

03

Анализ реализуемости условий нейтральной устойчивости ударных волн при обтекании клина идеальным газом

© А.М. Блохин, Д.Л. Ткачев

Новосибирский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия
e-mail: blokhin@math.nsc.ru

(Поступило в Редакцию 8 апреля 2014 г. В окончательной редакции 1 сентября 2014 г.)

С помощью численных экспериментов изучен вопрос о реализуемости условий нейтральной устойчивости ударных волн в задаче об обтекании клина реальными газами. С этой целью выписана адиабата Гюгонио для газа Ван-дер-Ваальса, т.е. найдена связь между углом клина и углом ударной волны. Приведены некоторые результаты (в виде таблиц) из большого количества проделанных численных расчетов. Анализ этих результатов позволяет выделить режимы обтекания клина с нейтрально устойчивыми ударными волнами.

Введение

В 50–60-х годах прошлого столетия в связи с многочисленными приложениями и теоретическими изысканиями активно изучалась задача об устойчивости ударных волн (в основном на физическом уровне строгости). Линейная теория устойчивости ударных волн была предметом исследования во многих работах (см., например, [1–4]). В этих работах были получены цепочки неравенств (они приведены ниже в разд. 1), при выполнении которых ударная волна либо абсолютно (равномерно) устойчива, либо нейтрально устойчива, либо просто неустойчива.

Так называемый „уравненческий“ подход к задаче об устойчивости ударных волн развивался первоначально в работах одного из авторов настоящей работы ([5,6]; см. также монографию [7]). Суть этого подхода заключается в том, что сначала формулируется линейная смешанная задача в некоторой области, на части границы которой выставлены линеаризованные граничные соотношения Рэнкина–Гюгонио на ударной волне. Далее изучается корректность сконструированной линейной смешанной задачи для системы дифференциальных уравнений.

Большой интерес у специалистов всегда вызывали так называемые нейтрально устойчивые ударные волны. Это связано с тем, что до сих пор определенно ничего нельзя сказать о реальном существовании нейтрально устойчивых ударных волн (см. по этому поводу, например, [5,6,8,9]). С точки зрения „уравненческого“ подхода показано, что для линеаризованных граничных условий, которые отвечают нейтрально устойчивым изолированным ударным волнам, соответствующая линейная смешанная задача корректна.

Настоящая работа посвящена анализу реализуемости условий нейтральной устойчивости ударных волн в задаче об обтекании клина идеальными газами: газом Ван-дер-Ваальса и обобщенным газом Ван-дер-Ваальса. Вводя вместо размерных величин некоторое количество безразмерных параметров, удастся получить связь меж-

ду углами клина и ударной волны в удобной форме. Найденная связь подвергалась численному исследованию. Результаты численных экспериментов отражены в многочисленных таблицах.

1. Обтекание клина потоком идеального газа. Предварительные сведения

Как известно (см., например, монографии [5–7,10–12]), уравнения газовой динамики имеют точное решение, которое соответствует стационарному обтеканию бесконечного клина равномерным потоком газа (рис. 1).

Структура этого решения такова. При $\theta > b$ ($\theta = b$ — уравнение фронта ударной волны в полярной системе координат r, θ , рис. 2):

$$u = \hat{u}_\infty(\theta) = U_\infty \cos(\theta), \quad v = \hat{v}_\infty(\theta) = -U_\infty \sin(\theta),$$

$U_\infty = \text{const}$ — скорость газа в набегающем потоке, $p = \hat{p}_\infty = f(\hat{\rho}_\infty, \hat{S}_\infty) = \text{const}$, $\rho = \hat{\rho}_\infty = \text{const}$, $S = \hat{S}_\infty = \text{const}$, $V = \hat{V}_\infty = 1/\hat{\rho}_\infty = \text{const}$ — давление, плотность, энтропия и удельный объем в набегающем потоке

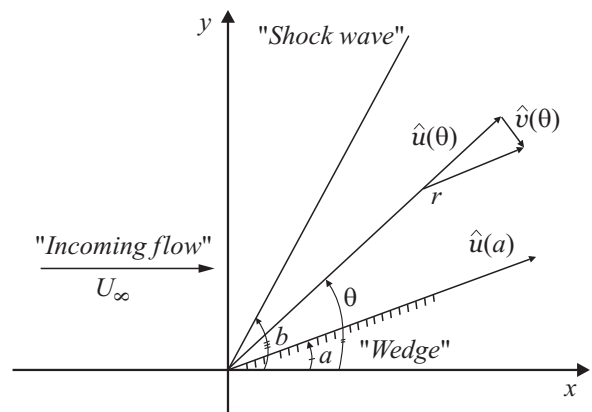


Рис. 1. Обтекание клина равномерным потоком газа.

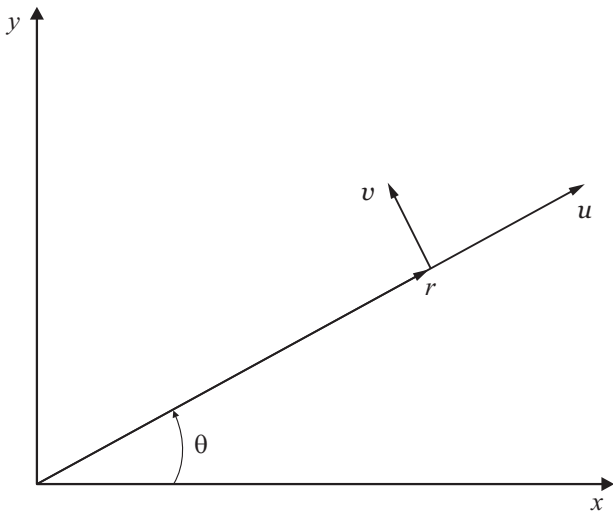


Рис. 2. Полярная система координат.

газа; $c^2 = \hat{c}_\infty^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\hat{\rho}_\infty, \hat{S}_\infty)$ — квадрат скорости звука в набегающем потоке газа, причем $U_\infty \sin(b) > \hat{c}_\infty$; при $0 < a < \theta < b < \pi/2$ ($\theta = a$ — уравнение поверхности клина (рис. 1)):

$$u = \hat{u}(\theta) = \hat{u}(a) \cos(s), \quad v = \hat{v}(\theta) = -\hat{u}(a) \sin(s),$$

$s = \theta - a$, $p = \hat{p} = f(\hat{\rho}, \hat{S}) = \text{const}$ ($\hat{p} > \hat{p}_\infty$), $\rho = \hat{\rho} = \text{const}$ ($\hat{\rho} > \hat{\rho}_\infty$), $S = \hat{S} = \text{const}$ ($\hat{S} > \hat{S}_\infty$), $V = \hat{V} = 1/\hat{\rho} = \text{const}$ — давление, плотность, энтропия и удельный объем в газе за ударной волной; $c^2 = \hat{c}^2 = \frac{\partial f}{\partial \rho}(\hat{\rho}, \hat{S})$ — квадрат скорости звука в газе за ударной волной; при $\theta = b$ выполняются условия Рэнкина–Гюгонио (об условиях Рэнкина–Гюгонио см., например, [10–13]) на фронте ударной волны:

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}(b) &= \hat{u}_\infty(b), \\ (\hat{v}(b) + U_\infty \sin(b))^2 + (\hat{p} - \hat{p}_\infty)(\hat{V} - \hat{V}_\infty) &= 0, \\ E(\hat{V}, \hat{p}) - E(\hat{V}_\infty, \hat{p}_\infty) \\ + (\hat{V} - \hat{V}_\infty) \frac{\hat{p} + \hat{p}_\infty}{2} &= - \text{адиабата Гюгонио}, \\ \hat{\rho} \hat{v}(b) &= \hat{\rho}_\infty \hat{v}_\infty(b) = -j \\ (j > 0 & \text{ — поток газа через разрыв}). \end{aligned} \right\} (1)$$

Здесь u, v — компоненты вектора скорости газа в полярной системе координат (рис. 2), $p = f(\rho, S)$, $e = E(V, p)$ — уравнения состояния газа, e — внутренняя энергия газа. Справедлив также первый закон термодинамики [12,13]:

$$T dS = de + p dV, \quad (2)$$

где T — температура газа. Если $p = p(V, T)$, $e = e(V, T)$, $S = S(V, T)$, то из условия интегрируемости соотношения (2) мы придем к ограничению:

$$\frac{\partial e}{\partial V} = T^2 \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{p}{T} \right). \quad (3)$$

Кроме этого,

$$\frac{\partial S}{\partial T} = \frac{c_V}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial e}{\partial V} + p \right). \quad (4)$$

Здесь $c_V = \partial e / \partial T$ — удельная теплоемкость газа при постоянном объеме.

Далее мы будем иметь дело либо с газом Ван-дер-Ваальса [14–16]:

$$p = \frac{RT}{V - V_0} - \frac{A}{V^2}, \quad V > V_0, \quad (5)$$

либо с обобщением уравнения состояния (5), которое, следуя [17], мы возьмем в такой форме [9]:

$$p = \frac{RT}{V - V_0} - \frac{A}{(V + C)^k T^m}, \quad V > V_0, \quad (6)$$

где $V_0, A, k, m > 0, C$ — некоторые постоянные, R — газовая постоянная. При $k = 2, C = m = 0$ уравнение (6) переходит в (5), а при $C = m = 0$ — в уравнение из работы [9].

Начнем с уравнения (5), которое является простейшей поправкой к уравнению Клапейрона для идеального газа:

$$pV = RT. \quad (7)$$

Из (3) следует

$$e(V, T) = F(T) - \frac{A}{V}, \quad (8)$$

а из (4) получаем

$$S = R \ln(V - V_0) + \int_{T_0}^T \frac{F'(\xi)}{\xi} d\xi + \tilde{S}_0. \quad (9)$$

Здесь $F(T)$ — некоторая функция, $T_0 > 0, \tilde{S}_0$ — некоторые постоянные. Заметим, что функция

$$p = f(\rho, S)$$

определяется с помощью соотношений (5), (9) исключением температуры T , при этом

$$\begin{aligned} c^2 &= f_\rho(\rho, S) = -V^2 f_V(V, S) \\ &= \frac{pV^2 + A}{V - V_0} \left(1 + \frac{R}{c_V} \right) - \frac{2A}{V}, \quad c_V = F'(T). \end{aligned} \quad (10)$$

Функция $e = E(V, p)$ находится так

$$E(V, p) = F(T) - \frac{A}{V}, \quad T = (V - V_0) \frac{p + \frac{A}{V^2}}{R}. \quad (11)$$

Адиабату Гюгонио (1) для газа Ван-дер-Ваальса сначала запишем в таком виде

$$F(T) - F(\hat{T}_\infty) + A \left(\frac{1}{\hat{V}_\infty} - \frac{1}{V} \right) + (V - \hat{V}_\infty) \frac{p + \hat{p}_\infty}{2} = 0,$$

т. е.

$$V = W(p; \hat{p}_\infty, \hat{V}_\infty, V_0, A), \quad (12)$$

где

$$\hat{T}_\infty = (\hat{V}_\infty - V_0) \frac{\hat{p}_\infty + \frac{A}{V_\infty^2}}{R} \quad (\text{см. (11)}).$$

Путем громоздких выкладок из (12) находим

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dp}(\hat{p}; \hat{p}_\infty, \hat{V}_\infty, V_0, A) = \\ - \frac{\frac{\hat{V} - \hat{V}_\infty}{2} + \frac{c_V(\hat{T})(\hat{V} - V_0)}{R}}{\frac{\hat{p} + \hat{p}_\infty}{2} + \frac{c_V(\hat{T})\hat{p}}{R} + \frac{A}{V^2} \left(1 + \frac{c_V(\hat{T})}{R}\right) - \frac{2A(\hat{V} - V_0)c_V(\hat{T})}{R\hat{V}^3}}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $\hat{T} = (\hat{V} - V_0) \frac{\hat{p} + \frac{A}{V^2}}{R}$ (см. (11)).

В терминах агрегата

$$\Delta = j^2 \frac{dW}{dp}(\hat{p}; \hat{p}_\infty, \hat{V}_\infty, V_0, A) \quad (\text{см. (1), (13)}),$$

ударная волна для газа Ван-дер-Ваальса абсолютно (равномерно) устойчива, если (в работах [1–7])

$$-1 < \Delta < \frac{1 - M^2 \sin^2(\delta)(1 + \bar{\rho})}{1 + M^2 \sin^2(\delta)(\bar{\rho} - 1)}, \quad (14)$$

ударная волна нейтрально устойчива, если

$$\frac{1 - M^2 \sin^2(\delta)(1 + \bar{\rho})}{1 + M^2 \sin^2(\delta)(\bar{\rho} - 1)} < \Delta < 1 + 2M \sin(\delta), \quad (15)$$

где

$$M^2 = \left(\frac{\hat{u}(a)}{\hat{c}}\right)^2, \quad \bar{\rho} = \frac{\hat{V}_\infty}{\hat{V}} > 1, \quad \delta = b - a,$$

M — число Маха в потоке за ударной волной,

$$\hat{c}^2 = \frac{\hat{p}\hat{V}^2 + A}{\hat{V} - \hat{V}_0} \left(1 + \frac{R}{c_V(\hat{T})}\right) - \frac{2A}{\hat{V}} \quad (\text{см. (10)})$$

Действуя аналогично, мы для уравнения состояния (6) последовательно получаем

$$e(V, T) = F(T) - \frac{m+1}{k-1} \frac{A}{(V+C)^{k-1} T^m}, \quad (16)$$

$$\begin{aligned} c^2 = \frac{V^2 \left(mp - (m+1) \frac{RT}{V-V_0} \right)^2}{T \left(F'(T) + \frac{m(m+1)}{k-1} (V+C) \left(\frac{R}{V-V_0} - \frac{P}{T} \right) \right)} \\ + \frac{RTV^2}{(V-V_0)^2} - \frac{kV^2}{V+C} \left(\frac{RT}{V-V_0} - P \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dp}(\hat{p}; \hat{p}_\infty, \hat{V}_\infty, V_0, C, A, m, k) = \\ \frac{\frac{\hat{V} - \hat{V}_\infty}{2} + F'(\hat{T}) \frac{\hat{V} - V_0}{R+m \left(R - \frac{\hat{p}(V-V_0)}{T} \right)} + \\ + \frac{m+1}{k-1} (\hat{V} + C) \left(1 - \frac{R}{R+m \left(R - \frac{\hat{p}(V-V_0)}{T} \right)} \right)}{\frac{\hat{p} + \hat{p}_\infty}{2} + (F'(\hat{T}) - \frac{m+1}{k-1} \frac{R(\hat{V}+C)}{V-V_0}) \frac{R\hat{T}}{V-V_0} + \frac{k}{V+C} (\hat{p}(\hat{V}-V_0) - R\hat{T}) - \\ - \frac{m+1}{k-1} \left(\frac{R\hat{T}}{V-V_0-\hat{p}} \right) + \frac{m+1}{k-1} \frac{(\hat{V}+C)R\hat{T}}{(\hat{V}-V_0)^2}}. \end{aligned} \quad (18)$$

Здесь $\hat{T} = T(\hat{p}, \hat{V})$, $T(p, V)$ — функция, которая находится из соотношения (6).

Заметим, что формулы (16)–(18) переходят естественно при $k = 2$, $C = m = 0$ в соответствующие формулы (8), (10), (13).

Замечание 1.1. Первое, второе и четвертое соотношение (1) можно заменить на следующие:

$$\left. \begin{aligned} \hat{u}(a) &= U_\infty \frac{\cos(b)}{\cos(\delta)}, \\ \hat{p} &= \hat{p}_\infty + j U_\infty \frac{\sin(a)}{\cos(\delta)}, \\ \hat{\rho} &= \text{ctg}(\delta) \text{tg}(b). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Замечание 1.2. В случае нормального газа (более подробно о нормальном газе [10,13]; также препринт [18]) возьмем за основу уравнение (7). Тогда

$$\begin{aligned} e(V, T) &= F(T), \\ S &= R \ln V + \int_{T_0}^T \frac{F'(\xi)}{\xi} d\xi + \tilde{S}_0, \\ c^2 &= pV \left(1 + \frac{R}{c_V(T)} \right), \quad c_V = F'(T), \\ \frac{dW}{dp}(\hat{p}; \hat{p}_\infty, \hat{V}_\infty) &= - \frac{\frac{\hat{V} - \hat{V}_\infty}{2} + \frac{c_V(\hat{T})\hat{V}}{R}}{\frac{\hat{p} + \hat{p}_\infty}{2} + \frac{c_V(\hat{T})\hat{p}}{R}}, \end{aligned}$$

где

$$\hat{V} = W(\hat{p}; \hat{p}_\infty, \hat{V}_\infty), \quad \hat{T} = \frac{\hat{p}\hat{V}}{R}.$$

В [10] доказывается, что для нормального газа

$$\Delta \leq 0.$$

Условия, которым должна удовлетворять функция $F(pV/R)$ в области $\Omega = \{0 < V < \infty, 0 < p < \infty\}$, для нормального газа сформулированы в [18].

2. Нахождение связи между углами b и a

Удобно ввести следующие параметры для газа Ван-дер-Ваальса:

$$\alpha = \frac{A}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty^2}, \quad \beta = \frac{V_0}{\hat{V}_\infty} \quad (20)$$

и

$$\gamma_\infty = 1 + \frac{R}{c_V(\hat{T}_\infty)} > 1. \quad (21)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \hat{T}_\infty &= (\hat{V}_\infty - V_0) \frac{\hat{p}_\infty + \frac{A}{\hat{V}_\infty^2}}{R} = \frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} (1 - \beta)(1 + \alpha) \\ &= \frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda_\infty, \quad 0 < \beta < 1, \quad \alpha > 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{T} &= (\hat{V} - V_0) \frac{\hat{p} + \frac{A}{\hat{V}^2}}{R} = \frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} (1 - \beta \bar{\rho}) \frac{\hat{p} + \alpha \bar{\rho}^2}{\bar{\rho}} \\ &= \frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda, \end{aligned}$$

$$\frac{\hat{p}}{\hat{p}_\infty} = 1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{1 + xy}, \quad \tilde{M}_\infty^2 = M_\infty^2 \left(\gamma_\infty \frac{1 + \alpha}{1 - \beta} - 2\alpha \right),$$

$M_\infty^2 = U_\infty^2 / \hat{c}_\infty^2$ — квадрат числа Маха в набегающем потоке, $\hat{c}_\infty^2 = \hat{p}_\infty \hat{V}_\infty (\gamma_\infty \frac{1 + \alpha}{1 - \beta} - 2\alpha)$ (см (10), (19)).

Здесь $\text{tg}(a) = y$, $\text{tg}(b) = x$.

Кроме этого (19),

$$\bar{\rho} = \frac{x(1 + xy)}{x - y}.$$

С учетом вышеприведенных формул адиабата Гюгонио для газа Ван-дер-Ваальса (см. (1), (12)) может быть переписана так:

$$\begin{aligned} &\frac{F\left(\frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda\right) - F\left(\frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda_\infty\right)}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty} + \alpha(1 - \bar{\rho}) \\ &- \frac{y(1 + x^2)}{x(1 + xy)} \left(1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{2(1 + xy)} \right) = 0. \quad (22) \end{aligned}$$

Соотношения (22) и есть искомая связь между углами b и a в случае газа Ван-дер-Ваальса.

Для определения режимов обтекания клина газом Ван-дер-Ваальса (с сильной или со слабой ударными волнами) мы должны определить число M^2 (разд. 1 и формулы (19)):

$$\begin{aligned} M^2 &= \tilde{M}_\infty^2 \frac{1 + \text{tg}^2(\delta)}{1 + x^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{R}{c_V(\hat{T})} \frac{\hat{p} + \alpha \bar{\rho}^2}{(1 - \beta \bar{\rho}) \bar{\rho}} - 2\alpha \bar{\rho}\right)}, \\ \text{tg}(\delta) &= \frac{x - y}{1 + xy}. \quad (23) \end{aligned}$$

Далее мы конкретизируем вид функции $F(T)$. В отличие от [9] мы возьмем $F(T)$ в таком виде:

$$F(T) = c_V^* T \left(1 + \frac{A_1}{2} T \right), \quad (24)$$

где c_V^* , $A_1 > 0$ — некоторые постоянные (в [9] полагается $A_1 = 0$).

С учетом (24) мы получаем

$$c_V(T) = c_V^*(1 + A_1 T),$$

$$\frac{c_V(\hat{T})}{R} = \frac{1}{\gamma^* - 1} (1 + \alpha_1 \Lambda), \quad \gamma^* = 1 + \frac{R}{c_V^*} > 1,$$

$$\alpha_1 = A_1 \frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} > 0,$$

$$\frac{c_V(\hat{T}_\infty)}{R} = \frac{1}{\gamma_\infty - 1} = \frac{1}{\gamma^* - 1} (1 + \alpha_1 \Lambda_\infty),$$

т.е.

$$\gamma^* > \gamma_\infty > 1 \text{ и } \alpha_1 = \frac{\gamma^* - \gamma_\infty}{(\gamma_\infty - 1) \Lambda_\infty},$$

$$\frac{F\left(\frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda_\infty\right)}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty} = \frac{\Lambda_\infty}{\gamma^* - 1} \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda_\infty \right),$$

$$\frac{F\left(\frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda\right)}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty} = \frac{\Lambda}{\gamma^* - 1} \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda \right).$$

В таком случае соотношение (22) примет вид

$$\begin{aligned} Q(x) &= \Lambda \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda \right) - \Lambda_\infty \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda_\infty \right) \\ &- (\gamma^* - 1) y (1 + x^2) \left(\frac{\alpha}{x - y} + \frac{1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{2(1 + xy)}}{x(1 + xy)} \right) = 0. \quad (25) \end{aligned}$$

Таким образом, при заданных a , γ_∞ , γ^* , M_∞ , α , β находим корни уравнения (25), т.е. соответствующие значения угла b .

Заметим, что для (24) соотношение (9) переписывается так:

$$\frac{S - S_0}{R} = \ln(V - V_0) + \frac{1}{\gamma^* - 1} (\ln T + A_1 T). \quad (26)$$

Здесь $S_0 = \tilde{S}_0 - c_V^* \ln T_0 - c_V^* A_1 T_0$.

Замечание 2.1. Из условия

$$\hat{c}_\infty^2 > 0$$

получаем следующие ограничения на параметры γ_∞ , α , β :

- 1) $\gamma_\infty \geq 2$, $0 < \beta < 1$, $\alpha > 0$;
- 2) $1 < \gamma_\infty < 2$, $0 < \beta < 1 - \frac{\gamma_\infty}{2}$, $0 < \alpha < \frac{\gamma_\infty}{2(1 - \beta) - \gamma_\infty}$;
- 3) $1 < \gamma_\infty < 2$, $1 - \frac{\gamma_\infty}{2} \leq \beta < 1$, $\alpha > 0$.

Кратко опишем ситуацию для уравнения состояния (6). Вновь введем для удобства следующие параметры:

$$\alpha = \frac{AR^m}{\hat{p}_\infty^{m+1} \hat{V}_\infty^{m+k}}, \quad \beta = \frac{V_0}{\hat{V}_\infty}, \quad \tilde{\delta} = \frac{C}{\hat{V}_\infty},$$

$$\gamma_\infty = 1 + \frac{R}{F'(\hat{T}_\infty)} > 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\hat{p}}{\hat{p}_\infty} &= 1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{1+xy}, \quad \tilde{M}_\infty^2 = M_\infty^2 \frac{\hat{c}_\infty^2}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}, \\ \frac{\hat{c}_\infty^2}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty} &= \frac{\Lambda_\infty}{(1-\beta)^2} + \frac{k}{1+\tilde{\delta}} \left(1 - \frac{\Lambda_\infty}{1-\beta}\right) \\ &\quad + \frac{\left(m - \frac{(m+1)\Lambda_\infty}{1-\beta}\right)^2}{\Lambda_\infty \left(\frac{1}{\gamma_\infty - 1} + \frac{m(m+1)(1+\tilde{\delta})}{(k-1)\Lambda_\infty} \left(\frac{\Lambda_\infty}{1-\beta} - 1\right)\right)}, \\ \Lambda_\infty &= (1-\beta) \left(1 + \frac{\alpha}{(1+\tilde{\delta})^k \Lambda_\infty}\right), \quad \hat{T}_\infty = \frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda_\infty, \\ \Lambda &= (1-\beta\tilde{\rho}) \frac{\hat{p} + \frac{\alpha\tilde{\rho}^k}{(1+\tilde{\delta}\tilde{\rho})^k \Lambda^m}}{\tilde{\rho}}, \quad \hat{T} = \frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \Lambda, \\ \frac{\hat{c}^2}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty} &= \frac{\Lambda}{(1-\beta\tilde{\rho})^2} + \frac{k}{\tilde{\rho}(1+\tilde{\delta}\tilde{\rho})} \left(\frac{\hat{p}}{\hat{p}_\infty} - \frac{\Lambda\tilde{\rho}}{1-\beta\tilde{\rho}}\right) \\ &\quad + \frac{\left(m\frac{\hat{p}}{\hat{p}_\infty} - (m+1)\frac{\Lambda\tilde{\rho}}{1-\beta\tilde{\rho}}\right)^2}{\Lambda\tilde{\rho}^2 \left(\frac{F(\hat{T})}{R} + \frac{m(m+1)}{k-1}(1+\tilde{\delta}\tilde{\rho})\left(\frac{1}{1-\beta\tilde{\rho}} - \frac{\hat{p}}{\hat{p}_\infty \Lambda\tilde{\rho}}\right)\right)}, \\ M^2 &= \tilde{M}_\infty^2 \frac{1 + \text{tg}^2(\tilde{\delta})}{1+x^2} \frac{1}{\frac{\hat{c}^2}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}}. \end{aligned}$$

Из формул, приведенных выше, следует, что агрегаты Λ_∞ , Λ находятся неявным образом (в отличие от газа Ван-дер-Ваальса). Этот факт существенно усложняет численную реализацию соответствующего алгоритма.

Соответственно адиабата Гюгонио для обобщенного газа Ван-дер-Ваальса может быть переписана так:

$$\begin{aligned} \frac{F(\hat{T}) - F(\hat{T}_\infty)}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty} + \frac{m+1}{k-1} \left((1+\tilde{\delta}) \left(\frac{\Lambda_\infty}{1-\beta} - 1 \right) \right. \\ \left. - (1+\tilde{\delta}\tilde{\rho}) \left(\frac{\Lambda}{1-\beta\tilde{\rho}} - \frac{\hat{p}}{\hat{p}_\infty \tilde{\rho}} \right) \right) \\ - \frac{y(1+x^2)}{x(1+xy)} \left(1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{2(1+xy)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (27)$$

В частном случае (24) имеем

$$\begin{aligned} \frac{F(\hat{T}_\infty)}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty} &= \frac{\Lambda_\infty}{\gamma^* - 1} \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda_\infty \right), \\ \frac{F(\hat{T})}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty} &= \frac{\Lambda}{\gamma^* - 1} \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda \right), \quad \alpha_1 = \frac{\gamma^* - \gamma_\infty}{(\gamma_\infty - 1)\Lambda_\infty} \end{aligned}$$

и соответственно соотношение (25) переписывается в таком виде:

$$\begin{aligned} Q(x) &= \Lambda \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda \right) - \Lambda_\infty \left(1 + \frac{\alpha_1}{2} \Lambda_\infty \right) \\ &\quad + (\gamma^* - 1) \left[\left((1+\tilde{\delta}) \left(\frac{\Lambda_\infty}{1-\beta} - 1 \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - (1+\tilde{\delta}\tilde{\rho}) \left(\frac{\Lambda}{1-\beta\tilde{\rho}} - \frac{\hat{p}}{\hat{p}_\infty \tilde{\rho}} \right) \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{y(1+x^2)}{x(1+xy)} \left(1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{2(1+xy)} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Следовательно, при заданных a , γ_∞ , γ^* , M_∞ , α , β , $\tilde{\delta}$ находим корни уравнения (28) и соответственно значения угла b . Заметим также, что для обобщенного уравнения состояния газа Ван-дер-Ваальса (6) вместо (26) получим

$$\begin{aligned} \frac{S - S_0}{R} &= \ln(V - V_0) + \frac{1}{\gamma^* - 1} (\ln T + A_1 T) \\ &\quad - \frac{mA}{R(k-1)(V+C)^{k-1} T^{m+1}}, \end{aligned} \quad (29)$$

где S_0 — некоторая постоянная.

Замечание 2.2. Для нормального газа (см. замечание 1.2) искомая связь между углами b и a примет такой вид:

$$\frac{F(\hat{T}) - F(\hat{T}_\infty)}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty} - \frac{y(1+x^2)}{x(1+xy)} \left(1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{2(1+xy)} \right) = 0. \quad (30)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \hat{T}_\infty &= \frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R}, \quad \hat{T} = \hat{T}_\infty \Lambda, \\ \Lambda &= \frac{x-y}{x(1+xy)} \left(1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{1+xy} \right), \\ \tilde{M}_\infty^2 &= M_\infty^2 \left(1 + \frac{R}{c_V(\hat{T}_\infty)} \right) = \gamma_\infty M_\infty^2, \\ M_\infty^2 &= \frac{U_\infty^2}{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty \left(1 + \frac{R}{c_V(\hat{T}_\infty)} \right)} \end{aligned}$$

— квадрат числа Маха в набегающем потоке газа.

При этом

$$M^2 = \tilde{M}_\infty^2 \frac{x(1+\text{tg}^2(\tilde{\delta}))}{\text{tg}(\tilde{\delta})(1+x^2)} \frac{1}{1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{1+xy}} \frac{1}{1 + \frac{R}{c_V(\hat{T}_\infty)}}$$

— квадрат числа Маха в потоке газа за ударной волной.

С целью дальнейшей проверки условий нейтральной устойчивости ударных волн агрегат Δ (см. разд. 1) для газа Ван-дер-Ваальса и нормального газа удобно переписать так (в силу громоздкости выражения для агрегата Δ в случае обобщенного газа Ван-дер-Ваальса мы не приводим его, ограничившись только формулой (18)):

$$\begin{aligned} \Delta &= \tilde{M}_\infty^2 \\ &\quad \times \frac{\frac{x}{1+xy} \left(\frac{y}{2} - \frac{c_V(\hat{T})}{R} \frac{x-y}{1+x^2} (1-\beta\tilde{\rho}) \right)}{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{c_V(\hat{T})}{R} \right) \left(1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{1+xy} \right) + \alpha\tilde{\rho}^2 \left(1 + \frac{c_V(\hat{T})}{R} \right) -} \\ &\quad \left. - 2\alpha\tilde{\rho}^2 (1-\beta\tilde{\rho}) \frac{c_V(\hat{T})}{R} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

— для газа Ван-дер-Ваальса,

$$\Delta = \tilde{M}_\infty^2 \frac{\frac{x}{1+xy} \left(\frac{y}{2} - \frac{c_V(\hat{T})}{R} \frac{x-y}{1+x^2} \right)}{\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} + \frac{c_V(\hat{T})}{R} \right) \left(1 + \tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{1+xy} \right)} \quad (32)$$

— для нормального газа.

Таблица 1. Значения b, M, \mathcal{N} и κ для $a = 1^\circ, \gamma_\infty = 2.1, \gamma^* = 2.2$ (газ Ван-дер-Ваальса)

M_∞ α, β	1.3		1.5	
$\beta = 0.9$ $\alpha = 0.3$ ($\hat{T}_\infty > T_c$)			$b = 60.5674^\circ$ $M = 0.7607$ $\mathcal{N} = -0.4544$ $\kappa = 0.6698$ ($\hat{T} > T_c$)	
$\beta = 0.7$ $\alpha = 2.0$ ($\hat{T}_\infty > T_c$)	$b = 61.3516^\circ$ $M = 1.0212$ $\mathcal{N} = -0.1425$ $\kappa = 0.2263$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 74.6485^\circ$ $M = 0.8616$ $\mathcal{N} = -0.2141$ $\kappa = 0.3517$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 48.1655^\circ$ $M = 1.2318$ $\mathcal{N} = -0.1239$ $\kappa = 0.1953$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 80.6997^\circ$ $M = 0.7561$ $\mathcal{N} = -0.3008$ $\kappa = 0.5209$ ($\hat{T} > T_c$)
$\beta = 0.5$ $\alpha = 5.0$ ($\hat{T}_\infty > T_c$)	$b = 56.3555^\circ$ $M = 1.1289$ $\mathcal{N} = -0.0731$ $\kappa = 0.1427$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 81.3216^\circ$ $M = 0.8256$ $\mathcal{N} = -0.1907$ $\kappa = 0.3728$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 45.8350^\circ$ $M = 1.3240$ $\mathcal{N} = -0.0682$ $\kappa = 0.1333$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 84.4187^\circ$ $M = 0.7477$ $\mathcal{N} = -0.2602$ $\kappa = 0.5142$ ($\hat{T} > T_c$)
$\beta = 0.9$ $\alpha = 2.0$ ($\hat{T}_\infty < T_c$)			$b = 59.4451^\circ$ $M = 0.7672^\circ$ $\mathcal{N} = -0.4617^\circ$ $\kappa = 0.6685$ ($\hat{T} < T_c$)	
$\beta = 0.7$ $\alpha = 5.0$ ($\hat{T}_\infty < T_c$)	$b = 62.2935^\circ$ $M = 1.0058$ $\mathcal{N} = -0.1522$ $\kappa = 0.2376$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 73.6760^\circ$ $M = 0.8698$ $\mathcal{N} = -0.2183$ $\kappa = 0.3430$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 48.4843^\circ$ $M = 1.2208$ $\mathcal{N} = -0.1305$ $\kappa = 0.2018$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 80.4008^\circ$ $M = 0.7586$ $\mathcal{N} = -0.3029$ $\kappa = 0.5149$ ($\hat{T} > T_c$)

Таблица 2. Значения b, M, \mathcal{N} и κ для $\gamma_\infty = 2.1, \gamma^* = 2.2$ (газ Ван-дер-Ваальса)

$\beta = 0.7$ $\alpha = 2.0$ ($\hat{T}_\infty = T_c$)	$a = 7^\circ, M_\infty = 10.0$			
	$b = 43.7235^\circ$ $M = 0.1892$ $\mathcal{N} = -0.5808$ $\kappa = 0.0945$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 58.5193^\circ$ $M = 0.5948$ $\mathcal{N} = -0.6265$ $\kappa = 0.9100$ ($\hat{T} > T_c$)		
$\beta = 0.5$ $\alpha = 5.0$ ($\hat{T}_\infty > T_c$)	$a = 3^\circ, M_\infty = 1.5$		$a = 10^\circ, M_\infty = 5.0$	
	$b = 61.6216^\circ$ $M = 1.9366$ $\mathcal{N} = -0.2050$ $\kappa = 0.4012$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 66.5840^\circ$ $M = 0.8694$ $\mathcal{N} = -0.2257$ $\kappa = 0.4430$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 44.6009^\circ$ $M = 0.9862$ $\mathcal{N} = -0.4158$ $\kappa = 0.8592$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 62.4729^\circ$ $M = 0.6790$ $\mathcal{N} = -0.4426$ $\kappa = 0.8851$ ($\hat{T} > T_c$)
$\beta = 0.7$ $\alpha = 5.0$ ($\hat{T}_\infty < T_c$)	$a = 5^\circ, M_\infty = 3.0$		$a = 7^\circ, M_\infty = 10.0$	
	$b = 74.7294^\circ$ $M = 0.2716$ $\mathcal{N} = -0.6630$ $\kappa = 1.2042$ ($\hat{T} > T_c$)		$b = 44.4372^\circ$ $M = 0.8082$ $\mathcal{N} = -0.5779$ $\kappa = 0.9043$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 57.8442^\circ$ $M = 0.6059$ $\mathcal{N} = -0.6186$ $\kappa = 0.9090$ ($\hat{T} > T_c$)

Замечание 2.3. Для проверки условий нейтральной устойчивости (15) в случае нормального газа нам надо проверить только левое неравенство (см. Замечание 1.2). После громоздких выкладок левое неравенство (15) принимает следующий вид:

$$\tilde{M}_\infty^2 \frac{x(x-y)}{(1+x^2)} \frac{1}{1+xy} \frac{1}{1+\tilde{M}_\infty^2 \frac{xy}{1+xy}} \frac{1}{1+\frac{R}{c_V(T)}} > 1. \quad (33)$$

В силу Замечания 2.2 неравенство (33) перепишем так:

$$M^2 > \frac{1 + \text{tg}^2(\delta)}{\text{tg}^2(\delta)} > 1.$$

Отсюда следует замечательный вывод: в случае нормального газа возможен только режим обтекания клина со слабой присоединенной волной, которая при этом является нейтрально устойчивой.

3. Результаты численных расчетов

Перед тем как обсуждать результаты численных расчетов, введем так называемые критические параметры для газа Ван-дер-Ваальса [15,16]:

$$p_c = \frac{1}{27} \frac{A}{V_0^2}, \quad V_c = 3V_0, \quad T_c = \frac{8}{27} \frac{A}{RV_0}.$$

Тогда неравенства

$$\hat{T}_\infty \geq T_c$$

сводятся к следующим:

$$\left. \begin{aligned} 1) 0 < \alpha \leq \lambda (\hat{T}_\infty \geq T_c), \quad 0 < \beta < 1; \\ 2) \alpha > \lambda (\hat{T}_\infty < T_c), \quad 0 < \beta < 1. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Здесь $\lambda = \frac{\beta(1-\beta)}{\frac{8}{27}-\beta(1-\beta)}$. Неравенства же

$$\hat{T} \geq T_c$$

перепишутся так

$$\Lambda \geq \frac{8}{27} \frac{\alpha}{\beta}. \quad (35)$$

Сопоставляя неравенства из Замечания 2.1 и неравенства (34), мы получаем следующие области задания параметров $\gamma_\infty, \gamma^*, \alpha, \beta$

$$I) \gamma_\infty \geq 2, \quad 0 < \beta < 1, \quad \alpha > 0 (\hat{c}_\infty^2 > 0); \quad \gamma^* > \gamma_\infty,$$

$$0 < \alpha \leq \lambda (\hat{T}_\infty \geq T_c), \quad \alpha > \lambda (\hat{T}_\infty < T_c);$$

$$II) 1 < \gamma_\infty < 2, \quad 1 - \frac{\gamma_\infty}{2} \leq \beta < 1, \quad \alpha > 0 (\hat{c}_\infty^2 > 0);$$

$$\gamma^* > \gamma_\infty, \quad 0 < \alpha \leq \lambda (\hat{T}_\infty \geq T_c),$$

$$\alpha > \lambda (\hat{T}_\infty < T_c);$$

Таблица 3. Значения $b, M, \mathcal{N}, \kappa, \mathcal{F}$ (газ Ван-дер-Ваальса)

M_∞	$a = 1^\circ, \beta = 0.5, \alpha = 1.0, \gamma_\infty = 1.3,$ $\gamma^* = 1.5 (\hat{T}_\infty > T_c)$		
10.0	$b = 7.2407^\circ$ $M = 7.4341$ $\mathcal{N} = -0.1795$ $\kappa = 0.3600$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 77.6319^\circ$ $M = 2.2790$ $\mathcal{N} = 10.6892$ $\mathcal{F} = 10.4604$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 88.8216^\circ$ $M = 0.2808$ $\mathcal{N} = -0.8682$ $\kappa = 0.9630$ $(\hat{T} > T_c)$
12.0	$b = 66.9266^\circ$ $M = 3.2083$ $\mathcal{N} = 19.6896$ $\mathcal{F} = 15.6807$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 88.8496^\circ$ $M = 0.2606$ $\mathcal{N} = -0.8876$ $\kappa = 0.9683$ $(\hat{T} > T_c)$	

Таблица 4. Значения $b, M, \mathcal{N}, \kappa$ (газ Ван-дер-Ваальса)

M_∞	$a = 7^\circ, \beta = 0.5, \alpha = 1.0, \gamma_\infty = 1.3,$ $\gamma^* = 1.5 (\hat{T}_\infty > T_c)$		
10.0	$b = 18.8406^\circ$ $M = 2.1742$ $\mathcal{N} = -0.6800$ $C\kappa = 0.8652$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 72.1489^\circ$ $M = 0.5878$ $\mathcal{N} = -0.5371$ $\kappa = 0.7078$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 81.4184^\circ$ $M = 0.2926$ $\mathcal{N} = -0.8669$ $\kappa = 0.9627$ $(\hat{T} > T_c)$
12.0	$b = 18.0416^\circ$ $M = 2.1841$ $\mathcal{N} = -0.7135$ $\kappa = 0.8901$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 73.9275^\circ$ $M = 0.6517$ $\mathcal{N} = -0.4195$ $\kappa = 0.6363$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 81.6351^\circ$ $M = 0.2712$ $\mathcal{N} = -0.8865$ $\kappa = 0.9680$ $(\hat{T} > T_c)$

Таблица 5. Значения b, M, \mathcal{N} и некоторых других величин (газ Ван-дер-Ваальса)

M_∞	$a = 1^\circ, \beta = 0.8, \alpha = 0.7, \gamma_\infty = 1.3,$ $\gamma^* = 1.5 (\hat{T}_\infty > T_c)$		
1.3	$b = 63.3254^\circ$ $M = 0.9797$ $\mathcal{N} = -0.1883$ $\kappa = 0.2547$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 72.1815^\circ$ $M = 0.8668$ $\mathcal{N} = -0.2569$ $\kappa = 0.3400$ $(\hat{T} > T_c)$	
8.0	$b = 10.8758^\circ$ $M = 4.0664$ $\mathcal{N} = -0.4296$ $\kappa = 0.5459$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 73.2826^\circ$ $M = 1.5350$ $\mathcal{N} = 1.7874$ $\mathcal{F} = 6.0868$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 85.5045^\circ$ $M = 0.2908$ $\mathcal{N} = -0.8689$ $\kappa = 0.9603$ $(\hat{T} > T_c)$
10.0	$b = 9.5046^\circ$ $M = 4.4069$ $C\mathcal{N} = -0.4894$ $\kappa = 0.6157$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 70.9795^\circ$ $M = 1.6950$ $\mathcal{N} = 2.3689$ $\mathcal{F} = 6.7461$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 85.5964^\circ$ $M = 0.2645$ $\mathcal{N} = -0.8916$ $\kappa = 0.9675$ $(\hat{T} > T_c)$

Таблица 6. Значения b, M, \mathcal{N} и χ для $a = 1^\circ, \gamma_\infty = 1.3, \gamma^* = 1.5$ (газ Ван-дер-Ваальса)

M_∞ α, β	1.3		1.5		
$\beta = 0.1$ $\alpha = 0.2$ ($\hat{T}_\infty > T_c$)	$b = 51.8008^\circ$ $M = 1.2632$ $\mathcal{N} = 0.0279$ $\mathcal{F} = 3.9160$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 88.0438^\circ$ $M = 0.7823$ $\mathcal{N} = 0.1863$ $\mathcal{F} = 3.5113$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 42.9055^\circ$ $M = 1.4663$ $\mathcal{N} = 0.0273$ $\mathcal{F} = 3.9176$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 88.8187^\circ$ $M = 0.6906$ $\mathcal{N} = 0.1584$ $\mathcal{F} = 2.8185$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 89.7668^\circ$ $M = 0.1987$ $\mathcal{N} = -0.8831$ $\chi = 1.0219$ ($\hat{T} > T_c$)
$\beta = 0.2$ $\alpha = 3.0$ ($\hat{T}_\infty = T_c$)	$b = 50.8940^\circ$ $M = 1.2953$ $\mathcal{N} = 0.0539$ $\mathcal{F} = 3.9629$ ($\hat{T} < T_c$)	$b = 88.0453^\circ$ $M = 0.6736$ $\mathcal{N} = -0.2474$ $\chi = 0.5742$ ($\hat{T} < T_c$)	$b = 42.2559^\circ$ $M = 1.5026$ $\mathcal{N} = 0.0533$ $\mathcal{F} = 3.9633$ ($\hat{T} < T_c$)	$b = 88.4858^\circ$ $M = 0.5792$ $\mathcal{N} = -0.4429$ $\chi = 0.6970$ ($\hat{T} < T_c$)	

Таблица 7. Значения b, M, \mathcal{N} и χ для $a = 1^\circ, \gamma_\infty = 1.3, \gamma^* = 1.5$ (газ Ван-дер-Ваальса)

M_∞ α, β	3.0			5.0		
$\beta = 0.1$ $\alpha = 0.2$ ($\hat{T}_\infty > T_c$)	$b = 20.1532^\circ$ $M = 2.9496$ $\mathcal{N} = 0.0421$ $\mathcal{F} = 3.8714$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 89.5302^\circ$ $M = 0.4975$ $\mathcal{N} = -0.1397$ $\chi = 0.8149$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 89.6170^\circ$ $M = 0.4284$ $\mathcal{N} = -0.4085$ $\chi = 0.8876$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 12.1750^\circ$ $M = 4.8964$ $\mathcal{N} = 0.0648$ $\mathcal{F} = 3.7970$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 89.0412^\circ$ $M = 0.8219$ $\mathcal{N} = 2.9007$ $\mathcal{F} = 3.3041$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 89.7321^\circ$ $M = 0.3403$ $\mathcal{N} = -0.6472$ $\chi = 0.9452$ ($\hat{T} > T_c$)
$\beta = 0.2$ $\alpha = 3.0$ ($\hat{T}_\infty < T_c$)	$b = 19.7636^\circ$ $M = 3.0598$ $C\mathcal{N} = 0.0836$ $\mathcal{F} = 3.9368$ ($\hat{T} < T_c$)	$b = 89.1921^\circ$ $M = 0.4085$ $\mathcal{N} = -0.7047$ $\chi = 0.8752$ ($\hat{T} > T_c$)		$b = 11.8314^\circ$ $M = 5.1662$ $\mathcal{N} = 0.1287$ $C\mathcal{F} = 3.8832$ ($\hat{T} < T_c$)	$b = 89.3895^\circ$ $M = 0.3633$ $\mathcal{N} = -0.7455$ $\chi = 0.9180$ ($\hat{T} > T_c$)	

- III) $1 < \gamma_\infty < 2, 0 < \beta < 1 - \frac{\gamma_\infty}{2},$
 $0 < \alpha < \alpha_0 (\hat{c}_\infty^2 > 0); \quad \gamma^* > \gamma_\infty,$
 $0 < \alpha \leq \lambda (\hat{T}_\infty \geq T_c),$
 $\lambda < \alpha < \alpha_0 (\hat{T}_\infty < T_c),$

где

$$\alpha_0 = \frac{\gamma_\infty}{2(1-\beta) - \gamma_\infty}.$$

Введем в рассмотрение агрегаты (см. разд. 1):

$$\mathcal{N}(a, b) = \Delta - \frac{1 - M^2 \sin^2(\delta)(1 + \bar{\rho})}{1 + M^2 \sin^2(\delta)(\bar{\rho} - 1)},$$

$$\mathcal{F}(a, b) = 1 + 2M \sin(\delta) - \Delta,$$

$$\chi(a, b) = \Delta + 1,$$

$$\frac{\hat{S} - \hat{S}_\infty}{R} = Q(a, b) = \ln \left(\frac{1 - \beta \bar{\rho}}{\bar{\rho}(1 - \beta)} \right)$$

$$+ \frac{1}{\gamma^* - 1} \left(\ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_\infty} \right) + \alpha_1(\Lambda - \Lambda_\infty) \right).$$

Замечание 3.1. Следуя [15,16], напомним, что параметр T_c характеризует собой ту изотерму, выше которой газ Ван-дер-Ваальса нельзя превратить в жидкость.

Как и для газа Ван-дер-Ваальса, следуя [17], введем так называемые критические параметры для обобщенного уравнения состояния газа Ван-дер-Ваальса:

$$A = \frac{(k+1)^2}{4k} (1+\nu)^{k-1} R T_c^{m+1} V_c^{k-1},$$

$$V_0 = \frac{k-1-2\nu}{k+1} V_c,$$

$$C = \nu V_c, \quad \frac{p_c V_c}{R T_c} = \frac{k^2 - 1}{4k(1+\nu)}.$$

Отсюда получаем

$$T_c = \frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty}{R} \left(\frac{a l}{(\beta + \delta)^{k-1}} \right)^{1/(m+1)} = \frac{\hat{p}_\infty \hat{V}_\infty \tilde{l}}{R},$$

$$l = \frac{4k(k-1)^{k-1}}{(k+1)^{k+1}}, \quad \delta = \frac{\beta \nu (k+1)}{k-1-2\nu}.$$

Заметим, что неравенства

$$\hat{T}_\infty, \hat{T} \geq T_c$$

сводятся к следующим:

$$\Lambda_\infty, \Lambda \geq \tilde{l}.$$

Кроме этого, из (29) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\hat{S} - \hat{S}_\infty}{R} = Q(a, b) = \ln \left(\frac{1 - \beta \bar{\rho}}{\bar{\rho}(1 - \beta)} \right) \\ + \frac{1}{\gamma^* - 1} \left(\ln \left(\frac{\Lambda}{\Lambda_\infty} \right) + \alpha_1(\Lambda - \Lambda_\infty) \right) \\ - \frac{m\alpha}{k - 1} \left(\frac{\bar{\rho}^{k-1}}{(1 + \bar{\rho}\tilde{\delta})^{k-1}\Lambda^{m+1}} - \frac{1}{(1 + \tilde{\delta})^{k-1}\Lambda_\infty^{m+1}} \right). \end{aligned}$$

Обсудим теперь некоторые результаты численных расчетов. В случае, когда параметры $\alpha, \beta, \gamma_\infty, \gamma^*$ принадлежат области I, угол клина $a = 1^\circ$ (для других углов клина картина похожая), в основном реализуется ситуация, аналогичная для нормального газа (см. [18]): мы имеем

Таблица 8. Значения b, M, \mathcal{N} и некоторых других величин (обобщенное уравнение состояния газа Ван-дер-Ваальса)

M_∞	$a = 1^\circ, \beta = 0.7, \alpha = 0.05, \gamma_\infty = 2.1, \gamma^* = 2.2,$ $\tilde{\delta} = -0.181629$ (окись углерода), $\hat{T}_\infty > T_c$	
1.3	$b = 59.0536^\circ$ $M = 1.0608$ $\mathcal{N} = -0.1273$ $\kappa = 0.1935$ $Q = 0.0016$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 77.2444^\circ$ $M = 0.8352$ $\mathcal{N} = -0.2324$ $\kappa = 0.3785$ $Q = 0.0114$ $(\hat{T} > T_c)$
1.5	$b = 47.1989^\circ$ $M = 1.2606$ $\mathcal{N} = -0.1155$ $\kappa = 0.1734$ $Q = -0.0010$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 81.6229^\circ$ $M = 0.7449$ $\mathcal{N} = -0.3101$ $\kappa = 0.5379$ $Q = 0.0529$ $(\hat{T} > T_c)$
3.0	$b = 22.6021^\circ$ $M = 2.3769$ $\mathcal{N} = -0.1579$ $\kappa = 0.2456$ $Q = 0.0031$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 85.4902^\circ$ $M = 0.5695$ $\mathcal{N} = -0.4530$ $\kappa = 0.8564$ $Q = 0.6790$ $(\hat{T} > T_c)$
5.0	$b = 14.5107^\circ$ $M = 3.5140$ $\mathcal{N} = -0.2207$ $\kappa = 0.3586$ $Q = 0.0115$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 86.1870^\circ$ $M = 0.5173$ $\mathcal{N} = -0.5300$ $\kappa = 0.8991$ $Q = 1.6051$ $(\hat{T} > T_c)$
8.0	$b = 10.2164^\circ$ $M = 4.7143$ $\mathcal{N} = -0.2905$ $\kappa = 0.4962$ $Q = 0.0384$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 86.6427^\circ$ $M = 0.4663$ $\mathcal{N} = -0.6274$ $\kappa = 0.9106$ $Q = 2.8741$ $(\hat{T} > T_c)$

Таблица 9. Значения b, M, \mathcal{N} и некоторых других величин (обобщенное уравнение состояния газа Ван-дер-Ваальса)

M_∞	$a = 1^\circ, \beta = 0.1, \alpha = 0.3, \gamma_\infty = 2.1, \gamma^* = 2.2,$ $\tilde{\delta} = 0.005475$ (воздух), $\hat{T}_\infty > T_c$	
1,3	$b = 51.3512^\circ$ $M = 1.2381$ $\mathcal{N} = 0.0110$ $\kappa = 0.0896$ $Q = -0.0020$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 86.9616^\circ$ $M = 0.7859$ $\mathcal{N} = 0.0002$ $\kappa = 0.4358$ $Q = 0.0013$ $(\hat{T} > T_c)$
1.5	$b = 42.5724^\circ$ $M = 1.4372$ $\mathcal{N} = 0.0109$ $\kappa = 0.0887$ $Q = -0.0020$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 88.0014^\circ$ $M = 0.7192$ $\mathcal{N} = -0.0256$ $\kappa = 0.5702$ $Q = 0.0312$ $(\hat{T} > T_c)$
3.0	$b = 20.1439^\circ$ $M = 2.8605$ $\mathcal{N} = 0.0132$ $\kappa = 0.1203$ $Q = -0.0030$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 89.1627^\circ$ $M = 0.5647$ $\mathcal{N} = -0.1128$ $\kappa = 0.8604$ $Q = 0.5981$ $(\hat{T} > T_c)$
5.0	$b = 12.2853^\circ$ $M = 4.6693$ $\mathcal{N} = 0.0154$ $\kappa = 0.1696$ $Q = -0.0045$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 89.3865^\circ$ $M = 0.5178$ $\mathcal{N} = -0.1469$ $\kappa = 0.9016$ $Q = 1.4768$ $(\hat{T} > T_c)$
8.0	$b = 7.9955^\circ$ $M = 7.2211$ $\mathcal{N} = 0.0160$ $\kappa = 0.2396$ $Q = -0.0059$ $(\hat{T} > T_c)$	$b = 89.5360^\circ$ $M = 0.4711$ $\mathcal{N} = -0.2382$ $\kappa = 0.9106$ $Q = 2.6840$ $(\hat{T} > T_c)$

два режима обтекания газом Ван-дер-Ваальса — с сильной ударной волной (число $M < 1$) и со слабой ударной волной (число $M > 1$). И для первого и для второго режимов обтекания выполняются неравенства (1.13), т.е. ударные волны абсолютно (равномерно) устойчивы. Заметим также, что возможны случаи (табл. 1, 2), когда реализуется только один режим обтекания клина с сильной ударной волной (при этом ударная волна абсолютно устойчива). Из табл. 2 видно, что существуют случаи, когда мы имеем два режима обтекания клина газом Ван-дер-Ваальса с сильной ударной волной (ударные волны абсолютно устойчивы).

Ситуация значительно усложняется, когда параметры $\alpha, \beta, \gamma_\infty, \gamma^*$ принадлежат области II. С одной стороны, в большинстве случаев реализуется классическая схема, характерная для нормального газа: мы имеем два режима обтекания клина газом ван-дер-Ваальса — с сильной ударной волной (число $M < 1$) и со слабой ударной волной (число $M > 1$), при этом для этих режимов обтекания ударные волны абсолютно устойчивы.

Таблица 10. Значения b , M , \mathcal{N} и некоторых других величин (обобщенное уравнение состояния газа Ван-дер-Ваальса)

M_∞	$a = 1^\circ, \beta = 0.6, \alpha = 0.2, \gamma_\infty = 2.1, \gamma^* = 2.2,$ $\delta = 0.0$ (азот), $\hat{T}_\infty > T_c$	
1.3	$b = 55.9527^\circ$ $M = 1.1307$ $\mathcal{N} = -0.1392$ $\chi = 0.1398$ $Q = 0.0003$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 81.2104^\circ$ $M = 0.8184$ $\mathcal{N} = -0.2620$ $\chi = 0.3848$ $Q = 0.0161$ ($\hat{T} > T_c$)
1.5	$b = 45.6016^\circ$ $M = 1.3246$ $\mathcal{N} = -0.1343$ $\chi = 0.1307$ $Q = 0.0003$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 84.1182^\circ$ $M = 0.7363$ $\mathcal{N} = -0.3314$ $\chi = 0.5391$ $Q = 0.0548$ ($\hat{T} > T_c$)
3.0	$b = 21.7369^\circ$ $M = 2.5438$ $\mathcal{N} = -0.1660$ $\chi = 0.1909$ $Q = 0.0009$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 86.8834^\circ$ $M = 0.5655$ $\mathcal{N} = -0.4449$ $\chi = 0.8590$ $Q = 0.6871$ ($\hat{T} > T_c$)
5.0	$b = 13.6884^\circ$ $M = 3.8958$ $\mathcal{N} = -0.2131$ $\chi = 0.2833$ $Q = 0.0046$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 87.3805^\circ$ $M = 0.5168$ $\mathcal{N} = -0.5091$ $\chi = 0.9022$ $Q = 1.6080$ ($\hat{T} > T_c$)
8.0	$b = 9.3613^\circ$ $M = 5.4856$ $\mathcal{N} = -0.2712$ $\chi = 0.4025$ $Q = 0.0172$ ($\hat{T} > T_c$)	$b = 87.7145^\circ$ $M = 0.4694$ $\mathcal{N} = -0.6041$ $\chi = 0.9110$ $Q = 2.8485$ ($\hat{T} > T_c$)

С другой стороны, из табл. 3 следует, что возможны ситуации с тремя режимами обтекания, причем для одного из режимов обтекания клина ударная волна нейтрально устойчива (две другие ударные волны абсолютно устойчивы). Этому режиму обтекания с нейтрально устойчивой ударной волной соответствуют режимы как со слабой ударной волной ($M > 1$), так и с сильной ($M < 1$). Из данных табл. 4 видно, что есть случаи, когда для всех трех режимов обтекания ударные волны абсолютно устойчивы. Из табл. 5 видно, что наряду с тремя режимами обтекания возможны случаи, когда мы имеем два режима обтекания газом Ван-дер-Ваальса с сильной ударной волной (ударные волны абсолютно устойчивы). Если параметры $\alpha, \beta, \gamma_\infty, \gamma^*$ принадлежат области III, то количество режимов обтекания с нейтрально устойчивыми ударными волнами значительно увеличивается (табл. 6, 7). В целом справедлив очевидный вывод о том, что при обтекании клина газом Ван-дер-Ваальса ситуация намного сложнее, чем это

имеет место быть для нормального газа. Подчеркнем еще раз, что мы в настоящей работе рассматриваем более сложный случай, чем это сделано в [9] (функция $F(T)$ у нас нелинейная).

В случае обобщенного уравнения состояния газа Ван-дер-Ваальса численные расчеты были проделаны для различных значений k, m, ν , которые были взяты из таблицы, приведенной в работе [17]. В табл. 8–10 даны примеры нейтрально устойчивых ударных волн. В качестве замечания можно сделать неожиданный вывод о большом количестве режимов обтекания, которые практически являются изэнтропическими. Заметим также, что при увеличении угла клина a при тех же значениях других параметров в основном реализуется один режим обтекания с сильной ударной волной, для которого ударная волна абсолютно устойчива.

Замечание 3.2. Все вычисленные параметры в таблицах приведены с точностью до четвертого порядка после запятой. Кроме этого, в табл. 1–10 мы не приводим значений агрегата $Q(a, b)$. Во всех случаях $Q(a, b) > 0$. Надо отметить, что для области III наблюдается большое количество режимов обтекания, когда $Q(a, b) = 0$ с точностью до четвертого знака после запятой, т.е. эти режимы обтекания клина являются практически изэнтропическими.

Заметим также, что в табл. 6, 7 приведены случаи, когда число Маха M после ударной волны больше числа M_∞ . Однако называть эти режимы обтекания клина режимами с ударной волной разрежения [19], по-видимому, нельзя.

Заключение

В предлагаемой работе обсуждается вопрос о реализуемости условий нейтральной устойчивости ударных волн при обтекании клина газом Ван-дер-Ваальса (или обобщенным газом Ван-дер-Ваальса). Вводя вместо различных величин некоторое количество безразмерных параметров, удается получить связь между углами клина и ударной волной в удобной форме. Найденная связь и подвергается численному исследованию. Результаты численных экспериментов отражены в многочисленных таблицах. Аналогичная работа была проделана и для обобщенного уравнения состояния газа Ван-дер-Ваальса.

Авторы выражают благодарность А.С. Бычкову за проведенные численные расчеты, а также Р.С. Бушманову и А.В. Егитову за помощь в оформлении настоящей работы.

Список литературы

- [1] Дьяков С.П. // ЖЭТФ. 1954. Т. 27. № 3. С. 288–296.
- [2] Конторович В.М. // ЖЭТФ. 1957. Т. 33. № 6. С. 1525–1526.
- [3] Иорданский С.В. // ПММ. 1957. Т. 21. Вып. 4. С. 465–472.
- [4] Зайдель Р.М. // ПММ. 1967. № 4. С. 30–39.

- [5] *Блохин А.М.* Интегралы энергии в задаче об устойчивости ударной волны. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО АН СССР, 1982. 178 с.
- [6] *Блохин А.М.* Интегралы энергии и их приложения к задачам газовой динамики. Новосибирск: Наука, 1986. 240 с.
- [7] *Блохин А.М., Ткачев Д.Л.* Обоснование гипотезы Куранта–Фридрикса в задаче об обтекании клина. Новосибирск: Тамара Рожковская, 2011. 140 с.
- [8] *Егорушкин С.А.* // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1984. № 3. С. 110–118.
- [9] *Конюхов А.В., Лихачев А.Р., Фортков В.Е., Опарин А.М., Анисимов С.И.* // Тр. международной конф. „IX Забабахинские научные чтения“. Снежинск: Россия, 2007. С. 153.
- [10] *Овсянников Л.В.* Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981. 368 с.
- [11] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.
- [12] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1970. 568 с.
- [13] *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978. 688 с.
- [14] *Бай Ши-и.* Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. М.: Изд-во иностр. лит-ры, 1962. 410 с.
- [15] *Тер Хаар Д., Вергеланд Г.* Элементарная термодинамика. М.: Мир, 1968. 220 с.
- [16] *Кубо Р.* Термодинамика. М.: Мир, 1970. 304 с.
- [17] *Фогельсон Р.Л., Лихачев Е.Р.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 7. С. 129–130.
- [18] *Блохин А.М., Бычков А.С., Мякишев В.О.* О выполнении условия Лопатинского в задаче об обтекании клина нормальным газом и газом Ван-дер-Ваальса. Препринт № 280. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 2012. 58 с.
- [19] *Зельдович Я.Б.* // ЖЭТФ. 1946. Т. 16. № 4. С. 363–364.