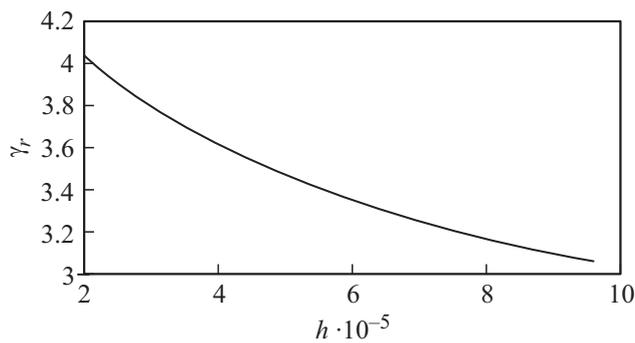


Рис. 4. Зависимость энергии электронов γ_r в единицах энергии покоя, возвращающихся на инжектировавший их аппарат, в зависимости от высоты их траектории h в метрах.

когда скорость аппарата совпадет со скоростью долгого дрейфа электронов на экваториальной плоскости. На рис. 4 изображена зависимость энергии γ_r таких электронов, отнесенная к их энергии покоя, от высоты траектории электронов h .

Условия захвата заряженных частиц

Для получения условий захвата заряженных частиц полем МСД будем аппроксимировать его зону, в которой движутся частицы, магнитным полем адиабатической ловушки. Символами B_m и B_M обозначим значения магнитного поля ловушки в плоскости ее симметрии (минимальное поле) и в так называемых пробках (максимальное поле) соответственно.

Подобная аппроксимация, очевидно, приемлема, если ларморов радиус вращения заряженной частицы и амплитуда ее колебаний много меньше радиуса кривизны силовых линий магнитного поля МСД. Первое условие выполняется во всех практически интересных случаях. Что же касается второго условия, то его можно считать выполненным в приближении малых колебаний.

Воспользуемся известной теорией динамики заряженных частиц в адиабатической ловушке, изложенной, например, в работе [5]. В ее основе лежат следующие два дифференциальных уравнения

$$mr = -\frac{\partial U}{\partial r}, \quad mz = -\frac{\partial U}{\partial z}, \quad (28)$$

в которых U — потенциальная энергия заряда в магнитном поле, определяемая выражением

$$U = \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\varphi}{r} - eA_\varphi \right)^2. \quad (29)$$

Здесь φ — азимут в цилиндрической системе координат, p_φ — обобщенный азимутальный импульс, A_φ — единственная отличная от нуля азимутальная компонента векторного потенциала.

К уравнениям движения следует добавить два закона сохранения — энергии и импульса p_φ . Если задано

магнитное поле на оси адиабатической ловушки в виде функции $B_0(z)$, то компонента A_φ может быть выражена через эту функцию [7]. Исследование эквипотенциальных поверхностей $U(r, z) = \text{const}$ показывает, что они являются замкнутыми и вложенными одна в другую, как показано на рис. 5, если выполнено условие

$$p_\varphi = -p < 0. \quad (30)$$

Координаты особых точек этих поверхностей определяются соотношениями

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (31)$$

Одна из них — центр (r_1, z_1) — находится в минимуме функции $B_0(z)$, а вторая — седловая точка (r_2, z_2) — соответствует максимуму функции $B_0(z)$.

Из выражений (31) следуют значения координат r_1 и r_2

$$r_1^2 = \frac{2p_\varphi}{eB_{01}}, \quad r_2^2 = \frac{2p_\varphi}{eB_{02}}. \quad (32)$$

Здесь $B_{01} = B_0(z_1)$, $B_{02} = B_0(z_2)$.

Если частица инжектируется вне сепаратрисы, т.е. в области адиабатической ловушки, где эквипотенциали не замкнуты, то она через полюса упадет в атмосферу Земли. Если же заряженная частица инжектируется внутри сепаратрисы, то она захватывается магнитным полем Земли и, в принципе, может находиться в нем сколько угодно долго.

Если v — полная скорость заряда, то достаточному условию (30) его удержания внутри сепаратрисы, или, другими словами, условию захвата заряда магнитным

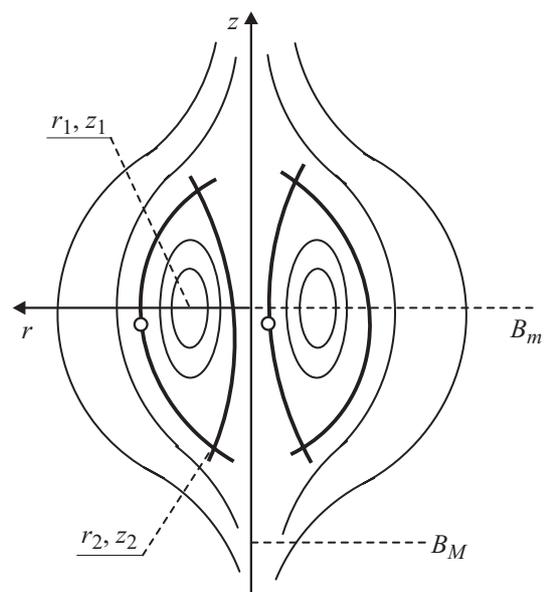


Рис. 5. Фазовый портрет заряженных частиц в адиабатической ловушке.

полем Земли, можно придать следующий вид:

$$\frac{mv^2}{2} < \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\phi}{r} - eA_\phi \right)_c^2 = \frac{1}{2m} \left(\frac{p_\phi}{r_2} - eA_\phi(r_2, z_2) \right)^2. \quad (33)$$

Подставив в это выражение известное представление азимутальной компоненты A_ϕ через функцию $B_0(z)$ в виде ряда по производным от последней и ограничившись первым членом этого ряда, получим условие захвата магнитным полем Земли заряженной частицы в следующем виде:

$$(mv)^2 < 2eB_{02}p_\phi. \quad (34)$$

Если частица инжектируется в центре сепаратрисы, $r = r_1, z = z_1$, то выражение для p_ϕ примет вид

$$2p_\phi = mr_1|v_{0\phi}|. \quad (35)$$

Подставив в это выражение значение величины r_1 , получим следующее выражение для величины p_ϕ :

$$p_\phi = \frac{2m^2v_{0\phi}^2}{eB_{01}}. \quad (36)$$

Отсюда, согласно неравенству (34), находим достаточное условие захвата магнитным полем Земли заряженной частицы

$$\frac{v_{0\phi}^2}{v^2} \geq \frac{B_{01}}{B_{02}}, \quad (37)$$

которое усилим, введя в него полную поперечную скорость заряженной частицы,

$$\frac{v_\perp^2}{v^2} = \frac{v_{0\phi}^2 + v_{0r}^2}{v^2} \geq \frac{B_{01}}{B_{02}}. \quad (38)$$

Если ввести скорость вдоль силовых линий магнитного поля и угол α

$$v_\parallel = \sqrt{v^2 - v_\perp^2} \sin \alpha = \frac{v_\parallel}{v}, \quad (39)$$

то получим следующий удобный для оценок вариант условия захвата заряженной частицы магнитным полем адиабатической ловушки:

$$\cos^2 \alpha > \frac{B}{B_M}. \quad (40)$$

Здесь B — магнитное поле в месте старта заряда.

Таким образом, от пробок отражаются только те заряды, угол вектора скорости которых с силовой линией магнитного поля больше, чем $(\pi/2) - \alpha$.

В данном случае особый интерес представляет случай инжекции заряженных частиц в экваториальной плоскости магнитосферы Земли, что соответствует в используемой здесь аппроксимации магнитным полем адиабатической ловушки инжекции в плоскости симметрии ловушки, где магнитное поле минимально $B = B_m$.

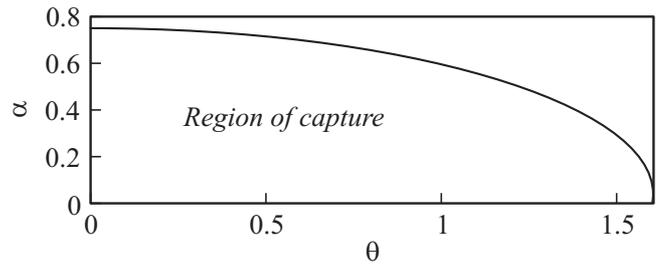


Рис. 6. Зависимость угла захвата α в радианах от широты θ в радианах.

В этом случае (см. рис. 5) конус можно назвать конусом захвата заряженных частиц, поскольку те частицы, у которых v_\parallel и v таковы, что через пробки уходят из ловушки вдоль силовых линий магнитного поля.

На рис. 6 изображена область захвата заряженных частиц на плоскости (α, θ) . Как видно из рис. 1, угол θ — это широта, отсчитываемая от оси z , поэтому в рамках сделанных упрощений по существу угол $(\pi/2 - \theta)$ представляет амплитуду колебаний зарядов, захваченных магнитным полем Земли, выраженную в радианах широты.

Из сравнения полученных в аналитическом приближении и приведенных здесь результатов с результатами численного моделирования динамики заряженных частиц в магнитосфере Земли [1] следует, что предлагаемое приближение работает в довольно широком диапазоне значений параметров пучков и поэтому имеет практическую значимость, особенно на стадии разработок.

Заключение

Представленное в настоящей работе аналитическое описание движения заряженных частиц в магнитном поле Земли, аппроксимируемом полем МСД, позволяет связать такие важные характеристики динамики зарядов, как условия их захвата, частоту и амплитуду колебаний, долготный дрейф с параметрами заряженных частиц, их стартовыми условиями и высотой траектории. В частности, показано, что в случае с электронными пучками возможно использовать один и тот же аппарат как в качестве излучателя, генерирующего электронный пучок, так и в качестве приемника, собирающего отраженные электроны. Полученные результаты могут представлять интерес при решении задач оптимизации рассмотренной динамики с целью получения требуемых характеристик. Например, определение спектра, стартовых размеров, типа заряженных частиц пучка, позволяющих оптимизировать размеры области исследований околоземного космического пространства и затрачиваемое на эти исследования время.

Настоящая работа выполнена в рамках соглашения № 14-19-00022 между Российским научным фондом, «Национальным исследовательским ядерным университетом „МИФИ“» и руководителем проекта Б.Ю. Богдановичем о предоставлении гранта на проведение фундаментальных и поисковых научных исследований.

Список литературы

- [1] *Баев В.К., Нестерович А.В., Свирин В.Ю.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 1. С. 139–142.
- [2] *Яновский Б.М.* Морфология и теория магнитного поля Земли и его вариации. Л.: Университет, 1964. 84 с.
- [3] *Лебедев А.Н., Шальнов А.В.* Основы физики и техники ускорителей. М.: Энергоатомиздат, 1991. 106 с.
- [4] *Яворский Б.М., Детлаф А.А.* Справочник по физике. М.: Наука, 1968. 208 с.
- [5] Вопросы теории плазмы / Сб. тр. под ред. М.А. Леонтовича. Вып. 2. М.: Госатомиздат, 1963. 185 с.