

## Тормозное излучение медленного электрона на металлических кластерах

© Л.И. Куркина

Институт теплофизики им. С.С. Кутателадзе Сибирского отделения Российской академии наук, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: kurkina@itp.nsc.ru

(Поступила в Редакцию 29 июля 2003 г.)

Получены выражения, позволяющие проводить численный расчет матричного элемента дипольного момента на состояниях непрерывного спектра при рассеянии заряженной частицы в любом орбитальном состоянии на короткодействующем сферически-симметричном потенциале. Схема расчета основана на разложении расходящегося матричного элемента на сумму сходящихся интегралов. Метод использован для исследования статического тормозного излучения медленного электрона на кластерах натрия. Обнаружен резонансный характер сечения тормозного излучения. Резонансы возникают при определенных для каждого кластера энергиях электрона после излучения и связаны с захватом электрона на квазистационарные уровни.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 03-03-32055), а также Президиума РАН в рамках Программы фундаментальных исследований „Фундаментальные проблемы физики и химии наноразмерных систем и наноматериалов“ (проект № 8.5).

Тормозное излучение (ТИ), возникающее при рассеянии заряженной частицы на мишени, обладающей внутренней электронной структурой (атоме, кластере, твердом теле), формируется посредством двух основных механизмов: „обычное“ (статическое) и поляризационное (динамическое) тормозное излучение [1,2]. В первом случае излучает налетающая заряженная частица при торможении в статическом поле мишени. Во втором случае налетающая частица виртуально возбуждает электроны мишени, которые излучают фотоны при переходе в исходное состояние. Поляризационное ТИ непосредственно связано с поляризуемостью мишени и имеет резонансы при тех же энергиях фотонов, что и динамическая поляризуемость. Согласно существующим моделям, сечение статического ТИ заряженной частицы на атоме монотонно изменяется с увеличением энергии фотона. Пики, которые наблюдаются в спектрах ТИ при столкновении заряженных частиц с атомами, обусловлены поляризационной составляющей и лежат вблизи порогов ионизации электронных оболочек атомов и энергий дипольных переходов между дискретными энергетическими уровнями. В спектрах динамической поляризуемости металлических кластеров, хотя и присутствуют особенности, вызванные одноэлектронными переходами, доминирующим является резонанс, связанный с возбуждением дипольных поверхностных плазменных колебаний [3–6]. Расчеты ТИ при рассеянии быстрых электронов на металлических кластерах [7–9] показали, что в окрестностях поверхностного плазмона излучение по поляризационному механизму должно на три-четыре порядка превышать обычное ТИ. Однако ниже энергии поверхностного плазмона преобладающим является статический механизм. Поскольку при рассмотрении процессов рассеяния с участием медленных электронов нельзя воспользоваться борновским приближением и выразить сечение ТИ через форм-фактор (как, например,

в [7–9]), возникает проблема вычисления радиальных матричных элементов излучательных переходов на состояниях непрерывного спектра, которые представляют собой расходящиеся интегралы в пределах от нуля до бесконечности. На ранних этапах решения подобной задачи для электрон-атомных столкновений ограничивались рассеянием  $s$ -электрона [10,11]. Затем получил распространение подход, следуя которому внутри некоторой области  $0 < r \leq r_0$  матричный элемент строят на волновых функциях, являющихся численным решением соответствующего радиального уравнения Шредингера, и интегрирование проводят численно, а при  $r \geq r_0$  для волновых функций используют асимптотические выражения и интеграл вычисляют аналитически [12–18]. Однако в случае рассеяния медленных электронов на металлических кластерах эти подходы не работают. Связано это с тем, что существенный вклад в сечение статического ТИ электрона на металлическом кластере вносят состояния в большом диапазоне орбитальных чисел. Вычисление фазовых сдвигов электрона в поле различных металлических кластеров показало, что, например, для кластера-мишени  $\text{Na}_{20}$  даже при начальной энергии электрона  $\sim 0.1$  eV необходимо в расчет статического ТИ включать состояния с орбитальными числами, по крайней мере от 0 до 3. С увеличением размера кластера и энергии электрона число значимых орбитальных состояний быстро возрастает. Если энергия налетающего электрона мала, а орбитальный момент велик, то радиальная волновая функция достигает своего асимптотического значения с приемлемой точностью при таких больших  $r_0$ , что численное вычисление расходящегося осциллирующего интеграла внутри области  $r_0$  происходит с большой погрешностью и приводит к не имеющим смысла результатам. При этом значение интеграла осциллирующим образом зависит от выбора  $r_0$ .

В настоящей работе представлена методика численного расчета матричного элемента дипольного момента при рассеянии электрона на сферическом короткодействующем потенциале путем разложения расходящегося интеграла на сумму сходящихся интегралов. Предлагаемая схема расчета позволяет учитывать состояния налетающего электрона с любым орбитальным моментом. Методика применена к исследованию статического ТИ электрона на кластерах натрия. Полученные результаты, в частности, показали, что при рассеянии медленных электронов на металлических кластерах сечение статического ТИ имеет резонансный характер.

## 1. Формализм

Для кластеров использовалась модель „желе“, которая рассматривает движение валентных электронов в поле однородного положительного фона, образованного равномерно „размазанными“ ионами кластера. Данная модель хорошо описывает электронные свойства кластеров со слабо связанными валентными электронами [3,4,6], к которым относятся кластеры щелочных металлов. Наиболее стабильным кластерам (с „магическим“ числом валентных электронов) в модели „желе“ соответствуют сферы с замкнутыми электронными оболочками. Потенциал сферы-желе близок к сферически-симметричной прямоугольной потенциальной яме с размытым краем и быстро стремится к нулю за границей положительного фона.

В нерелятивистском дипольном приближении сечение статического ТИ заряженной частицы, движущейся во внешнем силовом поле, может быть рассчитано через матричный элемент дипольного момента на состояниях непрерывного спектра [19]. Для случая рассеяния электрона на сферически-симметричном потенциале  $V(r)$  выражение для сечения ТИ  $\sigma$  с помощью разложения волновых функций налетающей частицы по парциальным волнам сводится к виду [20] (используется система единиц:  $\hbar = 2m = 1$ ,  $e^2 = 2$ , единица энергии — ридберг, единица длины — борковский радиус  $a_0$ )

$$\omega \left( \frac{d\sigma}{d\omega} \right) = \frac{16\omega^4}{3c^3 k_1^3 k_2} \sum_{l_1 l_2} l_> |D_{l_2 l_1}|^2, \quad (1)$$

где

$$D_{l_2 l_1} = \int_0^\infty u_2(k_2, r) r u_1(k_1, r) dr, \quad (2)$$

$u_l(k, r)$  — решение радиального уравнения Шредингера для электрона в поле  $V(r)$ ,  $\omega$  — энергия фотона,  $c$  — скорость света,  $\{k_1, l_1\}$  и  $\{k_2, l_2\}$  — импульс и орбитальное квантовое число, соответственно налетающего и рассеянного электрона для дипольного излучения  $l_2 = l_1 \pm 1$ ,  $l_> = \max\{l_1, l_2\}$ .

Для потенциала сферического кластера-желе в рамках теории функционала электронной плотности [21] имеем

$$V(r) = \frac{1}{4\pi} \int V(\mathbf{r}') d\Omega, \\ V(\mathbf{r}) = 2 \int \frac{\rho(\mathbf{r}') - \rho^+(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d\mathbf{r}' + V_{xc}(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_i^{occ} |\psi_i(\mathbf{r})|^2$$

— электронная плотность кластера (*occ* означает суммирование по всем заполненным состояниям), одноэлектронные волновые функции  $\psi_i(\mathbf{r})$  являются самосогласованными решениями стационарного уравнения Шредингера с потенциалом (3) (уравнения Кона–Шэма)

$$[-\nabla^2 + V(\mathbf{r})]\psi_i(\mathbf{r}) = E_i \psi_i(\mathbf{r}),$$

$$\rho^+(r) = \frac{3}{4\pi r_s^3} \Theta(R - r)$$

— плотность положительного фона „желе“ (совпадает по абсолютному значению со средней плотностью валентных электронов в соответствующем массивном металле),  $\Theta(R - r)$  — ступенчатая функция Хевисайда,  $R = r_s N^{1/3}$  — радиус положительного фона сферы-желе (рассматривается как радиус кластера),  $N$  — число атомов в кластере (для щелочных металлов совпадает с числом валентных электронов в кластере),  $r_s$  — радиус Вигнера–Зейтца,  $V_{xc}(\mathbf{r})$  — локальный обменно-корреляционный потенциал (в данной работе использовалась параметризация Воско и др. [22]).

Обозначим  $d$  радиус действия потенциала  $V(r)$ . В области  $0 < r \leq d$  численный расчет матричного элемента  $D_{l_2 l_1}$  не представляет труда. Волновые функции электрона  $u_l(k, r)$  в этой области до и после рассеяния на кластере легко получить путем численного интегрирования (например, методом Милна [23]) радиального уравнения Шредингера с потенциалом  $V(r)$  для энергии  $E = k^2$ .

Основная проблема состоит в корректном вычислении (2) в области  $d \leq r < \infty$ , так что с увеличением  $r$  интеграл расходится. Поскольку потенциал сферы-желе  $V(r)$  быстро спадает до нуля в области  $R < r < d$ , при  $r \geq d$  волновую функцию  $u_l(k, r)$  можно представить в виде комбинации регулярного и нерегулярного в нуле решений свободного уравнения Шредингера (сферических функций Бесселя  $j_l(kr)$  и Неймана  $n_l(kr)$ )

$$u_l(k, r) = kr \cos \delta_l [j_l(kr) - \tan \delta_l n_l(kr)], \quad (4)$$

где  $\delta_l$  — фаза рассеяния электрона с импульсом  $k$  и орбитальным квантовым числом  $l$  на потенциале  $V(r)$  (определяется из условия непрерывности волновой функции  $u_l(k, r)$  и ее первой производной в точке

$r = d$ ). Подстановка (4) в (2) при  $r \geq d$  приводит к сумме расходящихся интегралов от произведений функций Бесселя, Неймана и  $r^3$

$$\int_d^\infty u_{l_2}(k_2, r) r u_{l_1}(k_1, r) dr = k_1 k_2 \cos \delta_{l_1} \cos \delta_{l_2} \times [I_1 - \tan \delta_{l_1} I_2 - \tan \delta_{l_2} I_3 + \tan \delta_{l_1} \tan \delta_{l_2} I_4],$$

где

$$I_1 = \int_d^\infty j_{l_2}(k_2 r) j_{l_1}(k_1 r) r^3 dr,$$

$$I_2 = \int_d^\infty j_{l_2}(k_2 r) n_{l_1}(k_1 r) r^3 dr,$$

$$I_3 = \int_d^\infty n_{l_2}(k_2 r) j_{l_1}(k_1 r) r^3 dr,$$

$$I_4 = \int_d^\infty n_{l_2}(k_2 r) n_{l_1}(k_1 r) r^3 dr.$$

Используя рекуррентное соотношение для функций Бесселя и Неймана [23]

$$z_{l+1}(kr) = \frac{2l+1}{kr} z_l(kr) - z_{l-1}(kr), \quad (5)$$

где  $z_l(kr) = j_l(kr)$  или  $n_l(kr)$ , для интегралов  $I_i (i = 1, 2, 3, 4)$  можно получить общее выражение

$$\int_d^\infty x_{l_2}(k_2 r) y_{l_1}(k_1 r) r^3 dr = (-1)^{t+s} \int_d^\infty x_g(k_2 r) y_t(k_1 r) r^3 dr + \sum_{p=s}^{l_1-1} (-1)^{p+s} \frac{2(l_1-p)+1}{K} \int_d^\infty x_{l_1-p}(k_2 r) y_{l_1-p}(k_1 r) r^2 dr. \quad (6)$$

Здесь  $x_l(kr) = j_l(kr), n_l(kr); y_l(kr) = j_l(kr), n_l(kr); g = 0, t = 1$  при нечетных  $l_1, g = 1, t = 0$  при четных  $l_1; s = 0$  для  $l_2 = l_1 + 1 (l_1 \geq 1), s = 1$  для  $l_2 = l_1 - 1 (l_1 \geq 2); K = k_1$  при нечетных  $p, K = k_2$  при четных  $p$ .

Для интегралов, стоящих под знаком суммы в (6), можно провести дальнейшее разложение с использова-

нием рекуррентного соотношения (5)

$$\int_d^\infty x_l(k_2 r) y_l(k_1 r) r^2 dr = \int_d^\infty x_s(k_2 r) y_s(k_1 r) r^2 dr + \frac{1}{k_1 k_2} \sum_{\substack{p=1 \\ (\Delta p=2)}}^{l-1} (2(l-p)+1)^2 C_{l-p} - \left[ \frac{1}{k_1^2} + \frac{1}{k_2^2} \right] \times \sum_{\substack{p=2 \\ (\Delta p=2)}}^{l-1} (2(l-p)+1) C_{l-p} \sum_{\substack{q=1 \\ (\Delta q=2)}}^{p-1} (2(l-q)+1) + \frac{2}{k_1 k_2} \sum_{\substack{p=3 \\ (\Delta p=2)}}^{l-1} (2(l-p)+1) C_{l-p} \sum_{\substack{q=1 \\ (\Delta q=2)}}^{p-2} (2(l-q)+1) + (-1)^{l+1} \left[ \frac{1}{Q_1} \int_d^\infty x_1(k_2 r) y_0(k_1 r) r dr + \frac{1}{Q_2} \int_d^\infty x_0(k_2 r) y_1(k_1 r) r dr \right] \sum_{\substack{p=1 \\ (\Delta p=2)}}^{l-1} (2(l-p)+1). \quad (7)$$

Здесь  $s = 1, Q_1 = k_1, Q_2 = k_2$  для нечетных  $l$  и  $s = 0, Q_1 = k_2, Q_2 = k_1$  для четных  $l$ ,

$$C_{l-p} = \int_d^\infty x_{l-p}(k_2 r) y_{l-p}(k_1 r) dr.$$

1.1. Вычисление  $I_1$ . Представим  $I_1$  и соответствующие интегралы, входящие в (6), в виде  $\int_d^\infty = \int_0^\infty - \int_0^d$ .

Аналогично (6) имеем

$$\int_0^\infty j_{l_2}(k_2 r) j_{l_1}(k_1 r) r^3 dr = (-1)^{t+s} \int_0^\infty j_g(k_2 r) j_t(k_1 r) r^3 dr + \sum_{p=s}^{l_1-1} (-1)^{p+s} \frac{2(l_1-p)+1}{K} \int_0^\infty j_{l_1-p}(k_2 r) j_{l_1-p}(k_1 r) r^2 dr, \quad (8)$$

где  $g$  и  $t$  принимают значения 0 или 1 (см. комментарии к формуле (6)).

Используя явные выражения [23]

$$j_0(kr) = \frac{\sin kr}{kr},$$

$$j_1(kr) = \frac{\sin kr}{(kr)^2} - \frac{\cos kr}{kr},$$

легко показать, что для любых  $k_1$  и  $k_2$

$$\int_0^\infty j_1(k_2 r) j_0(k_1 r) r^3 dr = 0.$$

Согласно соотношению [24],

$$\int_0^{\infty} j_l(k_2 r) j_l(k_1 r) r^2 dr = \frac{\pi}{2k_1^2} \delta(k_1 - k_2),$$

для любого  $l$  при  $k_1 \neq k_2$  имеем

$$\int_0^{\infty} j_l(k_2 r) j_l(k_1 r) r^2 dr = 0.$$

Таким образом, правая часть выражения (8) равна нулю и  $I_1$  сводится к интегралу, который может быть легко получен численно

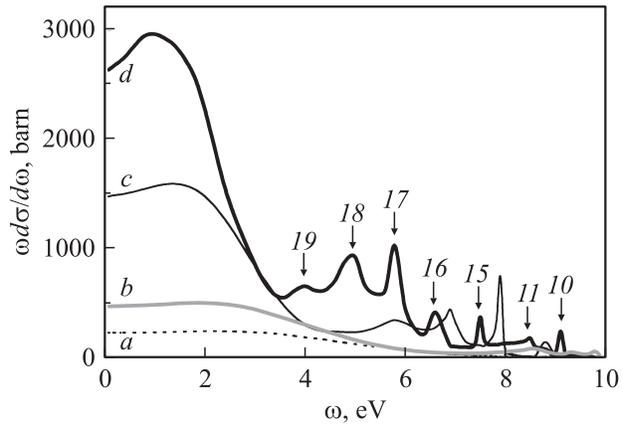
$$I_1 = - \int_0^d j_{l_2}(k_2 r) j_{l_1}(k_1 r) r^3 dr.$$

1.2. Вычисление  $I_2$ ,  $I_3$  и  $I_4$ . Для вычисления  $I_2$ ,  $I_3$  и  $I_4$  необходимо использовать выражения (6)–(7). Все интегралы, входящие в эти формулы, сходятся и могут быть получены с помощью традиционных численных и аналитических методик [23,25].

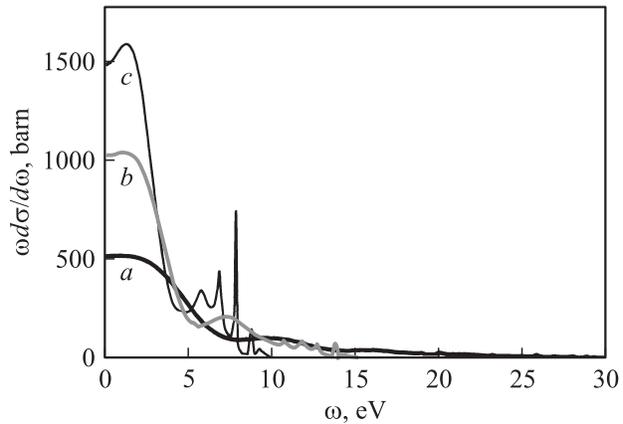
## 2. Результаты

Данный подход был применен для расчета сечения ТИ электрона на кластерах Na ( $r_s = 3.98a_0$ ), содержащих „магическое“ количество атомов. Хотя нашей целью является исследование сечения ТИ электронов с энергией ниже энергии возбуждения поверхностных плазменных колебаний (для кластеров натрия это область энергий ниже 3 eV), вначале полезно рассмотреть более широкий диапазон энергий налетающих электронов и излучаемых фотонов. На рис. 1 представлены спектральные зависимости сечения статического ТИ электрона с начальной энергией 10 eV для разных размеров кластера-мишени  $Na_N$  ( $N = 8, 20, 92$  и  $196$ ). Расчет проводился с шагом  $\Delta\omega = 0.1$  eV. Как и следовало ожидать, в целом увеличение размера кластера приводит к росту сечения ТИ. С увеличением  $\omega$  сечения вначале изменяются слабо, затем резко спадают, и появляются осцилляции, число которых растет с размером кластера. Относительно большое сечение ТИ при малых энергиях излучаемых фотонов связано с большим перекрытием волновых функций электрона до и после излучения. С увеличением  $\omega$  различие между волновыми функциями электрона до и после излучения растет, перекрытие между ними уменьшается, уменьшается величина матричного элемента (2) и сечения (1).

На рис. 2 показано, как зависят спектры статического ТИ от энергии налетающего электрона. Представлены сечения ТИ электрона с начальными энергиями  $E_1 = 10, 15$  и  $30$  eV при рассеянии на кластере  $Na_{92}$ . Видно, что с увеличением энергии налетающего электрона осцилляции на спектральной зависимости сглаживаются и уже

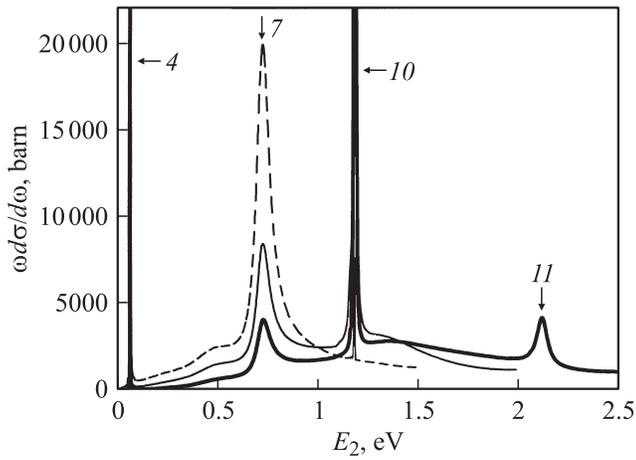


**Рис. 1.** Спектральные зависимости сечения статического тормозного излучения электрона с начальной энергией  $E_1 = 10$  eV при рассеянии на кластерах натрия, содержащих 8 (a), 20 (b), 92 (c) и 196 (d) атомов. Шаг  $\Delta\omega = 0.1$  eV. Для кластера  $Na_{196}$  стрелками отмечены резонансы и указаны орбитальные состояния  $l_2$  налетающих электронов (после излучения), испытывающих резонансное рассеяние.

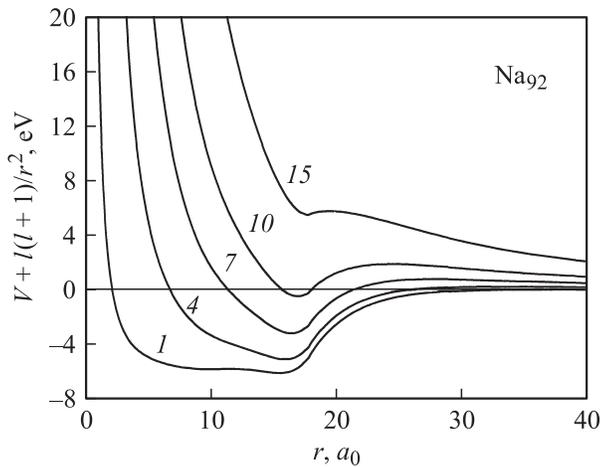


**Рис. 2.** Спектральные зависимости сечения статического тормозного излучения электрона с начальной энергией  $E_1 = 30$  (a), 15 (b) и 10 eV (c) при рассеянии на кластере  $Na_{92}$ . Шаг  $\Delta\omega = 0.1$  eV.

при  $E_1 = 30$  eV практически незаметны. Это означает, что для быстрых электронов спектральная зависимость сечения статического ТИ должна быть гладкой. Напротив, для медленных электронов осцилляции будут ярко выражены. Как показали расчеты, резонансы в сечении ТИ появляются при определенных энергиях электрона после излучения. На рис. 3 представлены сечения ТИ электрона с начальной энергией  $E_1 = 1.5, 2.0$  и  $2.5$  eV при рассеянии на кластере  $Na_{92}$  в зависимости от энергии электрона  $E_2 = E_1 - \omega$  после излучения (с шагом  $\Delta E_2 = 0.001$  eV). Положения пиков на всех кривых совпадают. Анализ полученных результатов показал, что пики в спектрах связаны с переходом через  $\pi/2$  фазовых сдвигов  $\delta_{l_2}$  электрона после излучения в поле кластера. Согласно теории рассеяния, переход



**Рис. 3.** Сечение статического тормозного излучения электрона с начальной энергией  $E_1 = 1.5$  eV (штриховая кривая), 2.0 eV (тонкая сплошная кривая) и 2.5 eV (жирная сплошная кривая) при рассеянии на кластере  $\text{Na}_{92}$  в зависимости от энергии электрона  $E_2$  после излучения. Шаг  $\Delta E_2 = 0.001$  eV. Стрелками отмечены резонансы и указаны орбитальные состояния  $l_2$  налетающих электронов (после излучения), испытывающих резонансное рассеяние.



**Рис. 4.** Одноэлектронный потенциал кластера-желе  $\text{Na}_{92}$  с учетом центробежного члена при некоторых орбитальных квантовых числах  $l$ . Цифрами вблизи кривых указаны соответствующие значения  $l$ . Радиус кластера  $R = 17.97a_0$ .

фазы электрона при рассеянии через  $\pi/2$  означает, что электрон с данной энергией и данным орбитальным моментом может образовывать с мишенью квазистационарное состояние. Таким образом, после торможения электрона, сопровождаемого излучением, может происходить захват электрона на квазистационарный уровень, и это приводит к появлению резонанса в сечении ТИ. Очевидно, что каждый металлический кластер имеет свой собственный спектр возможных квазистационарных состояний. Поэтому резонансы в сечениях ТИ наблюдаются только при определенных энергиях электрона  $E_2$ . Для кластера  $\text{Na}_{196}$  на рис. 1 и для кластера

$\text{Na}_{92}$  на рис. 3 стрелками отмечены пики в спектрах ТИ и указаны орбитальные числа электронов (после излучения), фазы которых при данных резонансных энергиях  $E_2$  переходят через  $\pi/2$ . Вклад матричных элементов (2) с участием этих электронов в величину сечения (1) вблизи пиков превышает суммарный вклад всех остальных электронных состояний. Из рисунков видно, что орбитальные квантовые числа состояний, испытывающих резонансное рассеяние, увеличиваются с увеличением  $E_2$  и для каждого кластера-мишени имеют определенное ограничение сверху и снизу. На рис. 4 представлен потенциал  $V(r) + \frac{l(l+1)}{r^2}$  при разных  $l$  для кластера  $\text{Na}_{92}$ . С увеличением  $l$  потенциальная яма поднимается и, следовательно, возрастает энергия возможных квазистационарных состояний. Наличие минимального значения  $l_2^{\min}$ , для которого возможно резонансное рассеяние, связано с очень низкой высотой или отсутствием положительного барьера у потенциала системы при  $l_2 < l_2^{\min}$ , так что в потенциальной яме нет разрешенных состояний с положительной энергией. При  $l_2 > l_2^{\max}$  потенциал имеет настолько мелкую яму, либо не имеет ее вообще, что не может содержать каких-либо состояний.

На рис. 3 для кластера  $\text{Na}_{92}$  видно, что резонансы при разных  $E_2$  имеют разную полуширину  $\Gamma$ , но для каждого конкретного резонансного значения  $E_2$  величина  $\Gamma$  практически не зависит от  $E_1$  (хотя высота пика изменяется). По величине  $\Gamma$  можно оценить время жизни квазистационарного состояния системы „кластер плюс электрон“, используя соотношение неопределенности  $\tau = \hbar/\Gamma$ . Например (рис. 3), для резонансов при  $E_2 \approx 0.73$  eV ( $l_2 = 7$ ) и  $E_2 \approx 2.12$  eV ( $l_2 = 11$ )  $\Gamma \sim 0.1$  eV, что соответствует времени жизни  $\tau \sim 10^{-14}$  s. По порядку величины это время сопоставимо со временем пролета электрона с энергией 1 eV через зону действия поля кластера. Время жизни квазистационарных состояний, которым соответствуют резонансы при  $E_2 \approx 0.065$  и 1.185 eV ( $l_2 = 4$  и 10 соответственно) на два порядка больше.

В заключение отметим, что представленная методика численного расчета сечения статического ТИ на короткодействующем сферически-симметричном потенциале позволяет корректно учитывать вклад всех орбитальных состояний налетающего электрона. При исследовании ТИ медленных электронов на металлических кластерах это является важным моментом, поскольку сечения ТИ содержат пики, обусловленные резонансным рассеянием электронов в состояниях с достаточно большими орбитальными квантовыми числами. Резонансы возникают при определенных для каждого кластера энергиях электрона после излучения и связаны с захватом электрона на квазистационарные уровни. Ширина резонансов (время жизни квазистационарных состояний) не зависит от первоначальной энергии налетающего электрона  $E_1$ . Однако интенсивность резонансных пиков уменьшается при увеличении  $E_1$ , так что для быстрых электронов сечение статического ТИ должно быть гладким.

## Список литературы

- [1] Поляризационное тормозное излучение частиц и атомов / Под ред. В.Н. Цытовича, И.М. Ойрингеля. Наука, М. (1987). 336 с.
- [2] В.А. Астапенко, Л.А. Буреева, В.С. Лисица. УФН **172**, 2 (2002).
- [3] W. Ekardt. Phys. Rev. B **31**, 10, 6360 (1985).
- [4] D.E. Beck. Phys. Rev. B **35**, 14 7325 (1987).
- [5] K. Selby, V. Kresin, J. Masui, M. Vollmer, W.A. de Heer, A. Scheidemann, W.D. Knight. Phys. Rev. B **43**, 6, 4565 (1991).
- [6] L.I. Kurkina, O.V. Farberovich. Phys. Rev. B **54**, 20, 14 791 (1996).
- [7] J.P. Connerade, A.V. Solov'yov. J. Phys. B **29**, 15, 3529 (1996).
- [8] A.V. Korol, A.V. Solov'yov. J. Phys. B **30**, 5, 1105 (1997).
- [9] L.G. Gerchikov, A.N. Ipatov, A.V. Solov'yov. J. Phys. B **31**, 10, 2331 (1998).
- [10] О.Б. Фирсов, М.И. Чибисов. ЖЭТФ **39**, 6, 1770 (1960).
- [11] T. Ohmura, H. Ohmura. Phys. Rev. **121**, 2, 513 (1961).
- [12] J.L. Stille, J. Callaway. Astrophys. J. **160**, 4, 245 (1970).
- [13] H.K. Tseng, R.H. Pratt. Phys. Rev. A **3**, 1, 100 (1971).
- [14] M.S. Pindzola, H.P. Kelly. Phys. Rev. A **14**, 1, 204 (1976).
- [15] M. Aymar, M. Crance. J. Phys. B **13**, 9, L287 (1980).
- [16] J. Vackář, A. Šimůnek, O. Šipr. Comput. Phys. Commun. **66**, 2–3, 259 (1991).
- [17] A.V. Korol, A.G. Lyalin, A.V. Solov'yov. J. Phys. B **28**, 22, 4947 (1995).
- [18] C.D. Shaffer, R.H. Pratt, S.D. Oh. Phys. Rev. A **57**, 1, 227 (1998).
- [19] В.Б. Берестецкий, Е.М. Лифшиц, Л.П. Питаевский. Квантовая электродинамика. Наука, М. (1989). 728 с.
- [20] В.П. Крайнов, Б.М. Смирнов. Излучательные процессы в атомной физике. Высш. шк., М. (1983). 288 с.
- [21] Теория неоднородного электронного газа / Под ред. Н. Марча, С. Лундквиста. Мир, М. (1987). 400 с. [Theory of the Inhomogeneous Electron Gas / Ed. by S. Lundqvist, N.H. March. Plenum Press, N.Y. (1983)].
- [22] S.H. Vosko, L. Wilk, M. Nusair. Can. J. Phys. **58**, 8, 1200 (1980).
- [23] Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стиган. Наука, М. (1979). 832 с. [Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs and Mathematical Tables / Ed. by M. Abramowitz, I.A. Stegun. National Bureau of Standards Applied Mathematics, Washington (1964)].
- [24] I.P. Grant, H.M. Quiney. J. Phys. A **26**, 24, 7547 (1993).
- [25] И.С. Градштейн, И.М. Рыжик. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Гос. Изд-во физ.-мат. лит-ры, М. (1962). 1100 с.