

03

Нелинейные поправки к частотам поверхностных и внутренних волн в слоисто-неоднородной жидкости

© С.О. Ширяева, М.С. Федоров, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 29 января 2014 г. В окончательной редакции 19 сентября 2014 г.)

В аналитических асимптотических расчетах третьего порядка малости по безразмерной амплитуде рассчитаны нелинейные поправки к частотам поверхностных и внутренних волн. Оказалось, что поправки имеют резонансный вид, т.е. при определенных значениях физических величин они неограниченно растут, выходя за рамки асимптотичности. Нелинейная поправка к частоте волн на свободной поверхности в положении резонанса может менять свой знак и, значит, она может как увеличивать частоту волн, так и уменьшать. Нелинейная поправка к частоте волн на границе раздела всегда отрицательна, кроме ближайшей окрестности точки резонанса, следовательно, она, как правило, снижает частоты волн.

Задачи о внутренних и поверхностных волнах в слоисто-неоднородной жидкости в последние годы неоднократно решались как в линейной, так и в нелинейной постановках [1–6]. Тем не менее следует отметить, что нелинейные расчеты, как правило, ограничивались вторым порядком малости ввиду громоздкости проблемы. В настоящей работе в асимптотических расчетах третьего порядка малости будут рассчитаны нелинейные поправки к частотам поверхностных и внутренних волн. Эти поправки, определяемые в расчетах третьего порядка, имеют второй порядок малости по величине и сказываются на частотах волн первого порядка. Нелинейные поправки третьего порядка к амплитудам волн не будут искажаться ввиду незначительности их влияния на амплитуду волн в целом (хотя это и несложно сделать по найденным решениям).

1. Рассмотрим две идеальные несжимаемые жидкости, верхняя из которых — диэлектрик с диэлектрической проницаемостью ε_d имеет толщину h и плотность ρ_1 , а нижняя — идеальный проводник с плотностью ρ_2 заполняет в поле сил тяжести \mathbf{g} (где $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{e}_z$, \mathbf{e}_z — орт декартовой системы координат) полубесконечное пространство $z < 0$ (кроме того, $\rho_2 > \rho_1$). Примем, что коэффициент поверхностного натяжения верхней жидкости σ_1 , а границы раздела сред σ_2 . Примем также, что на границе раздела жидкостей (в равновесном состоянии $z = 0$) равномерно распределен электрический заряд с плотностью κ , который создает в области пространства $z > h$ электростатическое поле с напряженностью $\mathbf{E}_0 \equiv 4\pi\kappa\mathbf{e}_z$. Будем исследовать капиллярно-гравитационные волны на свободной поверхности верхнего слоя жидкости и на границе раздела сред. Следует отметить, что модель несмешиваемых жидкостей будет описывать реальную ситуацию, если толщина переходного от жидкости с плотностью ρ_1 к жидкости с плотностью ρ_2 слоя (толщина зоны стратификации по плотности) будет много меньше длины волны и толщины слоя верхней жидкости.

Будем исследовать плоское волновое движение в такой системе и зададимся целью отыскания нелинейных поправок к частотам волн первого порядка малости. Как уже сказано, аналитические расчеты будем проводить асимптотическим методом с точностью до третьего порядка малости включительно. В качестве малого параметра возьмем безразмерную амплитуду волны (обезразмеренную на капиллярную постоянную верхней жидкости $\sqrt{\sigma_1/\rho_1 g}$).

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{V}_j}{\partial t} + (\mathbf{V}_j \nabla) \mathbf{V}_j &= -\nabla \left(\frac{P_j}{\rho_j} \right) + \mathbf{g}, \\ \operatorname{div} \mathbf{V}_j &= 0, \quad j \in \{1; 2\}, \quad \Delta \Phi_k = 0, \quad k \in \{0; 1\}, \\ z = \xi_2 : \quad P_2 - P_1 + P_{2E} - P_{2\sigma} &= 0, \\ \mathbf{n}_2 \mathbf{V}_1 &= \mathbf{n}_2 \mathbf{V}_2, \quad \Phi_1 = \operatorname{const}, \\ F_j(x, z, t) = 0 : \quad \frac{\partial F_j}{\partial t} + (\mathbf{V}_j \nabla) F_j &= 0, \\ z = h + \xi_1 : \quad P_1 - P_{at} + P_{1E} - P_{1\sigma} &= 0, \\ \mathbf{n}_1 \nabla \Phi_0 &= \varepsilon_d \mathbf{n}_1 \nabla \Phi_1, \quad \boldsymbol{\tau}_1 \nabla \Phi_0 = \boldsymbol{\tau}_1 \nabla \Phi_1, \\ z \rightarrow \infty : \quad \nabla \Phi_0 &\rightarrow -E_* \mathbf{e}_z, \quad z \rightarrow -\infty : \quad \mathbf{V}_2 \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где \mathbf{V}_j — поля скоростей в верхней и нижней жидкостях, Φ_k — потенциалы электростатического поля в верхней среде и в жидком слое; $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \boldsymbol{\tau}_1, \boldsymbol{\tau}_2$ — векторы нормали и касательной к свободной поверхности верхнего слоя и к границе раздела жидкостей; функции $F_1(x, z, t) \equiv z - \xi_1(x, t) - h$ и $F_2(x, z, t) \equiv z - \xi_2(x, t)$ определяют уравнения свободной поверхности верхнего слоя жидкости $F_1(x, z, t) = 0$ и границы раздела жидкостей $F_2(x, z, t) = 0$; $\xi_1(x, t)$ и $\xi_2(x, t)$ — возмущения свободной поверхности слоя и границы раздела сред соответственно, амплитуды которых $|\xi_1| \sim |\xi_2| \ll h$ являются малыми величинами, P_1 и P_2 — гидродинамические давления в верхнем слое и нижней жидкости, P_{at} — постоянное (атмосферное) давление верхней среды на

свободную поверхность слоя; P_{σ_1}, P_{1E} и P_{σ_2}, P_{2E} — капиллярные и электростатические давления на свободную поверхность и на границу раздела сред.

Для определения капиллярного давления на границу раздела и свободную поверхность жидкости удобно воспользоваться известным выражением:

$$P_{\sigma_j} = \sigma_j \operatorname{div} \mathbf{n}_j.$$

Векторы нормали и тангенциальной составляющей определяются через уравнение поверхности:

$$F_j(x, z, t) = 0: \quad \mathbf{n}_j = \frac{\nabla F_j(x, y, z)}{|\nabla F_j(x, y, z)|}, \quad \boldsymbol{\tau}_j = [\mathbf{e}_y \times \mathbf{n}_j],$$

\mathbf{e}_y — орт оси OY .

Используя введенные выше выражения для функций $F_j(x, z, t)$, несложно получить

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_j &= \mathbf{e}_z \left(1 - \frac{1}{2} (\partial_x \xi_j)^2 \right) + \mathbf{e}_x \left(-\partial_x \xi_j + \frac{1}{2} (\partial_x \xi_j)^3 \right), \\ \boldsymbol{\tau}_j &= \mathbf{e}_x \left(1 - \frac{1}{2} (\partial_x \xi_j)^2 \right) + \mathbf{e}_z \left(\partial_x \xi_j - \frac{1}{2} (\partial_x \xi_j)^3 \right), \end{aligned}$$

\mathbf{e}_x — орт оси OX .

Для замыкания задачи систему уравнений (1) необходимо дополнить начальными условиями на свободной поверхности и на границе раздела сред:

$$\begin{aligned} t = 0: \quad \xi_1(x, t) &= \alpha_1 \cos(kx), \quad \xi_2(x, t) = \alpha_2 \cos(kx), \\ \partial_t \xi_1(x, t) &= 0, \quad \partial_t \xi_2(x, t) = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

т.е. рассматривается ситуация, когда в начальный момент времени заданы волновые деформации с волновым числом k и свободной поверхности жидкости и границы раздела сред при нулевых скоростях движения жидкости. α_1 и α_2 — начальные амплитуды, имеющие первый порядок малости.

2. Решение сформулированной задачи естественно искать в рамках модели потенциального течения жидкостей: $\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t) = \nabla \varphi_j(\mathbf{r}, t)$ ($j = 1; 2$), где $\varphi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi_2(\mathbf{r}, t)$ — потенциалы поля скоростей волнового движения в верхней и нижней жидкостях соответственно. Поскольку движения обеих жидкостей вызваны малыми колебаниями их граничных поверхностей, то примем, что в безразмерных переменных (например, $\rho_1 = g = \sigma_1 = 1$) потенциалы $\varphi_1(\mathbf{r}, t)$ и $\varphi_2(\mathbf{r}, t)$ имеют тот же порядок малости, что и амплитуды волн: $|\varphi_j| \sim |\xi_j| \sim \varepsilon$, где $\varepsilon \equiv \max\{|\xi_1|, |\xi_2|\} / \sqrt{\sigma_1/\rho_1 g}$ — безразмерная амплитуда деформации, которую примем в качестве малого параметра задачи. Решение сформулированной задачи будем искать методом многих временных масштабов [7,8] в виде асимптотических разложений по степеням ε :

$$\begin{aligned} \varphi_j(\mathbf{r}, t) &\approx \varepsilon \varphi_j^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2 \varphi_j^{(2)}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^3 \varphi_j^{(3)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^4), \\ \Phi_j(\mathbf{r}, t) &\approx \Phi_j^{(0)}(\mathbf{r}) + \varepsilon \Phi_j^{(1)}(\mathbf{r}, t) + \varepsilon^2 \Phi_j^{(2)}(\mathbf{r}, t) \\ &\quad + \varepsilon^3 \Phi_j^{(3)}(\mathbf{r}, t) + O(\varepsilon^4), \\ \xi_j(x, t) &\approx \varepsilon \xi_j^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2 \xi_j^{(2)}(x, t) + \varepsilon^3 \xi_j^{(3)}(x, t) + O(\varepsilon^4), \end{aligned} \quad (3)$$

полагая, что искомые функции зависят не просто от времени t , но от разных его масштабов T_m , определенных как $T_m \equiv \varepsilon^m t$. Производные по времени будем вычислять, имея в виду полный набор различных его масштабов, по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3).$$

В (3) верхний индекс, стоящий в скобках, означает порядок малости, а нижний характеризует среду.

Подставляя выражения (3) в (1) и собирая слагаемые при одинаковых степенях ε , разобьем задачу на порядки малости от нулевого до третьего.

3. Задача нулевого порядка малости дает выражения для распределения гидродинамических давлений и потенциалов электрического поля в равновесном состоянии системы [4,5]:

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(0)} &= -E_0 z, \quad P_1^{(1)} = P_{at} + \rho_1 g(h - z) - \frac{\varepsilon_d - 1}{8\pi \varepsilon_d} E_0^2, \\ \Phi_1^{(0)} &= -\frac{1}{\varepsilon_d} E_0 z, \quad P_2^{(1)} = P_{at} + g(\rho_1 h - \rho_2 z) - \frac{1}{8\pi} E_0^2. \end{aligned}$$

В расчетах задачи первого порядка малости выражения для профилей волн на свободной поверхности верхнего слоя жидкости $\xi_1^{(1)}(x, T_0)$ и на границе раздела сред $\xi_2^{(1)}(x, T_0)$ получим в виде [4,5]

$$\xi_j^{(1)}(x, T_0) = \sum_{n=1}^2 \xi_{jn}(T_1) \exp\{i[kx - \omega_n(k)T_0]\}, \quad j \in \{1; 2\}, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \xi_1(T_1) &= \xi_{11}(T_1) + \xi_{12}(T_1), \quad \xi_2(T_1) = \xi_{21}(T_1) + \xi_{22}(T_1), \\ \xi_{21}(T_1) &= d_1(k)\xi_{11}(T_1), \quad \xi_{22}(T_1) = d_2(k)\xi_{12}(T_1), \end{aligned}$$

где $d_1(k), d_2(k)$ — отношения амплитуд волн на границе раздела сред и на свободной поверхности для частот $\omega_1(k)$ и $\omega_2(k)$ определяются следующим выражением:

$$\begin{aligned} d_j(k) &\equiv \frac{\xi_{2j}(T_1)}{\xi_{1j}(T_1)} \\ &= \frac{\rho_1 \omega_j^2 - k(\rho_1 g + \sigma_1 k^2) \operatorname{th}(kh) + (\varepsilon_d - 1)H(W, k, \varepsilon_d, h)}{\rho_1 \omega_j^2 - H(W, k, \varepsilon_d, h)} \\ &\quad \times \operatorname{ch}(kh), \end{aligned}$$

$$W \equiv \frac{E_0^2}{4\pi \sqrt{\rho_1 g \sigma_1}}, \quad H(W, k, \varepsilon_d, h) \equiv \frac{W k^2 (\varepsilon_d - 1) \operatorname{th}(kh)}{\varepsilon_d (\varepsilon_d + \operatorname{th}(kh))},$$

W — безразмерный полевой параметр, определенный как отношение давления электрического поля на границу к давлению капиллярных сил.

Частоты волн, порождаемые свободной поверхностью верхнего слоя жидкости $\omega_1(k)$ и границей раздела жидкостей $\omega_2(k)$, являются решениями дисперсионного уравнения

$$\omega^4(k) - \frac{kV}{[\rho_2 + \rho_1 \operatorname{th}(hk)]} \omega^2(k) + \frac{k^2 \operatorname{th}(hk)N}{\rho_1 [\rho_2 + \rho_1 \operatorname{th}(hk)]} = 0,$$

$$\begin{aligned}
V &= \rho_2 g + (\sigma_2 + \sigma_1)k^2 + \frac{\rho_2}{\rho_1}(\rho_1 g + \sigma_1 k^2) \operatorname{th}(kh) \\
&\quad - \frac{Wk}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \operatorname{th}(kh))} \left[\varepsilon_d^2 - 2(\varepsilon_d - 1) \operatorname{th}(kh)^2 \right. \\
&\quad \left. + \operatorname{th}(kh) \left[\varepsilon_d + \frac{\rho_2}{\rho_1}(\varepsilon_d - 1)^2 \right] \right], \\
N &= \left[\rho_1 g + \sigma_1 k^2 - \frac{Wk}{\varepsilon_d} \frac{(\varepsilon_d - 1)^2}{(\varepsilon_d + \operatorname{th}(kh))} \right] \left[(\rho_2 - \rho_1)g + \sigma_2 k^2 \right. \\
&\quad \left. - \frac{Wk}{\varepsilon_d} \frac{(\varepsilon_d \operatorname{th}(kh) + 1)}{(\varepsilon_d + \operatorname{th}(kh))} \right] - \left[\frac{Wk}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \operatorname{th}(kh))} \frac{(\varepsilon_d - 1)}{\operatorname{ch}(kh)} \right]^2, \\
\omega_{1,2}^2 &= \frac{k}{2(\rho_1 \rho_2 + \rho_1^2 \operatorname{th}(kh))} \\
&\quad \times \left[V\rho_1 \mp \sqrt{V^2 \rho_1^2 - 4N(\rho_2 + \rho_1 \operatorname{th}(kh)) \operatorname{th}(kh)} \right].
\end{aligned}$$

Здесь частота волн, порожденных границей раздела сред, ω_1 соответствует режиму „мертвой воды“ (знак „минус“ перед радикалом); частота волн на свободной поверхности жидкости, ω_2 — режиму однородной жидкости (знак „плюс“ перед радикалом). В этом нетрудно убедиться, устремляя частоты ω_1 и ω_2 к пределу: $\sigma_j \rightarrow 0$, $E \rightarrow 0$, $\rho_2 \rightarrow \rho_1$. При таком предельном переходе мы приходим к гравитационным волнам на поверхности однородной жидкости [9]; граница раздела исчезает, исчезают и порождаемые ею волны. То есть при указанном предельном переходе получаем: $\omega_1 \rightarrow 0$, $\omega_{23} \rightarrow \sqrt{gk}$.

4. Частное решение задачи второго порядка малости для функций, описывающих возмущения свободной поверхности $\xi_1^{(2)}(x, T_0)$ и границы раздела сред $\xi_2^{(2)}(x, T_0)$, имеет вид [5]

$$\begin{aligned}
\xi_1^{(2)}(x, T_0) &= \left(\frac{U_{11}\xi_{11}^2}{G_1(\Omega_1)} \right) \exp[i(2ikx - \Omega_1 T_0)] \\
&\quad + \left(\frac{U_{12}\xi_{11}\xi_{12}}{G_2(\Omega_2)} \right) \exp[i(2kx - \Omega_2 T_0)] \\
&\quad + \left(\frac{U_{13}\xi_{12}^2}{G_3(\Omega_3)} \right) \exp[i(2kx - \Omega_3 T_0)], \\
\xi_2^{(2)}(x, T_0) &= \left(\frac{U_{21}\xi_{11}^2}{G_1(\Omega_1)} \right) \exp[i(2ikx - \Omega_1 T_0)] \\
&\quad + \left(\frac{U_{22}\xi_{11}\xi_{12}}{G_2(\Omega_2)} \right) \exp[i(2kx - \Omega_2 T_0)] \\
&\quad + \left(\frac{U_{23}\xi_{12}^2}{G_3(\Omega_3)} \right) \exp[i(2kx - \Omega_3 T_0)], \\
G_j(\Omega_j) &\equiv \Omega_j^4 - \frac{2kV(2k)}{[\rho_2 + \rho_1 \operatorname{th}(2kh)]} \Omega_j^2 + \frac{4k^2 \operatorname{th}(kh)N(2k)}{\rho_1[\rho_2 + \rho_1 \operatorname{th}(2kh)]}, \\
\Omega_1 &\equiv 2\omega_1(k), \quad \Omega_2 \equiv \omega_1(k) + \omega_2(k), \quad \Omega_3 \equiv 2\omega_2(k). \quad (5)
\end{aligned}$$

Коэффициенты $U_{j,i}$, стоящие при амплитудах ξ и зависящие от физических параметров задачи, здесь не

приводятся ввиду их громоздкости, а также потому, что их явный вид для решаемой задачи (определения нелинейных поправок к частотам) несуществен.

Для того чтобы записать общее решение неоднородной задачи, нужно к частному решению неоднородной задачи прибавить общее решение однородной задачи, которое имеет вид, аналогичный решению задачи первого порядка малости. Но поскольку целью исследования является отыскание нелинейных поправок к частотам волн [10], а общее решение никак не влияет на их вычисление, его также приводить не будем, используя для дальнейших вычислений только частное решение задачи. Рассмотрение задачи второго порядка малости позволило установить, что возмущения $\xi^{(2)}$ и потенциалы $\varphi^{(2)}$, $\Phi^{(2)}$, которые являются решениями уравнений Лапласа и связаны с $\xi^{(2)}$ через граничные условия, не зависят от временного масштаба T_1 . Поэтому задача второго порядка малости нелинейных поправок к частотам волн не дает.

5. Выпишем систему граничных условий из математической формулировки задачи третьего порядка малости

$$\begin{aligned}
z = 0: \quad & -\frac{\partial \xi_1^{(3)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \varphi_1^{(3)}}{\partial z} = \Xi_{11}, \quad \frac{\partial \Phi_0^{(3)}}{\partial z} - \varepsilon_d \frac{\partial \Phi_1^{(3)}}{\partial z} = \Xi_{12}, \\
& \frac{\partial \xi_1^{(3)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_0^{(0)}}{\partial z} - \frac{\partial \xi_1^{(3)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} + \frac{\partial \Phi_0^{(3)}}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_1^{(3)}}{\partial x} = \Xi_{13}, \\
& -g\rho_1 \xi_1^{(3)} - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1^{(3)}}{\partial T_0} + \frac{\varepsilon_d - 1}{4\pi\varepsilon_d} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_0^{(3)}}{\partial z} + \sigma_1 \frac{\partial^2 \xi_1^{(3)}}{\partial x^2} = \Xi_{14}, \\
z = h: \quad & \frac{\partial \varphi_1^{(3)}}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2^{(3)}}{\partial z} = \Xi_{21}, \quad -\frac{\partial \xi_2^{(3)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \varphi_2^{(3)}}{\partial z} = \Xi_{22}, \\
& \Phi_1^{(3)} + \xi_2^{(3)} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} = \Xi_{23}, \quad g\xi_2^{(3)}(\rho_1 - \rho_2) + \rho_2 \frac{\partial \varphi_2^{(3)}}{\partial T_0} \\
& + \rho_1 \frac{\partial \varphi_1^{(3)}}{\partial T_0} + \frac{\varepsilon_d}{4\pi} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_1^{(3)}}{\partial z} + \sigma_2 \frac{\partial^2 \xi_2^{(3)}}{\partial x^2} = \Xi_{24}. \quad (6)
\end{aligned}$$

Выражения для функций неоднородностей Ξ , стоящих в правых частях граничных условий (6) на свободной поверхности и границе раздела жидкостей, определяющихся решениями первого (4) и второго (5) порядков малости, приведены в Приложении А.

Решая систему (6) с неоднородными граничными условиями, кроме выражений, определяющих решения третьего порядка малости $\xi^{(3)}$, $\varphi^{(3)}$ и $\Phi^{(3)}$, получаем два дифференциальных уравнения относительно ξ_{11} и ξ_{12} , из которых можно найти нелинейные поправки к частотам волн

$$\begin{aligned}
iC_1 \frac{\partial \xi_{11}}{\partial T_2} &= A_1 \xi_{11}^2 \bar{\xi}_{11} + B_1 \xi_{11} \xi_{12} \bar{\xi}_{12}, \\
iC_2 \frac{\partial \xi_{12}}{\partial T_2} &= A_2 \xi_{12}^2 \bar{\xi}_{12} + B_2 \xi_{11} \xi_{12} \bar{\xi}_{11}, \quad (7)
\end{aligned}$$

где черта над амплитудами ξ означает комплексное сопряжение, константы A, B, C приведены в Приложении Б.

Представим функции ξ_{11}, ξ_{12} в виде

$$\begin{aligned} \xi_{11} &= \xi_{11}(T_2) \exp[i\beta_1(T_2)]; \\ \xi_{12} &= \xi_{12}(T_2) \exp[i\beta_2(T_2)], \end{aligned} \quad (8)$$

где $\xi_{1j}(T_2)$ и $\beta_j(T_2)$ — вещественные функции. Подставляя в систему дифференциальных уравнений (7) выражения (8), получим

$$\begin{aligned} A_1 \xi_{11}^3(T_2) + B_1 \xi_{11}(T_2) \xi_{12}^2(T_2) - C_1 \xi_{11}(T_2) \frac{\partial \beta_1(T_2)}{\partial T_2} \\ + iC_1 \frac{\partial \xi_{11}(T_2)}{\partial T_2} = 0, \\ A_2 \xi_{12}^3(T_2) + B_2 \xi_{12}(T_2) \xi_{11}^2(T_2) - C_2 \xi_{12}(T_2) \frac{\partial \beta_2(T_2)}{\partial T_2} \\ + iC_2 \frac{\partial \xi_{12}(T_2)}{\partial T_2} = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Приравнявая нулю по отдельности реальные и мнимые части уравнений (9), запишем систему

$$\frac{\partial \xi_{11}(T_2)}{\partial T_2} = 0, \quad \frac{\partial \xi_{12}(T_2)}{\partial T_2} = 0, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} A_1 \xi_{11}^3(T_2) + B_1 \xi_{11}(T_2) \Psi_2^2(T_2) - C_1 \xi_{11}(T_2) \frac{\partial \beta_1(T_2)}{\partial T_2} = 0, \\ A_2 \xi_{12}^3(T_2) + B_2 \xi_{12}(T_2) \xi_{11}^2(T_2) - C_2 \xi_{12}(T_2) \frac{\partial \beta_2(T_2)}{\partial T_2} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Из того, что решениями уравнений (10) будут произвольные функции времени T_3 , следует, что ξ_{11} и ξ_{12} не зависят от временного масштаба T_2 и в используемом приближении могут быть приняты равными константам. Полагая, что $\xi_{11}(T_2) \neq 0$, $\xi_{12}(T_2) \neq 0$ (в противном случае будем иметь невозмущенную поверхность жидкостей, отсутствие полей скоростей внутри жидкостей и невозмущенное электрическое поле), и поделив (11) на ξ_{11} и ξ_{12} , получим

$$\begin{aligned} \beta_1(T_2) &= \left(\frac{A_1}{C_1} \xi_{11}^2 + \frac{B_1}{C_1} \xi_{12}^2 \right) T_2 + \mu_1(T_3), \\ \beta_2(T_2) &= \left(\frac{A_2}{C_2} \xi_{12}^2 + \frac{B_2}{C_2} \xi_{11}^2 \right) T_2 + \mu_2(T_3), \end{aligned}$$

где μ_1, μ_2 — произвольные функции времени T_3 , которые возникают при интегрировании уравнений (11), а при удовлетворении начальным условиям (2) принимаются равными нулю.

Таким образом, в результате решения задачи третьего порядка малости получим следующую зависимость ам-

плитуд волн $\xi_1^{(1)}$ и $\xi_2^{(1)}$ от временного масштаба T_2 :

$$\begin{aligned} \xi_1^{(1)} &= \xi_{11} \exp[i(kx - \omega_1 T_0 + \delta_1(k) T_2)] \\ &\quad + \xi_{12} \exp[i(kx - \omega_2 T_0 + \delta_2(k) T_2)] \\ &\quad + \xi_1^{(2)}(x, T_0) + O(\varepsilon^3), \\ \xi_2^{(1)} &= d_1 \xi_{11} \exp[i(kx - \omega_1 T_0 + \delta_1(k) T_2)] \\ &\quad + d_2 \xi_{12} \exp[i(kx - \omega_2 T_0 + \delta_2(k) T_2)] \\ &\quad + \xi_2^{(2)}(x, T_0) + O(\varepsilon^3), \end{aligned} \quad (12)$$

где ξ_{11}, ξ_{12} определяются из начальных условий (2) и имеют вид

$$\xi_{11} = \frac{\alpha_2 - \alpha_1 d_2(k)}{d_1(k) - d_2(k)}, \quad \xi_{12} = \frac{\alpha_1 d_1(k) - \alpha_2}{d_1(k) - d_2(k)}.$$

Как следует из (12), величины $\varepsilon^2 \delta_j$ и являются нелинейными поправками к частотам ω_j . Их аналитический вид весьма громоздок и в данном рассмотрении не приводится. Отметим лишь, что δ_j имеют резонансный вид, т.е. при определенных значениях физических величин их величина начинает неограниченно расти [3]. Изучим изменение величин δ_j при варьировании физических параметров графически.

6. Рис. 1–4 иллюстрируют качественный и количественный вид множителей δ_1 и δ_2 . На рис. 1, 2 изображены зависимости величины множителя δ_1 для поверхностных волн (генерируемых свободной поверхностью верхнего слоя) от величины волнового числа и напряженности поля. Рис. 3, 4 иллюстрируют зависимость δ_2 от k и E для внутренних волн (волн, порожденных границей раздела). Из рис. 1, а видно, что нелинейная поправка претерпевает разрыв при $k = \frac{1}{\sqrt{2}}$, как и следует из теории нелинейных волн на плоской поверхности [8,10]. В гравитационной области $k \ll 1$ и в капиллярной области $k > 1$ зависимости $\delta_1(k)$ и $\delta_1(k, E)$ гладкие. Как видно из рис. 1, а, физически значимая часть δ_1 лежит в верхней полуплоскости. При переходе через точку разрыва знак δ_1 не изменяется. Значит, наличие нелинейной поправки к частоте волн во всем диапазоне их изменения приводит к увеличению частоты волн на основе соотношения $\omega \approx \sqrt{\omega^2 + 2\varepsilon^2 \omega_1 \delta_1}$. Кроме того, очевидна тенденция к увеличению δ_1 с увеличением k .

Расчеты показывают, что от толщины слоя верхней жидкости h величина множителя δ_1 не зависит, как и должно быть [9] для волн на свободной поверхности.

При изменении начальной амплитуды волн как на свободной поверхности, так и на границе раздела вид зависимости $\delta_1(k)$ меняется. Из рис. 1, а видно, что при уменьшении амплитуды волны на границе раздела от $\alpha_2 = 0.5$ до $\alpha_2 = 0.1$ график весь опускается вниз. Исчезает точка перегиба на гравитационной ветви (левее точки разрыва). Вся гравитационная ветвь при этом переходит в область отрицательных значений.

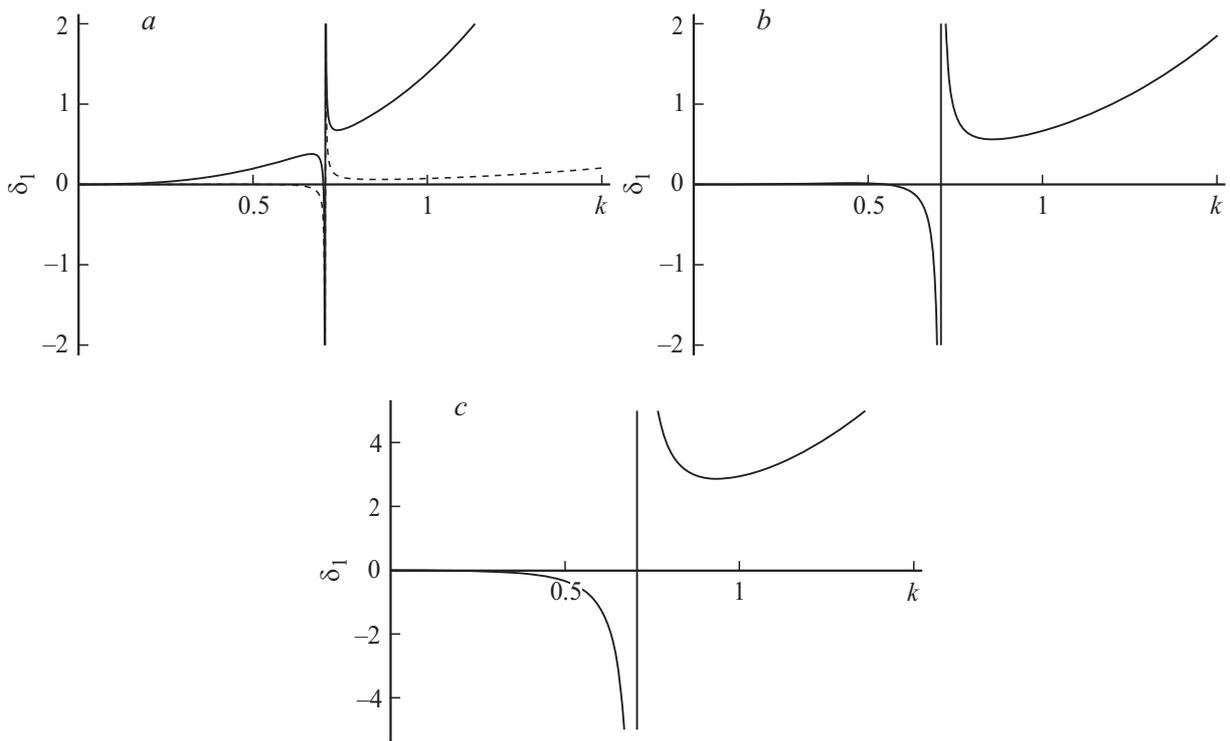


Рис. 1. Зависимость множителя δ_1 от волнового числа. Рассчитано при $\rho_2 = 1.05$, $\sigma_2 = 0.05$, $E = 0$, $h = 10$, $\varepsilon_d = 10$; *a* — $\alpha_1 = 0.1$. Сплошной линией нанесены рассчитанные значения для $\alpha_2 = 0.5$ и штриховой для $\alpha_2 = 0.1$; *b* — $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.3$, *c* — $\alpha_1 = 0.9$, $\alpha_2 = 0.5$.

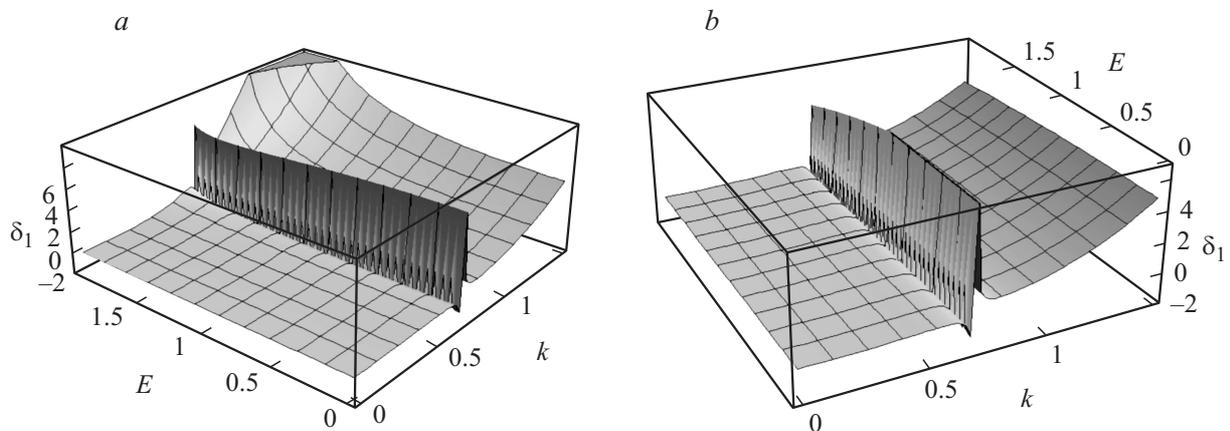


Рис. 2. Зависимость δ_1 от волнового числа и напряженности электростатического поля при значениях прочих физических параметров, как на рис. 1. *a* — $\varepsilon = 10$, $\alpha_1 = 0.3$, *b* — $\varepsilon_d = 80$, $\alpha_1 = 0.3$, $\alpha_2 = 0.5$.

В точке разрыва знак $\delta_1(k)$ меняется на противоположный, т.е. в области гравитационных волн нелинейная поправка начинает уменьшать частоту волн. При увеличении амплитуд гравитационной и капиллярной волн до $\alpha_2 = \alpha_1 = 0.3$ капиллярная ветвь поднимается вверх почти до $\delta_1(k) \approx 0.6$, а гравитационная изменяется мало, только немного отодвигается от оси ординат (рис. 1, *b*). Дальнейшее увеличение амплитуды волны, порожденной свободной поверхностью, приводит к тому, что капиллярная ветвь поднимается, а гравитационная

еще больше сдвигается от оси ординат, как это проиллюстрировано рис. 1, *c*, рассчитанным при $\alpha_1 = 0.9$ и $\alpha_2 = 0.5$ (ср. с рис. 1, *a*). Таким образом, при увеличении амплитуд волн абсолютные значения поправок к частотам возрастают.

Из рис. 2, *a* видно, что от напряженности электростатического поля нелинейная поправка δ_1 в области гравитационных волн зависит очень слабо, в основном при приближении к точке разрыва. В области капиллярных волн зависимость существенно более сильная, особенно

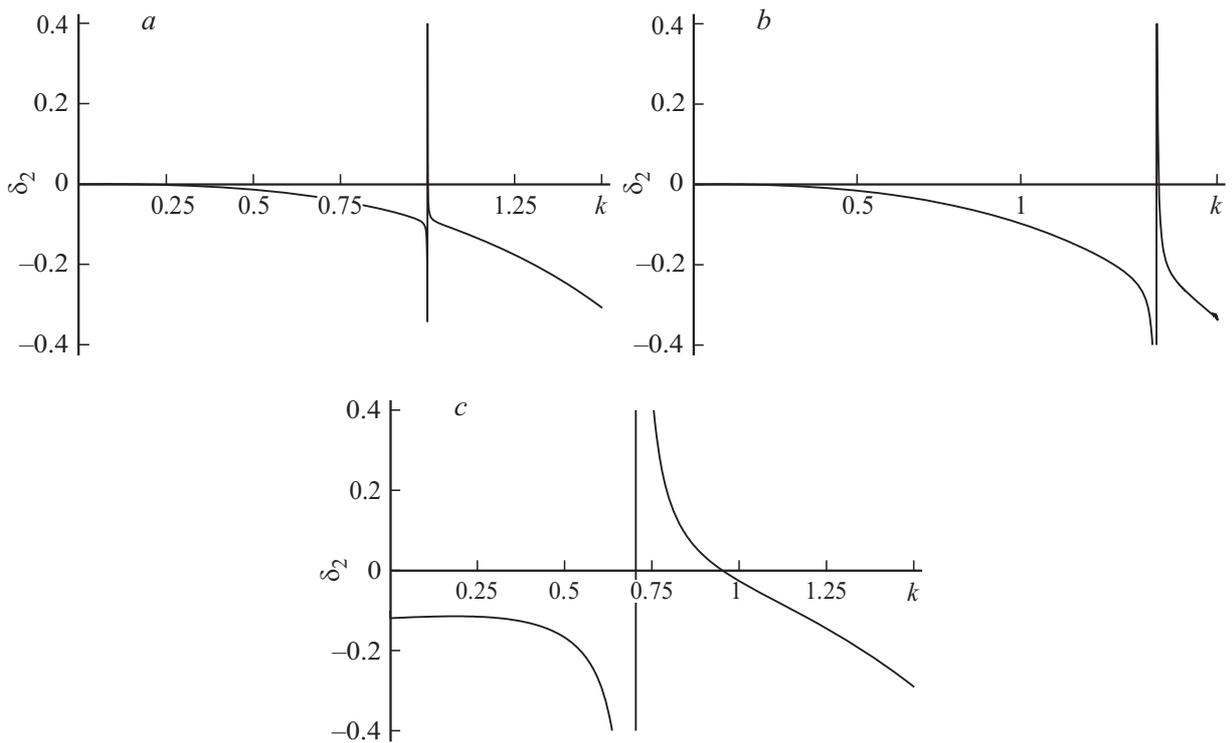


Рис. 3. Зависимость множителя δ_2 от волнового числа. Рассчитано при $\sigma_2 = 0.05, E = 0, \epsilon_d = 10, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.5$; *a* — $\rho_2 = 1.1, h = 10$; *b* — $\rho_2 = 1.2, h = 10$; *c* — $\rho_2 = 1.1, h = 1$.

отчетливой она становится с увеличением волнового числа. Неожиданно существенным оказалось влияние на исследуемую зависимость величины диэлектрической проницаемости верхней жидкости (рис. 2, *b* иллюстрирует ситуацию, когда значение ϵ_d увеличено в восемь раз по сравнению с рис. 2, *a*).

Следует отметить, что величина безразмерной напряженности электростатического поля, при которой реализуется неустойчивость поверхности жидкости к поверхностному заряду, определяется соотношением $E = 2\sqrt{\pi}$ [11].

Таким образом, из рис. 1, 2 следует, что для гравитационных волн величина нелинейной поправки весьма мала и в большом диапазоне изменения физических параметров имеет отрицательный знак. Для капиллярных же волн поправка значительно больше и положительна. С увеличением волнового числа величина нелинейной поправки в области капиллярных волн увеличивается.

На рис. 3, *a* представлена зависимость множителя δ_2 для волн, порождаемых границей раздела жидкостей, от волнового числа k , из рис. 3, *a* видно, что δ_2 всюду, за исключением малой окрестности точки разрыва, отрицателен, и, следовательно, нелинейная поправка для внутренних волн (волн на границе раздела) снижает частоты как гравитационных, так и капиллярных волн. Для гравитационных волн это снижение менее значительно ввиду малости δ_2 , для капиллярных волн абсолютное значение δ_2 быстро растет с увеличением волнового числа. Сам разрыв очень узкий, однако при увеличении

плотности нижней жидкости (рис. 3, *b*) ширина разрыва увеличивается, а точка разрыва смещается вправо. Увеличение начальной амплитуды волн на границе раздела сред приводит к пропорциональному росту величины нелинейной поправки. Расчеты показывают, что уменьшение плотности нижней жидкости (по сравнению с принятой при расчетах к рис. 3, *a*) и варьирование начальных амплитуд волн на обеих поверхностях может привести к исчезновению разрыва — кривая $\delta_2(k)$

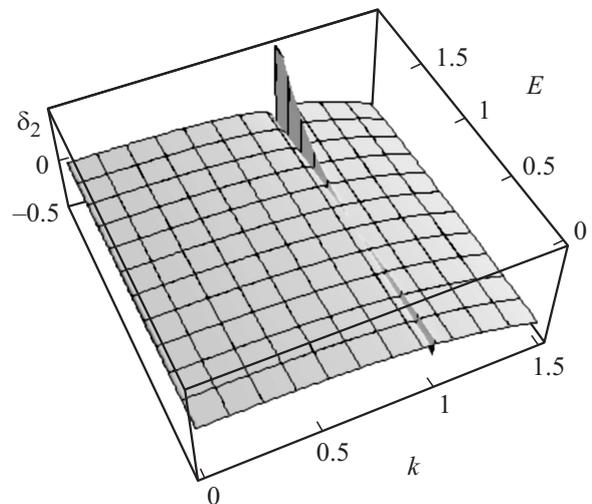


Рис. 4. То же, что на рис. 2, *a*, но для δ_2 . Рассчитано при $\rho_2 = 1.1, \sigma_2 = 0.05, h = 10, \epsilon_d = 10, \alpha_1 = 0.1, \alpha_2 = 0.5$.

становится гладкой. Подчеркнем, что величина $\delta_2(k)$ меняется с изменением начальных амплитуд волн на обеих поверхностях раздела сред.

При уменьшении толщины верхнего слоя жидкости δ_2 увеличивается по абсолютной величине в области гравитационных волн. Точка разрыва смещается влево, в гравитационную область. А сам разрыв расширяется (рис. 3, с). Ширина разрыва позволяет говорить о смене знака нелинейной поправки в окрестности точки разрыва.

Влияние величины напряженности электростатического поля на величину δ_2 незначительно, оно становится более заметным с ростом напряженности (как это видно из рис. 4).

Заключение

Найдены нелинейные поправки к частотам волн в слоисто-неоднородной жидкости, по-разному зависящие от физических параметров для внешних и внутренних волн, имеющие резонансный вид. Ввиду громоздкости аналитических выражений для них графически изучено изменение их величин при варьировании волнового числа, толщины слоя верхней жидкости, плотностей сред и напряженности внешнего электростатического поля.

Приложение А

$$\begin{aligned} \Xi_{11} &= \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial T_2} + \frac{\partial \xi_1^{(2)}}{\partial T_1} - \xi_1^{(2)} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial z^2} - \xi_1^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{\partial z^2} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\xi_1^{(1)})^2 \frac{\partial^3 \varphi_1^{(1)}}{\partial z^3} + \frac{\partial \xi_1^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x} \\ &\quad + \xi_1^{(1)} \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial x \partial z}, \\ \Xi_{12} &= \frac{\partial \xi_1^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial x} + \xi_1^{(1)} \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial x \partial z} \\ &\quad - \frac{1}{2} (\xi_1^{(1)})^2 \frac{\partial^3 \Phi_0^{(1)}}{\partial z^3} - \xi_1^{(2)} \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial z^2} - \xi_1^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi_0^{(2)}}{\partial z^2} \\ &\quad + \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \xi_1^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} - \varepsilon_d \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \xi_1^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} - \varepsilon_d \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial z} \\ &\quad + \varepsilon_d \xi_1^{(2)} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1)}}{\partial z^2} + \varepsilon_d \xi_1^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(2)}}{\partial z^2} + \varepsilon_d \frac{1}{2} (\xi_1^{(1)})^2 \frac{\partial^3 \Phi_1^{(1)}}{\partial z^3} \\ &\quad - \varepsilon_d \frac{\partial \xi_1^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial x} - \varepsilon_d \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1^{(2)}}{\partial x} - \varepsilon_d \xi_1^{(1)} \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1)}}{\partial x \partial z}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{13} &= (\xi_1^{(2)} + \xi_1^{(1)}) \left(\frac{\partial^2 \Phi_1^{(1)}}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial x \partial z} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 \Phi_1^{(1)}}{\partial x \partial z^2} - \frac{\partial^3 \Phi_0^{(1)}}{\partial x \partial z^2} \right) (\xi_1^{(1)})^2 \\ &\quad + \left(\frac{\partial \xi_1^{(2)}}{\partial x} + \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} \right) \\ &\quad + \xi_1^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \Phi_1^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \right)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \right)^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{14} &= -\rho_1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial T_2} - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial T_1} - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial z} \\ &\quad - \rho_1 \xi_1^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial z \partial T_1} - \rho_1 \xi_1^{(2)} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{\partial z \partial T_0} - \rho_1 \xi_1^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{\partial z \partial T_0} \\ &\quad - \rho_1 \xi_1^{(1)} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \rho_1 (\xi_1^{(1)})^2 \frac{\partial^3 \varphi_1^{(1)}}{\partial z^2 \partial T_0} \\ &\quad - \rho_1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x} - \rho_1 \xi_1^{(1)} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial x \partial z} \\ &\quad + \frac{\varepsilon_d - 1}{8\pi} \left[2 \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial z} + 2 \xi_1^{(2)} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial z^2} \right. \\ &\quad + 2 \xi_1^{(1)} \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial z^2} + 2 \xi_1^{(1)} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_0^{(2)}}{\partial z^2} \\ &\quad + (\xi_1^{(1)})^2 \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial^3 \Phi_0^{(1)}}{\partial z^3} + 2 \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial x} + 2 \xi_1^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial x \partial z} \\ &\quad - \frac{(\varepsilon_d - 1)}{\varepsilon_d} \left\{ -2 \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \xi_1^{(2)}}{\partial x} \left(\frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} \right)^2 - 2 \left(\frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \right)^2 \right. \\ &\quad \times \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} + 2 \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial z} + 2 \xi_1^{(2)} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial z^2} \\ &\quad + 2 \xi_1^{(1)} \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_0^{(1)}}{\partial z^2} + 2 \xi_1^{(1)} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_0^{(2)}}{\partial z^2} \\ &\quad + (\xi_1^{(1)})^2 \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial^3 \Phi_0^{(1)}}{\partial z^3} - 2 \frac{\partial \xi_1^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial x} \\ &\quad - 2 \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial x} - 2 \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_0^{(2)}}{\partial x} \\ &\quad \left. \left. - 2 \xi_1^{(1)} \frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_0^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_0^{(1)}}{\partial x \partial z} \right\} \right] - \frac{1}{2} \sigma_1 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi_1^{(1)}}{\partial x} \right)^3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial z} - \xi_2^{(2)} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial z^2} - \xi_2^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{\partial z^2} \\ &- \frac{1}{2} (\xi_2^{(1)})^2 \frac{\partial^3 \varphi_1^{(1)}}{\partial z^3} + \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x} \\ &+ \xi_2^{(1)} \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x \partial z} - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial z} + \xi_2^{(2)} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial z^2} \\ &+ \xi_2^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{\partial z^2} + \frac{1}{2} (\xi_2^{(1)})^2 \frac{\partial^3 \varphi_2^{(1)}}{\partial z^3} - \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial x} \\ &- \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x} - \xi_2^{(1)} \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{\partial x \partial z}, \\ \Xi_{22} &= \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial T_2} + \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial T_1} - \xi_2^{(2)} \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{\partial z^2} - \xi_2^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{\partial z^2} \\ &- \frac{1}{2} (\xi_2^{(1)})^2 \frac{\partial^3 \varphi_2^{(1)}}{\partial z^3} + \frac{\partial \xi_2^{(2)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial x} + \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x} \\ &+ \xi_2^{(1)} \frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial x \partial z}, \\ \Xi_{23} &= -\xi_2^{(2)} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial z} - \xi_2^{(1)} \frac{\partial \Phi_1^{(2)}}{\partial z} - \frac{1}{2} (\xi_2^{(1)})^2 \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1)}}{\partial z^2}, \\ \Xi_{24} &= -\rho_2 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial T_2} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial T_1} - \rho_2 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial z} \\ &- \rho_2 \xi_2^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{\partial z \partial T_1} - \rho_2 \xi_2^{(2)} \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{\partial z \partial T_0} - \rho_2 \xi_2^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_2^{(2)}}{\partial z \partial T_0} \\ &- \rho_2 \xi_2^{(1)} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{\partial z^2} - \frac{1}{2} \rho_2 (\xi_2^{(1)})^2 \frac{\partial^3 \varphi_2^{(1)}}{\partial z^2 \partial T_0} \\ &- \rho_2 \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_2^{(2)}}{\partial x} - \rho_2 \xi_2^{(1)} \frac{\partial \varphi_2^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_2^{(1)}}{\partial x \partial z} + \rho_1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial T_2} \\ &+ \rho_1 \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial T_1} + \rho_1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial z} + \rho_1 \xi_2^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial z \partial T_1} \\ &+ \rho_1 \xi_2^{(2)} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial z \partial T_0} + \rho_1 \xi_2^{(1)} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(2)}}{\partial z \partial T_0} + \rho_1 \xi_2^{(1)} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial z^2} \\ &+ \frac{1}{2} \rho_1 (\xi_2^{(1)})^2 \frac{\partial^3 \varphi_1^{(1)}}{\partial z^2 \partial T_0} + \rho_1 \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \varphi_1^{(2)}}{\partial x} \\ &+ \rho_1 \xi_2^{(1)} \frac{\partial \varphi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi_1^{(1)}}{\partial x \partial z} + \frac{\varepsilon_d}{8\pi} \left[2 \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial \Phi_1^{(2)}}{\partial z} \right. \\ &+ 2 \xi_1^{(2)} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1)}}{\partial z^2} + 2 \xi_1^{(1)} \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1)}}{\partial z^2} \\ &+ 2 \xi_1^{(1)} \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(2)}}{\partial z^2} + (\xi_1^{(1)})^2 \frac{\partial \Phi_1^{(0)}}{\partial z} \frac{\partial^3 \Phi_1^{(1)}}{\partial z^3} \\ &\left. + 2 \frac{\partial \Phi_1^{(1)}}{\partial x} \frac{\partial \Phi_1^{(2)}}{\partial x} + 2 \xi_1^{(1)} \frac{\partial^2 \Phi_1^{(1)}}{\partial x \partial z} \right] - \frac{1}{2} \sigma_2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi_2^{(1)}}{\partial x} \right)^3. \end{aligned}$$

Приложение Б

$$\begin{aligned} A_j &= \Upsilon_{1j} S_{1j} + \Upsilon_{2j} S_{2j} + \Upsilon_{3j} S_{3j} + \Upsilon_{4j} S_{4j} + \Upsilon_{5j} S_{5j} \\ &+ \Upsilon_{6j} S_{6j} + \Upsilon_{7j} S_{7j} + \Upsilon_{8j} S_{8j}, \\ B_j &= \Upsilon_{1j} P_{1j} + \Upsilon_{2j} P_{2j} + \Upsilon_{3j} P_{3j} + \Upsilon_{4j} P_{4j} + \Upsilon_{5j} P_{5j} \\ &+ \Upsilon_{6j} P_{6j} + \Upsilon_{7j} P_{7j} + \Upsilon_{8j} P_{8j}, \\ C_j &= \Upsilon_{1j} Q_{1j} + \Upsilon_{2j} Q_{2j} + \Upsilon_{3j} Q_{3j} + \Upsilon_{4j} Q_{4j} + \Upsilon_{5j} Q_{5j} \\ &+ \Upsilon_{6j} Q_{6j} + \Upsilon_{7j} Q_{7j} + \Upsilon_{8j} Q_{8j}, \\ &\quad \{j = 1, 2\}; \\ \Upsilon_{1j} &= \frac{\rho_1 \omega_j}{k \operatorname{sh}(kh)} + \frac{4\pi \varepsilon_d \operatorname{ch}(kh) [1 + \varepsilon_d \operatorname{cth}(kh)] \rho_1 \omega_j D}{k^2 E^2 (\varepsilon_d - 1) - 4\pi \varepsilon [1 + \varepsilon_d \operatorname{cth}(kh)] \rho_1 \omega_j^2}, \\ \Upsilon_{2j} &= \frac{E}{4\pi (\varepsilon_d + \operatorname{th}(kh)) \operatorname{ch}(kh)} \\ &+ \frac{kE (\varepsilon_d - 1) \operatorname{sh}(kh) D}{k^2 E^2 (\varepsilon_d - 1) - 4\pi \varepsilon_d [1 + \varepsilon_d \operatorname{cth}(kh)] \rho_1 \omega_j^2}, \\ \Upsilon_{3j} &= -\frac{E}{4\pi [(\varepsilon_d + \operatorname{th}(kh))] \operatorname{ch}(kh)} \\ &+ \frac{kE \varepsilon_d (\varepsilon_d - 1) \operatorname{ch}(kh) D}{k^2 E^2 (\varepsilon_d - 1) - 4\pi \varepsilon_d [1 + \varepsilon_d \operatorname{cth}(kh)] \rho_1 \omega_j^2}, \\ \Upsilon_{4j} &= \frac{4k\pi \varepsilon [\varepsilon_d + \operatorname{th}(kh)] \operatorname{ch}(kh) D}{k^2 E^2 (\varepsilon_d - 1) - 4\pi \varepsilon_d [1 + \varepsilon_d \operatorname{cth}(kh)] \rho_1 \omega_j^2}, \\ \Upsilon_{5j} &= \frac{\rho_1 \omega_j}{4 \operatorname{th}(kh)} \\ &+ \frac{4k\pi \varepsilon [1 + \varepsilon_d \operatorname{cth}(kh)] \rho_1 \omega_j D}{k^2 E^2 (\varepsilon_d - 1) - 4\pi \varepsilon_d [1 + \varepsilon_d \operatorname{cth}(kh)] \rho_1 \omega_j^2}, \\ \Upsilon_{6j} &= \left(\frac{\rho_1}{\operatorname{th}(kh)} + \rho_2 \right) \frac{\omega_j}{k} \\ &+ \frac{4k\pi \varepsilon [1 + \varepsilon_d \operatorname{cth}(kh)] \rho_1 \omega_j D}{k^2 E^2 (\varepsilon_d - 1) - 4\pi \varepsilon_d [1 + \varepsilon_d \operatorname{cth}(kh)] \rho_1 \omega_j^2}, \\ \Upsilon_{7j} &= \frac{kE [1 + \varepsilon_d \operatorname{th}(kh)]}{4\pi [\varepsilon_d + \operatorname{th}(kh)]} \\ &+ \frac{k^2 E \varepsilon_d (\varepsilon_d - 1) D}{k^2 E^2 (\varepsilon_d - 1) - 4\pi \varepsilon_d [1 + \varepsilon_d \operatorname{cth}(kh)] \rho_1 \omega_j^2}, \\ D &\equiv \left[\frac{kE^2 (1 + \varepsilon_d \operatorname{th}(kh))}{4\pi \varepsilon_d (\varepsilon_d + \operatorname{th}(kh))} - g(\rho_2 - \rho_1) - k^2 \sigma_2 \right. \\ &\left. + \left(\frac{\rho_1}{\operatorname{th}(kh)} + \rho_2 \right) \frac{\omega_j^2}{k} \right], \\ \Upsilon_{8j} &= -1. \end{aligned}$$

Аналитические выражения для коэффициентов S_{nj} , P_{nj} и Q_{nj} чрезвычайно громоздки (они занимают ~ 10 страниц) и здесь не приводятся.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 14-01-00170 и 12-01-31327 мол_а.

Список литературы

- [1] *La Rocca M., Sciortino G., Boniforti M.A.* // *Nonlinear Oscil.* 2003. Vol. 6. N 2. P. 196–204.
- [2] *Gu H., Guo L.* // *Prog. Nat. Sci.* 2005. Vol. 15. N 11. P. 1026–1034.
- [3] *Григорьев А.И., Федоров М.С., Ширяева С.О.* // *Изв. РАН. МЖГ.* 2010. № 5. С. 130–140.
- [4] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Федоров М.С.* // *ЖТФ.* 2010. Т. 80. Вып. 7. С. 8–17.
- [5] *Григорьев А.И., Федоров М.С., Ширяева С.О.* // *ЖТФ.* 2011. Т. 81. Вып. 11. С. 31–39.
- [6] *Mercier M.J., Vasseur R., Dauxois T.* // *Nonlinear Proc. Geoph.* 2011. Vol. 18. P. 193–208.
- [7] *Nayfeh A.H., Hassan S.D.* // *J. Fluid Mech. Pt 3.* 1971. Vol. 48. P. 463–475.
- [8] *Nayfeh A.H.* // *Phys. Fluids.* 1970. Vol. 13. N 3. P. 545–550.
- [9] *Сретенский Л.Н.* *Теория волновых движений жидкости.* М.: Наука, 1977. 815 с.
- [10] *Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // *ЖТФ.* 2004. Т. 74. Вып. 1. С. 32–39.
- [11] *Френкель Я.И.* // *ЖЭТФ.* 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.