05

К теории уравнения Ландау–Лифшица–Гильберта

© С.О. Гладков, С.Б. Богданова

Московский авиационный институт (Национальный исследовательский университет),
Москва, Россия

E-mail: sglad@newmail.ru

*(Поступила в Редакцию 27 декабря 2013 г.
В окончательной редакции 16 ноября 2014 г.)*

С помощью квазиклассического кинетического уравнения для функции распределения магнонов найдено аналитическое выражение для константы релаксации α в уравнении Ландау–Лифшица–Гильберта.

Интересно, что, несмотря на уже почти столетнюю историю развития исследований, касающихся свойств доменной структуры (см., например, работы [1,2], а также монографии [3–7]), до сих пор отсутствуют работы, посвященные вычислению константы α в уравнении Ландау–Лифшица–Гильберта. Как показано далее, ее можно найти, если воспользоваться методом квазиклассического кинетического уравнения (ККУ) и вычислить с его помощью в квазиклассическом приближении скорость движения доменной стенки $\mathbf{V}$ как функцию внешнего магнитного поля $\mathbf{H}$. В квазиклассическом приближении подобная задача не решалась, хотя для объективности необходимо заметить, что вычислением скорости доменной границы занималось много исследователей. Классической работой в этом направлении считается работа Уокера [1], в которой была получена общая формула для вычисления скорости движения доменной стенки при любых скоростях движения, в том числе и при больших.

Конечной целью настоящей работы является вычисление феноменологически введенной Гильбертом константы α, фигурирующей в уравнении Ландау–Лифшица–Гильберта

$$\frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t} = \gamma_e \left[\mathbf{H}_{\text{eff}} \times \mathbf{M}\right] + \frac{\alpha}{M_0}\left[\mathbf{M} \times \frac{\partial \mathbf{M}}{\partial t}\right],$$

где $\mathbf{M}$ — плотность намагниченности (магнитный момент единицы объема), $\gamma_e = \frac{ge}{2mc}$, g — множитель Ланде, e — заряд электрона, m — его масса, c — скорость света, M_0 — спонтанная намагниченность ферромагнетика, $\mathbf{H}_{\text{eff}}$ — эффективное магнитное поле. Это поле действует на плотность магнитного момента $\mathbf{M}$ и определяется в виде функциональной производной от свободной энергии магнетика F по намагниченности $\mathbf{M}$, взятой с обратным знаком, т. е. как $\mathbf{H}_{\text{eff}} = -\frac{\delta F}{\delta \mathbf{M}}$.

Главным критерием корректности всех приведенных далее результатов может служить лишь соответствие теоретических расчетов экспериментальным данным. Действительно, известно, что скорость движения доменной границы во внешнем магнитном поле можно выразить через подвижность μ. В общем случае коэффициент μ представляет собой некоторый тензор, который можно обозначить как μ_{ik}. Вычислив этот тензор, можно аналитически найти микроскопическую связь (в рамках квазиклассического подхода благодаря ККУ) скорости $\mathbf{V}$ с $\mathbf{H}$. Далее как следствие этого определяется коэффициент пропорциональности между ними. Сравнение найденной формулы с известной зависимостью [1]

$$V = \frac{ge\delta}{2mc\alpha} H$$

(где $\delta = a\sqrt{\frac{J_{\text{ex}}}{\beta \mu_e M_0}}$ — толщина доменной границы, a — межатомное расстояние, $\mu_e = \hbar\gamma_e$ — магнетон Бора, β — константа анизотропии, J_{ex} — обменный интеграл) позволит нам вычислить константу релаксации Гильберта α. Это означает только, что мы будем исходить из равенства $\mu_{\text{theory}} = \frac{V}{H} = \frac{ge\delta}{2mc\alpha} = \mu_{\text{Walker}}$.

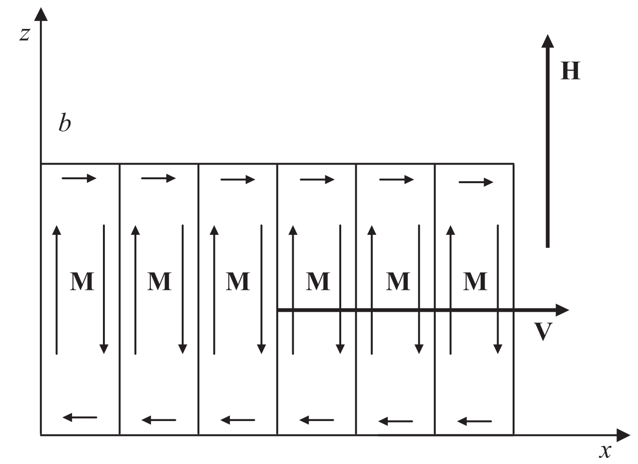
Как следует из приведенной формулы, для численных параметров $e = 1.60 \cdot 10^{-19}$ C, $m = 0.9 \cdot 10^{-27}$ g, $c = 3 \cdot 10^{10}$ cm/s, $g = 6$, $\delta = 10^{-6}$ cm, $\alpha = 10^{-2}$, $\tau^* = 10^{-14}$ s (где $\tau^* = \frac{g\delta}{2c\alpha}$) значение скорости окажется порядка $10^3 H$. Если величина магнитного поля будет 1 Oe, то скорость доменной границы составит примерно 10 m/s.

Такое значение скорости вполне приемлемо, если вспомнить опыт Брокгаузена, в котором движение доменных стенок при их разрушении в магнитном поле, превышающем поле анизотропии, сопровождается шорохом из диапазона слышимости человеческого уха, происходящим в результате хаотического движения доменных стенок, которое длится вполне обозримое время (вплоть до секунд).

При этом, если обратить внимание на численное значение коэффициента α, которое было принято нами сугубо для оценки, можно сделать вывод, что порядок величины его оказывается несколько заниженным и наиболее приемлемое значение константы Гильберта должно быть в пределах 1–10.

Приведенные рассуждения заставляют нас вернуться к этой задаче снова и рассмотреть вопрос о вычислении α как функции физических параметров ферромагнитного диэлектрика.

Представим себе легкоосный ферромагнитный диэлектрик, за ось легкого намагничивания которого выберем ось z. Внешнее магнитное поле $\mathbf{H}$ также направим вдоль этой оси, а модельную доменную структуру



Схематическое изображение плоской доменной границы в виде чередующихся плоскопараллельных областей. Скорость каждого домена направлена вдоль оси x. Внешнее магнитное поле ориентировано вдоль оси z.

представим в виде плоскопараллельных чередующихся областей, изображенных на рисунке. Буквой b обозначены одинаковые ширина и высота домена, а через δ — толщина доменной границы. В момент начала разрушения доменной структуры (когда магнитное поле начинает превышать поле анизотропии) доменные стенки приходят в движение, и в результате ферромагнетик оказывается однородно намагниченным. Для интерпретации процесса разрушения можно рассмотреть два случая: 1) классическую ситуацию, когда доменная стенка уходит на бесконечность; 2) допустимую возможность расширения фиксированной доменной границы, когда левая стенка уходит на минус бесконечность, а правая — на плюс бесконечность. Во втором случае ширина доменной границы δ будет функцией времени и ее зависимость должна быть типа $\delta(t) = \delta(0)e^{\eta t}$, где η — инкремент нарастания. Тем не менее следует отметить, что в обоих случаях физическая картина разрушения должна быть идентичной. Это связано с тем фактом, что и слева, и справа от выделенной доменной границы энергия основного состояния должна быть одинаковой. В противном случае будет иметь место диффузия намагниченности [3,8], которая приведет к установлению однородного состояния независимо от величины внешнего магнитного поля. Этого, однако, не происходит, и как известно из эксперимента, процесс разрушения обусловлен лишь величиной магнитного поля $\mathbf{H}$. Приведенное рассуждение означает, что для решения поставленной задачи методом квазиклассического кинетического уравнения мы имеем право (чисто гипотетически) вводить эффект увлечения магнонов и фононов доменной границей в начальный момент ее движения.

В рамках нашей задачи будем рассматривать простую геометрию доменов, схематически показанную на рисунке. Считаем, что в направлении, перпендикулярном плоскости рисунка, размер доменной границы равен l, а площадь доменной стенки $\sigma = bl$. В дальнейшем, если это не оговорено особо, направление скорости движения доменной границы $\mathbf{V}$ выбрано вдоль оси x.

Чтобы вычислить тензор подвижности μ_{ik} (где $i, k = x, y, z$), а точнее только четыре его компоненты $\mu_{xz} = \mu_{zx} = \mu_{yz} = \mu_{zy}$, в соответствии с рисунком одномерную скорость движения ввиду эквивалентности направлений x и y представим следующим образом: $V = V_x = \mu_{xz}H = \mu_{yz}H$.

Вычислим теперь диссипативную функцию $\dot{Q}$ как функцию скорости движения V. Согласно определению [9] (см. также работы [10,11], где была найдена связь между энтропией и силой сопротивления среды), для случая бозонов имеем

$$S = \sum_{\mathbf{p}} \left[(1 + f_p)\ln(1 + f_p) - f_p \ln f_p\right], \qquad (1)$$

где f_p — функция распределения магнонов в доменной стенке, $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$ — импульс магнона, а $\mathbf{k}$ — его волновой вектор. Из (1) следует, что производная по времени будет

$$\dot{S} = \sum_{\mathbf{p}} \dot{f}_p \ln(1 + f_p^{-1}). \qquad (2)$$

Чтобы вычислить производство энтропии, воспользуемся ККУ и представим его в виде

$$\frac{\partial f_p}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla f_p + \mathbf{F}\frac{\partial f_p}{\partial \mathbf{p}} = L(f_p). \qquad (3)$$

Здесь $\mathbf{u} = \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial \mathbf{p}}$ — скорость магнона, а его энергия $\varepsilon_p = J_{\text{ex}}(ak)^2 + \mu_e(H + H_a)$, поле анизотропии $H_a = \frac{Ka^3}{\mu_e}$, $\mathbf{F}$ — сила, действующая на магноны в доменной стенке со стороны внешнего магнитного поля вследствие движения доменной границы, $L(f_p)$ — интеграл магнонных столкновений; его явный вид для нас не слишком важен, поскольку в самом простом „тау-приближении“ он может быть представлен как $L(f_p) \approx -\frac{\delta f_p}{\tau_p}$, где τ_p — время релаксации магнонов, а $\delta f_p = f_p - \bar{f}_p$, ($\bar{f}_p$ — квазиравновесная функция распределения магнонов, увлекаемых движущейся доменной границей).

Как известно [8,10,12], в условиях макроскопического движения некоторого „гидродинамического“ потока частицы, хаотически движущиеся внутри этого потока, должны „увлекаться“ потоком, и поэтому для неподвижного внешнего наблюдателя энергия частицы с дисперсией $\varepsilon(p)$ будет равна разности $\varepsilon(p) - \mathbf{pV}$, где $\mathbf{V}$ — скорость потока, $\mathbf{p}$ — импульс квазичастицы. В том случае, если это магноны, $\varepsilon(p) = \alpha p^2 + \mu_e(H + H_a)$, где $\alpha = \frac{J_{\text{ex}}a^2}{\hbar^2}$, а если это фононы, то $\varepsilon(p) = \hbar\omega = c_s p$, где c_s — средняя скорость звука. Это означает, что квазиравновесная бозевская функция распределения квазичастиц внутри доменной границы может быть представлена в виде

$$\bar{f}_p = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_p - \mathbf{pV}}{T}} - 1}. \qquad (4)$$

При $\mathbf{V} = 0$, как видно, функция будет просто равновесной
$$f_{0p} = \frac{1}{e^{\varepsilon_p/T} - 1}. \quad (5)$$
Функцию распределения в виде (4) мы предполагаем такой чисто гипотетически с единственной целью: связать скорость доменной стенки с внешним магнитным полем. Как показано далее, это предположение оказывается правильным.

Заметим, что в (4) и (5) постоянная Больцмана k_B положена равной единице. Если в уравнение (3) подставить функцию $f_p = f_{0p} + \delta f_p$, где малая добавка δf_p состоит из двух частей, а именно
$$\delta f_p = \delta_1 f_p + \delta_2 f_p, \quad (6)$$
получим, что диссипативная функция будет равна
$$\dot{Q} = T\dot{S} = \sum_{\mathbf{p}} \frac{\varepsilon_p \delta f_p^2}{\tau_p f_{0p}(1 + f_{0p})} - \sum_{\mathbf{p}} \frac{\varepsilon_p}{\tau_p} \delta f_p. \quad (7)$$
Что касается поправки $\delta_1 f_p$, то она легко вычисляется из уравнения (3).

Действительно, из (3) получаем, что $\delta_1 f_p = -\tau_p \mathbf{u}\nabla f_{0p} - \tau_p \mathbf{F}\nabla_p f_{0p}$. В силу однородности функции распределения член с градиентом исчезает, и в итоге
$$\delta_1 f_p = -\tau_p \mathbf{F} \frac{\partial f_{0p}}{\partial p} = -\tau_p (\mathbf{Fu}) \frac{\partial f_{0p}}{\partial \varepsilon_p}. \quad (8)$$
Для второй добавки имеем
$$\delta_2 f_p = \bar{f}_p - f_{0p} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_p - \mathbf{pV}}{T}} - 1} - \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_p}{T}} - 1} \approx f_{0p}(1 + f_{0p}) \frac{\mathbf{pV}}{T}. \quad (9)$$
При подстановке (8) и (9) в формулу (7) последнее слагаемое в ней исчезает благодаря пропорциональности стоящей под знаком суммы групповой скорости магнона $\mathbf{u}$. Она в свою очередь пропорциональна волновому вектору магнона $\mathbf{k}$, поэтому $\sum\limits_{\mathbf{k}} \mathbf{k}\psi(k) = 0$.

Следовательно, полная диссипативная функция с учетом (8) и (9) будет иметь вид
$$\dot{Q} = T\dot{S} = \frac{1}{T^2} \sum_{\mathbf{p}} \frac{\varepsilon_p f_{0p}(1 + f_{0p})}{\tau_p} \left[\mathbf{pV} + (\mathbf{Fu})\tau_p\right]^2. \quad (10)$$
Переходя здесь от суммирования к интегрированию согласно правилу $\sum\limits_{\mathbf{p}}(\ldots) = \sum\limits_{\mathbf{k}}(\ldots) = \Omega \int (\ldots) \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$, где Ω — объем доменной границы, и вводя сферическую систему координат, после возведения в квадрат выражения в квадратных скобках получаем
$$\dot{Q} = \frac{\Omega}{T^2(2\pi)^3} \int \frac{\varepsilon_p}{\tau_p} f_{0p}(1 + f_{0p}) \times \left[(\mathbf{pV})^2 + 2(\mathbf{pV})(\mathbf{Fu})\tau_p + (\mathbf{Fu})^2\tau_p^2\right] k^2 dk \sin\theta d\theta d\phi.$$
Усредняя найденное выражение по угловым переменным, в результате имеем
$$\dot{Q} = \frac{\Omega}{6\pi^2 T^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\varepsilon_k}{\tau_k} f_{0k}(1 + f_{0k}) \times \left[\hbar^2 V^2 k^2 + 2\hbar(\mathbf{FV})(\mathbf{ku})\tau_p + F^2 u^2 \tau_p^2\right] k^2 dk. \quad (11)$$
Положив здесь $\mathbf{F} = 0$ (внешних сил нет), диссипативную функцию можно определить как
$$\dot{Q} = V^2 \frac{\Omega\hbar^2}{6\pi^2 T^2} \int\limits_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\varepsilon_k}{\tau_k} f_{0k}(1 + f_{0k}) k^4 dk. \quad (12)$$
Вводя далее среднее время релаксации магнонов $\bar{\tau}$, найдем
$$\dot{Q} = V^2 \frac{\Omega\hbar^2}{6\pi^2 \bar{\tau}} T \frac{\partial}{\partial T} \int\limits_0^{\frac{\pi}{a}} \varepsilon_{0k}^{-1} f_{0k} k^4 dk.$$
Полученный интеграл легко вычисляется, и окончательно находим
$$\dot{Q} = V^2 \frac{\Omega\hbar^2 T}{16\pi^2 a^5 \omega_{\text{ex}}^2 \bar{\tau}} \sqrt{\frac{T}{J_{\text{ex}}}}\, g_1, \quad (13)$$
где обменная частота $\omega_{\text{ex}} = \frac{J_{\text{ex}}}{\hbar}$, а число $g_1 = \int\limits_0^\infty \frac{\sqrt{x}dx}{e^x - 1} \approx 2.315$. Таким образом, добавочная часть к свободной энергии, обусловленная кинетической энергией движения доменной стенки и диссипативной функцией, будет следующей:
$$\Delta F = F - F_0 = \frac{\Omega}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\rho_d V^2 + 2\frac{\partial \dot{Q}}{\partial V}\right] dx.$$
Или, записывая уравнение движения в лагранжевом виде, с учетом явного вида $\dot{Q}$ (13) находим
$$m_d \dot{V} = -kV + F_x, \quad (14)$$
где масса доменной границы $m_d = \rho_d \Omega$, а коэффициент „трения“ есть
$$k = \frac{g_1}{8\pi^2} \frac{T\Omega}{a^5 \omega_{\text{ex}}^2 \bar{\tau}} \sqrt{\frac{T}{J_{\text{ex}}}}. \quad (15)$$
Чтобы найти теперь силу F_x, действующую на доменную границу со стороны внешнего магнитного поля, воспользуемся формулой из работы [5] (стр. 185), которую представим в виде
$$\mathbf{F} = \Omega\nabla(\mathbf{MH}) = \mathbf{i}\Omega H_z \frac{\partial M_z}{\partial x} = \mathbf{i}\Omega H \frac{M_0}{\delta \operatorname{ch}^2\left(\frac{x - Vt}{\delta}\right)},$$
где $\mathbf{i}$ — единичный вектор вдоль оси x.

Таким образом, после интегрирования по x получаем

$$F_x = 2\Omega\,\frac{M_0 H}{\delta}. \tag{16}$$

В стационарном случае, полагая $\dot{V} = 0$ и учитывая (15) и (16), из уравнения $kV = F_x$ находим

$$V = \mu H, \tag{17}$$

где строго вычисленный коэффициент подвижности

$$\mu = \frac{8\pi^2}{g_1}\,\frac{M_0}{\delta}\,\frac{a^5\omega_{\text{ex}}^2\bar{\tau}}{T}\sqrt{\frac{J_{\text{ex}}}{T}}. \tag{18}$$

В силу того что средняя спонтанная намагниченность атома $M_0 = \frac{g\mu_e}{a^3} = \frac{ge\hbar}{2mca^3}$ (где g — множитель Ланде), из сравнения формулы (17) с классической формулой для скорости доменной границы $V = \frac{ge\delta}{2mc\alpha}H$ $\Big($где ширина границы $\delta = a\sqrt{\frac{J_{\text{ex}}}{\beta}}\Big)$ сразу следует явное выражение для феноменологической константы релаксации α в уравнении Ландау–Лифшица–Гильберта

$$\alpha = \frac{g_1}{8\pi^2\omega_{\text{ex}}\bar{\tau}}\,\frac{T}{\beta}\sqrt{\frac{T}{J_{\text{ex}}}}. \tag{19}$$

Оценим α для следующих параметров ферромагнетика: $J_{\text{ex}} = 10^3\,\text{K} = 1.38\cdot 10^{-20}\,\text{J}$, $\beta = \mu_e H_a = 1\,\text{K} = 1.38\cdot 10^{-23}\,\text{J}$, $T = 300\,\text{K} = 4.14\cdot 10^{-21}\,\text{J}$, $\tau = 10^{-5}\,\text{s}$, $\hbar = 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$, $g_1 \approx 2.315$.

В результате оказывается, что $\alpha \approx 3.5\cdot 10^{-5}$ и скорость доменной границы будет располагаться в диапазоне $(1-10^5)H$ в зависимости от входящих в коэффициент подвижности параметров.

В заключение следует еще раз обратить внимание на основные результы, полученные в работе.

1. С помощью диссипативной функции вычислена сила сопротивления, связанная со спин-решеточным торможением, которая действует на доменную границу, движущуюся сквозь решеточный газ.

2. Найден коэффициент подвижности доменной стенки.

3. С помощью квазиклассического кинетического уравнения вычислена константа релаксации α в уравнении Ландау-Лифшица-Гильберта.

Список литературы

[1] L.R. Walker, J.C. Slonczewski. Int. J. Magn. **2**, 85 (1972).
[2] В.Г. Барьяхтар, Б.А. Иванов, М.В. Четкин. УФН **146**, *7*, 417 (1985).
[3] Физический энциклопедический словарь / Под ред. А.М. Прохорова. Сов. энциклопедия, М. (1984). 944 с.
[4] А. Хуберт. Теория доменных стенок в упорядоченных средах. Мир, М. (1977). 306 с.
[5] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физики. Т. 8. Электродинамика сплошных сред. Наука, М. (1982). 620 с.
[6] А. Малоземов, Дж. Слонзуски. Доменные стенки в материалах с цилиндрическими магнитными доменами. Мир, М. (1982). 382 с.
[7] Т. О' Делл. Ферромагнитодинамика. Мир, М. (1983). 253 с.
[8] А.И. Ахиезер, В.Г. Барьяхтар, С.В. Пелетминский. Спиновые волны. Наука, М. (1967). 368 с.
[9] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. Теоретическая физика. Т. 5. Статистическая физика. Наука, М. (1976). 583 с.
[10] С.О. Гладков. Физика композитов: термодинамические и диссипативные свойства. Наука, М. (1999). 330 с.
[11] С.О. Гладков. Письма в ЖТФ **28**, *20*, 50 (2002).
[12] В.Л. Гуревич. Кинетика фононных систем. Наука, М. (1980). 400 с.