

03

## Излучение электромагнитных волн незаряженной каплей, осциллирующей в электростатическом поле

© С.О. Ширяева, Н.Ю. Колбнева, А.И. Григорьев, Т.К. Артёмова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Россия, Ярославль  
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 9 июля 2014 г.)

Выведено дисперсионное уравнение для осцилляций незаряженной сферической капли проводящей жидкости в однородном электростатическом поле с учетом потерь на излучение электромагнитных волн. Показано, что такая капля излучает электромагнитные волны. Проведена оценка интенсивности электромагнитного излучения и ширины полосы его частот в зависимости от размеров капли и напряженности внешнего поля для отдельной капли и для облака.

### Введение

Вопросы, связанные с наличием электромагнитного излучения от осциллирующих облачных и дождевых капель, представляют интерес как в связи с проблемой радиопомех от огней Св. Эльма [1,2] (иногда появляющихся на обшивке самолетов), так и в связи с проблемами радиолокационного зондирования метеорологических объектов [3–7]. Сама проблема расчета интенсивности электромагнитного излучения от колеблющейся заряженной капли аналитическими теоретическими средствами была сформулирована в [6], там же были приведены первые оценки применительно к конвективным облакам, повторенные и исправленные впоследствии в работе [8]. Очевидно, что таким же методом, что был использован в [6–9], можно исследовать и электромагнитное излучение от осциллирующей в электростатическом поле незаряженной капли, что актуально в связи с вышеупомянутыми проблемами.

Следует отметить, что вопрос о расчете осцилляций и устойчивости по отношению к индуцированному заряду сферической незаряженной капли в однородном электростатическом поле не нов. Он неоднократно рассматривался как в линейной, так и в нелинейной постановках (см., например, [10–13]). Но электромагнитное излучение от такой капли никто не изучал. Этой проблеме и посвящена настоящая работа. Все рассмотрение проведем аналогично [6–9].

### Постановка задачи

Пусть незаряженная сферическая капля радиуса  $R$  идеальной несжимаемой идеально проводящей жидкости с плотностью  $\rho_1$ , коэффициентом поверхностного натяжения  $\sigma$  находится в идеальной несжимаемой среде с проницаемостью  $\epsilon_{ex}$  и плотностью  $\rho_2$  в однородном постоянном электрическом поле напряженностью  $E_0$ .

Ограничим рассмотрение осесимметричными капиллярными осцилляциями капли, что существенно умень-

шит громоздкость математических выкладок, но не отразится на общности рассуждений.

Будем решать задачу в сферической системе координат с началом в центре масс капли. Уравнение возмущенной волновым движением поверхности капли можно записать в виде

$$r(\theta, t) = r(\theta) + \xi(\theta, t),$$

где  $r(\theta)$  — равновесная форма капли,  $\xi(\theta, t)$  — капиллярное волновое возмущение поверхности капли:  $\max |\xi| \ll \min r(\theta)$ .

Предполагаем, что в жидкости существует волновое движение во всем спектре длин капиллярных волн, и имеет место искажение равновесной поверхности раздела сред весьма малой (тепловой) амплитуды с характерной высотой гребней  $\xi \propto \sqrt{\kappa T / \sigma}$ , где  $\kappa = 8.31 \cdot 10^7 \text{ erg}/(\text{mol} \cdot \text{K})$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура [14]. Эти волны порождаются уже тепловым движением молекул жидкости. При температурах порядка комнатной тепловая амплитуда для всех жидкостей меньше ангстрема.

Математическая формулировка задачи имеет вид

$$\frac{d\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t)}{dt} = -\frac{1}{\rho_j} \nabla P_j(\mathbf{r}, t), \quad \text{div } \mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t) = 0, \quad j = 1; 2,$$

$$\Delta E(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad \text{div } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{V}_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \mathbf{V}_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{E}_0 \equiv E_0 \mathbf{e}_z,$$

$$r = r(\theta) + \xi: \quad \frac{\partial F}{\partial t} + (\mathbf{V}, \nabla)F = 0;$$

$$F(r, \theta, t) \equiv r - r(\theta) - \xi(\theta, t),$$

$$P_1 - P_2 + P_E - P_\sigma = 0, \quad (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = 0. \quad (1)$$

Здесь  $\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t)$  — скорость движения жидкости в капле и среде (значением индекса  $j = 1$  пометим величины,

характеризующие каплю, а значением  $j = 2$  — аналогичные величины для внешней среды),  $P_j(\mathbf{r}, t)$  — гидродинамическое давление в жидкости и среде,  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  — напряженность электрического поля,  $\boldsymbol{\tau}$  — орт касательной к возмущенной поверхности капли,  $P_E = \epsilon_{\text{ex}} \mathbf{E}^2 / 8\pi$  — давление электрического поля,  $P_\sigma = \sigma \operatorname{div} \mathbf{n}$  — капиллярное давление. Орт нормали к поверхности капли  $\mathbf{n}$  определяется выражением

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla F}{|\nabla F|} \Big|_{F=0}.$$

Для замыкания выписанной системы введем условия неизменности полного объема (следствие несжимаемости жидкости), неподвижности центра масс, а также условие незаряженности капли

$$\int_V dV = \frac{4}{3} \pi R^3, \quad \int_V \mathbf{r} dV = 0,$$

$$V = [0 \leq r \leq r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi],$$

$$\oint_S (\mathbf{n}, \mathbf{E}) dS = 0,$$

$$S = [r = r(\theta) + \xi(\theta, t), 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi]. \quad (2)$$

### Скаляризация задачи

Движение жидкости в капле и среде будем полагать потенциальным и примем, что поля скоростей движения  $\mathbf{V}_j(\mathbf{r}, t) = \nabla \psi_j(\mathbf{r}, t)$  полностью определяются функциями гидродинамических потенциалов  $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ . Переходя к  $\psi_j(\mathbf{r}, t)$ , вместо (1), (2) получим систему

$$\Delta \psi_j(\mathbf{r}, t) = 0, \quad P_j = P_{j0} - \rho_j \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t},$$

$$\Delta \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad \operatorname{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0,$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0,$$

$$r \rightarrow \infty: \quad \psi_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \rightarrow \mathbf{E}_0 \equiv E_0 \mathbf{e}_z,$$

$$r = r(\theta) + \xi:$$

$$-\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial r} - \frac{1}{r(\theta)} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j(\mathbf{r}, t)}{\partial \theta} = 0,$$

$$P_1 - P_2 + P_E - P_\sigma = 0, \quad (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)) = 0,$$

$$\mathbf{n} = \left( \mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} [r(\theta) + \xi(\theta, t)] \right)$$

$$\times \left( 1 + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right)^2 \right)^{-1/2},$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^{r(\theta)+\xi(\theta,t)} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = \frac{4}{3} \pi R^3,$$

$$\int_0^\pi \mathbf{r}(r(\theta) + \xi(\theta, t))^2 dr \sin \theta d\theta = 0,$$

$$\int_0^\pi (\mathbf{n}, \mathbf{E})(r(\theta) + \xi(\theta, t))^2 \sin \theta d\theta = 0, \quad (3)$$

где  $\mathbf{e}_r$  и  $\mathbf{e}_\theta$  — орты сферической системы координат. В качестве малого параметра примем отношение амплитуды волнового возмущения равновесной поверхности капли к радиусу капли, и будем полагать, что в безразмерных переменных, в которых  $R = \rho = \sigma = 1$ , величины полей скоростей течения жидкостей, вызванных колебаниями поверхности, выраженные в долях характерного масштаба  $\sqrt{\sigma/\rho R^3}$ , имеют тот же порядок малости.

Искомые величины разложим по порядкам малости

$$\xi(\theta, t) = \xi^{(1)}(\theta, t) + O(\xi^2),$$

$$P_j(\mathbf{r}, t) = P_j^{(0)}(\mathbf{r}, t) + P_j^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\xi^2),$$

$$\psi_j(\mathbf{r}, t) = \psi_j^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \psi_j^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\xi^2),$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) + O(\xi^2), \quad (4)$$

$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = -\nabla \Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$ , где  $\Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$  — электрический потенциал нулевого порядка малости. В (4) верхний индекс означает порядок малости. Подставляя (4) в (3), выделим задачу нулевого порядка для нахождения равновесной формы поверхности капли и задачу первого порядка для анализа ее устойчивости.

### Задача нулевого порядка малости. Равновесная форма капли в электростатическом поле

Представим форму образующей, вращением которой вокруг оси  $OZ$  получается равновесная форма поверхности капли, в сферических координатах в виде ряда по полиномам Лежандра

$$r(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n P_n(\mu), \quad \mu \equiv \cos \theta.$$

Условия постоянства объема капли и сохранения положения ее центра масс накладывают ограничения на значения индекса  $n$  в выражении для образующей равновесной поверхности. В результате запишем  $r(\theta)$  в виде

$$r(\theta) = R + h(\theta), \quad h(\theta) \equiv \sum_{n=2}^{\infty} \beta_n P_n(\mu). \quad (5)$$

Для нахождения равновесной формы капли  $r(\theta)$  понадобится выражение для давления электростатического поля в окрестности сферической капли и давления

капиллярных сил на поверхность, получающуюся вращением (5).

Распределение электростатического поля в окрестности сферической капли, вызывающего искажение сферической формы, определяется из решения краевой задачи для  $\Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)$

$$\Delta\Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow -E_0 r \cos \theta,$$

$$\Phi^{(0)}(\mathbf{r}, t)|_{r=R} = \text{const.}$$

Решение хорошо известно

$$\Phi^{(0)} = E_0 r \left( \frac{R^3}{r^3} - 1 \right) P_1(\mu).$$

Тогда

$$P_E^{(0)} = \frac{3\varepsilon_{\text{ex}}}{8\pi} E_0^2 (1 + 2P_2(\cos \theta)).$$

Видно, что это давление не обладает центральной симметрией, но осесимметрично. Значит, это давление будет вытягивать каплю так, что ее форма опишется выражением типа (5).

Для невозмущенной волновым движением капли, имеющей образующую (5), вектор нормали будет иметь вид

$$\mathbf{n}_0 = \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial h(\theta)}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta.$$

Тогда в нулевом порядке малости для капиллярного давления  $P_\sigma^{(0)}$  получим

$$P_\sigma^{(0)} = \sigma \left[ \frac{2}{R} + \frac{1}{R^2} (n-1)(n+2)h(\theta) \right],$$

где функция  $h(\theta)$  определена (5) лишь в общем виде, и наша задача сводится к нахождению явного вида коэффициентов  $\beta_n$ , при которых выполняется баланс давлений нулевого порядка малости:

$$P_1 - P_2 + \frac{3\varepsilon_{\text{ex}}}{8\pi} E_0^2 (1 + 2P_2(\cos \theta)) - \sigma \left[ \frac{2}{R} + \frac{1}{R^2} (n-1)(n+2)h(\theta) \right] = 0.$$

Подставляя сюда выражение (5) для  $h(\theta)$  и пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра, приравняем коэффициенты при полиномах одинакового порядка, и получим  $\beta_n$ :

$$P_1 - P_2 = \frac{2\sigma}{R} - \frac{1}{3R} e^2, \quad \beta_2 = e^2 \frac{R}{3}, \quad \beta_n = 0, \quad n \geq 3,$$

$$e^2 \equiv \frac{9\varepsilon_{\text{ex}} E_0^2 R}{16\pi\sigma} \equiv \frac{9w}{16\pi}, \quad w \equiv \frac{\varepsilon_{\text{ex}} E_0^2 R}{\sigma}. \quad (6)$$

Записывая с учетом коэффициентов  $\beta_n$  выражение для формы равновесной поверхности капли, получим уравнение, совпадающее с точностью до  $e^2$  с уравнением вытянутого сфероида с квадратом эксцентриситета (6)

$$r(\theta) = R \left( 1 + e^2 \frac{1}{3} P_2(\mu) \right). \quad (7)$$

Полученный результат в точности согласуется с [11,15].

## Задача первого порядка малости. Вывод дисперсионного уравнения

Математическая формулировка гидродинамической части задачи имеет вид

$$\Delta\psi_j = 0 \quad (j = 1, 2),$$

$$r \rightarrow 0: \quad \psi_1(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow \infty: \quad \psi_2(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0,$$

$$r = r(\theta): \quad P_1^{(1)} - P_2^{(1)} + P_E^{(1)} - P_\sigma^{(1)} = 0,$$

$$-\frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial r} - \frac{1}{r(\theta)} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial \theta} = 0,$$

$$\int_0^\pi r^2(\theta) \xi(\theta, t) \sin \theta d\theta = 0,$$

$$\int_0^\pi r^3(\theta) \xi(\theta, t) \cos \theta \sin \theta d\theta = 0.$$

Расчет напряженности электрического поля, необходимой для определения давления  $P_E$ , выделяется в отдельную задачу, как это было продемонстрировано в [8]:

$$\text{div} \mathbf{E}^{(1)} = 0, \quad \Delta \mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}^{(1)}}{\partial t^2},$$

с граничными и интегральными условиями

$$r \rightarrow \infty: \quad \mathbf{E}^{(1)} \rightarrow 0,$$

$$r = r(\theta): \quad (\boldsymbol{\tau}, \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t)) = 0, \quad \oint_S (\mathbf{n}, \mathbf{E}^{(1)}) dS = 0.$$

Выражения для поправок первого порядка малости к давлениям гидродинамическому и капиллярных сил имеют вид

$$r = r(\theta): \quad P_j^{(1)} = -\rho_j \frac{\partial \psi_j(r, \theta, t)}{\partial t}, \quad P_\sigma^{(1)} = \sigma \text{div} \mathbf{n}_1.$$

Орт нормали к возмущенной поверхности капли в первом порядке малости определяется выражением

$$\mathbf{n}_1 = \left( 1 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial r(\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial \xi(\theta, t)}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (r(\theta) + \xi(\theta, t)) \mathbf{e}_\theta.$$

Тогда для капиллярного давления первого порядка малости несложно получить

$$P_\sigma^{(1)} = \sigma \left[ -\frac{1}{R} \left( 1 - 2 \frac{h(\theta)}{R} \right) (2 + \hat{L}) \frac{\xi}{R} + \frac{2\xi}{R^2} \hat{L} \frac{h(\theta)}{R} \right],$$

$$\hat{L} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right).$$

Представим возмущение поверхности капли  $\xi(\theta, t)$ , связанное с капиллярным волновым движением, в виде ряда по полиномам Лежандра

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\mu), \quad \alpha_n(t) = \alpha_n \exp(-i\omega_n t), \quad (8)$$

$\omega_n$  — частота капиллярных колебаний поверхности, в общем случае комплексная,  $\alpha_n$  — амплитуда. С учетом (8) капиллярное давление первого порядка малости  $P_\sigma^{(1)}$  можно привести к виду

$$P_\sigma^{(1)} = \frac{\sigma}{R^2} \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) \times \left[ Q_{n1} \alpha_n - \frac{2}{3} e^2 (Q_{n2} \alpha_n + Q_{n3} \alpha_{n+2} + Q_{n4} \alpha_{n-2}) \right] P_n(\mu), \quad (9)$$

где

$$Q_{n1} = (n-1)(n+2), \quad Q_{n2} = (4+n(n+1))K_{2,n,n},$$

$$K_{l,m,n} = [C_{l0,m0}^{n0}]^2, \quad Q_{n3} = (4+(n+2)(n+3))K_{2,n+2,n},$$

$$Q_{n4} = \gamma_3(4\gamma_2 + (n-2)(n-1)K_{2,n-2,n}), \quad \gamma_m = 1 - \delta_{nm},$$

$C_{lk,mp}^{nq}$  — коэффициенты Клебша–Гордана [16],  $\delta_{nm}$  — дельта-символ Кронекера.

Гидродинамические потенциалы, являющиеся решениями уравнений Лапласа, после удовлетворения кинематическому граничному условию получим в виде

$$\psi_1(\mathbf{r}, t) = R \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n \exp(-i\omega_n t) \left\{ i\omega_n \alpha_n \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{3} e^2 T_{na}\right) + \frac{1}{3} e^2 (i\omega_{n+2} \alpha_{n+2} T_{na}^+ + i\omega_{n-2} \alpha_{n-2} T_{na}^-) \right\} P_n(\mu),$$

$$\psi_2(\mathbf{r}, t) = R \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} \exp(-i\omega_n t) \times \left\{ i\omega_n \alpha_n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{3} e^2 T_{nb}\right) + \frac{1}{3} e^2 (i\omega_{n+2} \alpha_{n+2} T_{nb}^+ + i\omega_{n-2} \alpha_{n-2} T_{nb}^-) \right\} P_n(\mu),$$

$$T_{na} = \frac{1}{n} \left( (n-1)K_{2,n,n} - \frac{1}{n} L_{2,n,n} \right),$$

$$T_{na}^+ = \frac{1}{n} \left( (n+1)K_{2,n+2,n} - \frac{1}{(n+2)} L_{2,n+2,n} \right),$$

$$T_{na}^- = \frac{1}{n} \left( (n-3)K_{2,n-2,n} - \frac{1}{(n-2)} L_{2,n-2,n} \right),$$

$$T_{nb} = \frac{1}{(n+1)} \left( (n+2)K_{2,n,n} - \frac{1}{(n+1)} L_{2,n,n} \right),$$

$$T_{nb}^+ = \frac{1}{(n+1)} \left( (n+4)K_{2,n+2,n} - \frac{1}{(n+3)} L_{2,n+2,n} \right),$$

$$T_{nb}^- = \frac{1}{(n+1)} \left( nK_{2,n-2,n} - \frac{1}{(n-1)} L_{2,n-2,n} \right),$$

$$L_{l,m,n} = -\sqrt{l(l+1)m(m+1)} C_{l0,m0}^{n0} C_{l-1,m1}^{n0}.$$

Выражения для гидродинамических давлений  $P_1^{(1)}$  и  $P_2^{(1)}$  после решения краевых задач для потенциалов  $\psi_j(\mathbf{r}, t)$  представимы в виде

$$P_1^{(1)} = -\rho_1 R \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) \times \left( \omega_n^2 \alpha_n \left(-\frac{1}{n} + \frac{e^2}{3} (T_{na} - K_{2,n,n})\right) + \frac{e^2}{3} (\omega_{n+2}^2 \alpha_{n+2} (T_{na}^+ - K_{2,n+2,n}) + \omega_{n-2}^2 \alpha_{n-2} (T_{na}^- - \gamma_2 \gamma_3 K_{2,n-2,n})) \right) P_n(\mu),$$

$$P_2^{(1)} = -\rho_2 R \sum_{n=2}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) \times \left( \omega_n^2 \alpha_n \left(\frac{1}{n+1} + \frac{e^2}{3} (T_{nb} - K_{2,n,n})\right) + \frac{e^2}{3} (\omega_{n+2}^2 \alpha_{n+2} (T_{nb}^+ - K_{2,n+2,n}) + \omega_{n-2}^2 \alpha_{n-2} (T_{nb}^- - \gamma_2 \gamma_3 K_{2,n-2,n})) \right) P_n(\mu). \quad (10)$$

Для дальнейшего используем выражение для напряженности электростатического поля в окрестности сферической капли, справедливое с точностью до произведения квадрата эксцентриситета на модуль возмущения поверхности  $|\xi(\theta, t)|$ :

$$\mathbf{E} \approx \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)},$$

$$\mathbf{E}^{(0)} = E_0 \cos\theta \left(1 + 2\frac{R^3}{r^3}\right) \mathbf{e}_r - E_0 \sin\theta \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \mathbf{e}_\theta,$$

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = -\frac{3E_0}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) M_n \left\{ \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))|_{r=R}} \times n(n+1) P_n(\mu) \mathbf{e}_r + \frac{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))|_{r=R}} \frac{\partial P_n(\mu)}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \right\},$$

$$M_n = \gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \alpha_{n-1} \mu_{n-1}^+ + \gamma_0 \alpha_{n+1} \mu_{n+1}^-,$$

$$\mu_n^+ = \frac{n+1}{\sqrt{(2n+1)(2n+3)}}, \quad \mu_n^- = \frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}.$$

Его несложно найти, решая электрическую задачу аналогично тому, как это было проделано в [8]. Здесь  $h_n^{(2)}(kr)$  — сферическая функция Бесселя третьего рода.

Теперь можно записать электрическое давление на поверхность капли

$$P_E = \frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi} (\mathbf{E})^2 \Big|_{r=r(\theta)+\xi(\theta,t)} \approx \frac{\varepsilon_{ex}}{8\pi} (\mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)})^2 \Big|_{r=r(\theta)+\xi(\theta,t)}.$$

Его зависящая от времени часть (добавка первого порядка малости) имеет вид

$$\begin{aligned}
P_E^{(1)} = & -\frac{\varepsilon_{\text{ex}} E_0^2}{8\pi R} \sum_{n=0}^{\infty} \exp(-i\omega_n t) \left\{ \alpha_n \left( 18 \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} \right. \right. \\
& \times n(n+1)(\gamma_1 \gamma_2 \mu_n^+ K_{1,n+1,n} + \mu_n^- K_{1,n-1,n}) \\
& + 12\gamma_0 \gamma_1 (1 + 2K_{2,n,n}) \Big) + \alpha_{n+2} \left( 18 \frac{h_{n+2}^{(2)}(kr)}{\partial_r (r h_{n+2}^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} \right. \\
& \times (n+2)(n+3) \mu_{n+2}^- K_{1,n+1,n} + 24K_{2,n+2,n} \Big) \\
& + \alpha_{n-2} \left( 18 \frac{h_{n-2}^{(2)}(kr)}{\partial_r (r h_{n-2}^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} (n-1)(n-2) \gamma_0 \mu_{n-2}^- \right. \\
& \left. \left. \times K_{1,n-1,n} + 24\gamma_0 \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 K_{2,n-2,n} \right) \right\} P_n(\mu). \tag{11}
\end{aligned}$$

Подставив в динамическое граничное условие выражения (9)–(11) и пренебрегая взаимодействием различных мод осцилляций, запишем следующее уравнение:

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \exp(-i\omega_n t) \left\{ \omega_n^2 \left( -\rho_1 R \gamma_0 \gamma_1 \left( -\frac{1}{n} + \frac{e^2}{3} (T_{na} - K_{2,n,n}) \right) \right. \right. \\
& + \rho_2 R \gamma_0 \gamma_1 \left( \frac{1}{n+1} + \frac{e^2}{3} (T_{nb} - K_{2,n,n}) \right) \Big) \\
& - \frac{\varepsilon_{\text{ex}} E_0^2}{8\pi R} \left( 18 \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R} n(n+1)(\gamma_1 \gamma_2 \mu_n^+ K_{1,n+1,n} \right. \\
& + \mu_n^- K_{1,n-1,n}) + 12\gamma_0 \gamma_1 (1 + 2K_{2,n,n}) \Big) \\
& - \frac{\sigma}{R^2} \gamma_0 \gamma_1 \left( (n-1)(n+2) \right. \\
& \left. \left. - \frac{2}{3} e^2 (4 + n(n+1)) K_{2,n,n} \right) \right\} P_n(\mu) = 0.
\end{aligned}$$

Пользуясь ортогональностью полиномов Лежандра, потребуем обращения в нуль фигурной скобки и найдем аналитический вид  $\omega_n^2$ , выражая квадрат напряженности электростатического поля через эксцентриситет

$$\omega_n^2 = \frac{n(n+1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \frac{\sigma}{R^3} \left\{ (n-1)(n+2) + 4e^2 G(kR) S_1 + \frac{1}{3} e^2 S_2 \right\}, \tag{12}$$

$$G(kR) \equiv \frac{h_n^{(2)}(kr)}{\partial_r (r h_n^{(2)}(kr))} \Big|_{r=R},$$

$$S_1 \equiv n(n+1)(\mu_n^+ K_{1,n+1,n} + \mu_n^- K_{1,n-1,n}),$$

$$\begin{aligned}
S_2 \equiv & 2(4 + (4 - n(n+1))K_{2,n,n}) - \frac{(n-1)(n+2)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \\
& \times \left( \rho_1 \frac{(n+1)}{n} (nK_{2,n,n} + L_{2,n,n}) \right. \\
& \left. + \rho_2 \frac{n}{(n+1)} ((n+1)K_{2,n,n} - L_{2,n,n}) \right).
\end{aligned}$$

Представляя сферическую функцию Бесселя в виде степенного ряда [17]

$$h_n^{(2)}(z) = \frac{1}{z} e^{-iz} \sum_{m=0}^n i^{m+1} \frac{(2n-m)!}{(n-m)! m!} \frac{1}{(2z)^{n-m}},$$

для  $G(z)$  получим

$$\begin{aligned}
G(z) &= \frac{h_n^{(2)}(z)}{\frac{\partial (z h_n^{(2)}(z))}{\partial z}} \\
&= -\frac{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)! m!} (2iz)^m}{\sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!}{(n-m)! m!} 2^m (iz)^{m+1} + \sum_{m=0}^n \frac{(2n-m)!(n-m)}{(n-m)! m!} (2iz)^m}. \tag{13}
\end{aligned}$$

Если расписать в этом выражении суммы и выделить вещественную и мнимую части, то при малом значении  $z$  они будут иметь следующие асимптотики:

$$\text{Re}[G_n(z)] \approx -\frac{1}{n}, \quad \text{Im}[G_n(z)] \approx \left[ \frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right]^2 z^{2n+1}. \tag{14}$$

Комплексную частоту колебаний  $n$ -моды представим как  $\omega_n = \omega'_n + i\omega''_n$ , где  $\omega''_n$  — мнимая часть обусловлена затуханием колебаний из-за излучения электромагнитных волн и мала по сравнению с реальной частью ( $\omega''_n \ll \omega'_n$ ). С учетом этого в выражении для квадрата частоты колебаний сделаем замену  $\omega_n^2 \approx \omega_n'^2 + 2\omega_n' \omega_n''$ . Тогда для реальной и мнимой частей частоты из выражения (12) при малом аргументе  $kR$  получим

$$\begin{aligned}
\omega_n'^2 = & \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n+1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} \left\{ (n-1)(n+2) \right. \\
& \left. + e^2 \left( -4 \frac{S_1}{n} + \frac{1}{3} S_2 \right) \right\}, \tag{15}
\end{aligned}$$

$$\omega_n'' = \frac{\sigma}{R^3} \frac{n(n+1)}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)} 4e^2 \left[ \frac{2^n (n-1)!}{(2n)!} \right]^2 z_0^{2n+1} S_1 \frac{1}{2\omega_n'}. \tag{16}$$

Учитывая в (16), что  $z_0 = \frac{\omega'_n}{c} R$ , и подставляя выражение для реальной части частоты колебаний (15),

получим мнимую часть частоты колебаний в виде

$$\omega_n'' = 2e^2(\mu_n^+ K_{1,n+1,n} + \mu_n^- K_{1,n-1,n}) \left[ \frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 \times \frac{((n+1))^{n+2} (n(n-1)(n+2))^n}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)^{n+1}} \sigma^{n+1} c^{-2n-1} R^{-n-2}. \quad (17)$$

### Излучение электромагнитных волн

Мнимая часть  $\omega_n''$  частоты колебаний (17) определяет декремент затухания капиллярных волн  $\eta$ , таким образом

$$\eta = \frac{9}{8\pi} w (\mu_n^+ K_{1,n+1,n} + \mu_n^- K_{1,n-1,n}) \left[ \frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 \times \frac{((n+1))^{n+2} (n(n-1)(n+2))^n}{(\rho_2 n + (n+1)\rho_1)^{n+1}} \sigma^{n+1} c^{-2n-1} R^{-n-2}.$$

Поскольку жидкость принимается идеальной и механического трения нет, то появление декремента может быть связано только с потерями энергии на излучение электромагнитных волн (см. [6,8,9]).

Выражение для мощности излучения на частоте  $\omega_n$  можно записать в виде [6]

$$I = -\frac{d\vartheta_n}{dt} \equiv \eta \vartheta_n,$$

где  $\vartheta_n$  — энергия поверхностных колебаний  $n$ -й моды, которую можно на основе теоремы вириала, представить как удвоенную среднюю за период кинетическую энергию движения жидкости в капле, связанную с  $n$ -й модой, в виде [18]

$$\vartheta_n = \frac{2\pi R^3 \rho_1 \omega_n^2 \alpha_n^2}{n(2n+1)}.$$

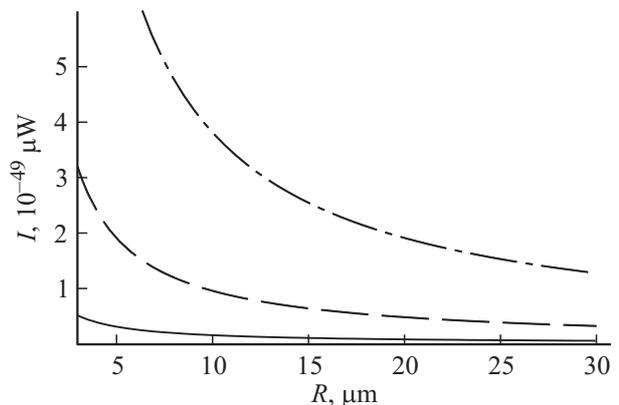
В итоге для интенсивности электромагнитного излучения от единичной колеблющейся незаряженной капли идеальной жидкости получим выражение

$$I = \frac{9}{4} \frac{n^n (n+1)^{n+3} ((n-1)(n+2))^{n+1}}{(\rho_2 n + \rho_1 (n+1))^{n+2} (2n+1)} (\mu_n^+ K_{1,n+1,n} + \mu_n^- K_{1,n-1,n}) \left[ \frac{1}{(2n-1)!!} \right]^2 w \frac{\rho_1 \sigma^{n+2}}{c^{2n+1} R^{n+2}} \alpha_n^2. \quad (18)$$

Возможный источник облачного электромагнитного излучения связан с осцилляциями мелких капель из диапазона наиболее часто встречающихся в облаке размеров от 3 до 30  $\mu\text{m}$ . Концентрация  $n$  таких капель в облаке  $\sim 10^3 \text{ cm}^{-3}$  [19,20]. Осцилляции облачных капель могут быть вызваны различными причинами: коагуляцией, дроблением на более мелкие в результате столкновительных процессов или в результате реализации электростатической неустойчивости, гидродинамическим и

электрическим взаимодействиям и близко пролетающих каплей; аэродинамическим взаимодействием с развитой мелкомасштабной турбулентностью, характерной для грозовых облаков. Амплитуды колебаний облачных капель, согласно данным натуральных наблюдений [4,5], могут достигать десятков процентов от радиуса капли. Иными словами, отношение  $(\alpha_n/R)$  можно принимать не зависящим от радиуса и имеющим величину порядка десятых долей единицы. При нижеследующих оценках будем принимать это отношение равным 0.1. Величина параметра  $w$  для капель в имеющихся в облаках электростатических полях, согласно [20], много меньше единицы, т.е. большая часть облачных капель весьма далека от предела неустойчивости по отношению к поляризационному заряду. В итоге при  $\rho_1 \gg \rho_2$  интенсивность электромагнитного излучения от осциллирующей облачной капли наиболее сильно зависит от номера моды  $n$  реализующихся осцилляций и их относительной амплитуды. Для численных оценок примем  $\epsilon_{\text{ex}} = 1$ ,  $n = 2$ ,  $\sigma = 73 \text{ dyn/cm}$ ,  $\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3$ ,  $\rho_2 = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ ,  $\alpha_n = 0.1R$ ,  $R = 30 \mu\text{m}$ ,  $E_0 = 5 \text{ V/cm}$ . Тогда для интенсивности излучения получим оценку  $I \approx 3 \cdot 10^{-50} \mu\text{W}$  на частоте  $\approx 100 \text{ kHz}$ . Для капли радиусом  $R = 8 \mu\text{m}$  получим значение интенсивности  $I \approx 1 \cdot 10^{-49} \mu\text{W}$  на частоте  $\approx 1 \text{ MHz}$ . При радиусе капли  $R = 3 \mu\text{m}$  излучение составляет  $I \approx 3 \cdot 10^{-49} \mu\text{W}$  на частоте  $\approx 4.5 \text{ MHz}$  (рис. 1).

Интенсивность электромагнитного излучения из объема в  $1 \text{ cm}^3$  будет примерно в тысячу раз больше и будет приходиться на полосу частот от  $\sim 100 \text{ kHz}$  до  $\sim 5 \text{ MHz}$ . Интегральная же интенсивность электромагнитного излучения из облака диаметром 2 km будет уже значительной:  $I_{\text{in}} \sim 1 \cdot 10^{-31} \mu\text{W}$ , если принять для оценки по порядку величины, что все капли имеют одинаковый

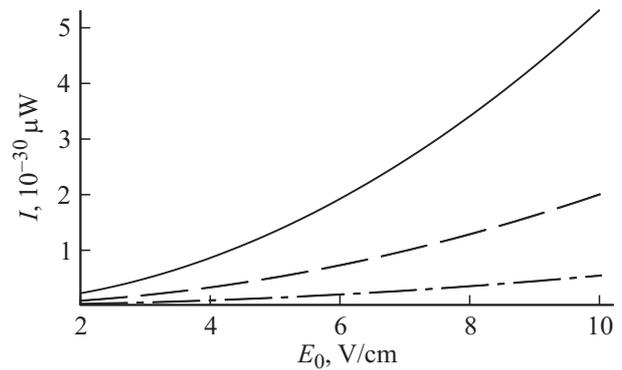


**Рис. 1.** Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной незаряженной каплей от радиуса равновесной сферической капли, рассчитанные при  $\epsilon_{\text{ex}} = 1$ ,  $n = 2$ ,  $\sigma = 73 \text{ dyn/cm}$ ,  $\rho_1 = 1 \text{ g/cm}^3$ ,  $\rho_2 = 1.3 \cdot 10^{-3} \text{ g/cm}^3$ ,  $\alpha_n = 0.1R$ . Сплошная линия соответствует  $E_0 = 2 \text{ V/cm}$ , штриховая линия соответствует  $E_0 = 5 \text{ V/cm}$ , штрихпунктирная линия соответствует  $E_0 = 10 \text{ V/cm}$ .

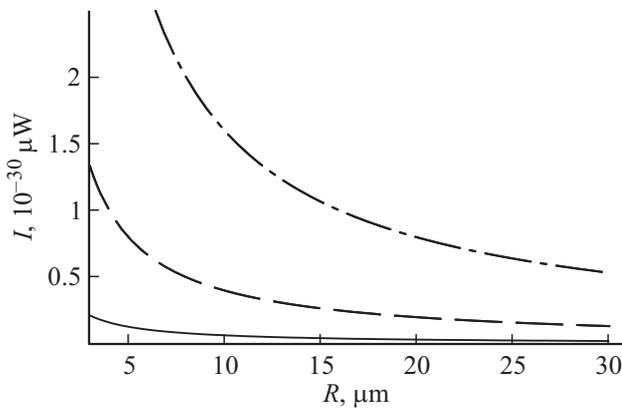
размер  $R = 30 \mu\text{m}$ . При радиусе  $R = 8 \mu\text{m}$  интегральная интенсивность составит  $I_{\text{in}} \sim 5 \cdot 10^{-31} \mu\text{W}$ , а для каплей радиусом  $R = 3 \mu\text{m}$   $I_{\text{in}} \sim 1 \cdot 10^{-30} \mu\text{W}$  (рис. 2). В проведенной оценке мы принимали, что осцилляции всех капель связаны с основной модой  $n = 2$ .

На рис. 3, 4 приведены характеристики излучения в зависимости от напряженности электростатического внутриоблачного поля. Видно, что с увеличением напряженности интенсивность излучения быстро возрастает: при увеличении напряженности в 5 раз интенсивность излучения увеличивается на порядок.

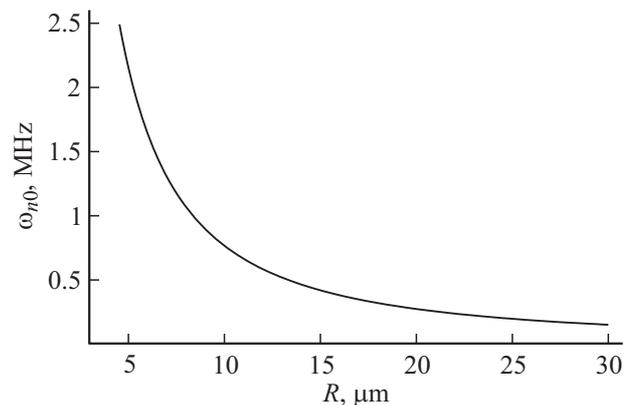
На рис. 5 приведена зависимость частоты излучения (частоты осцилляций капли) от радиуса, рассчитанная при  $E_0 = 5 \text{ V/cm}$ . Видно, что при увеличении



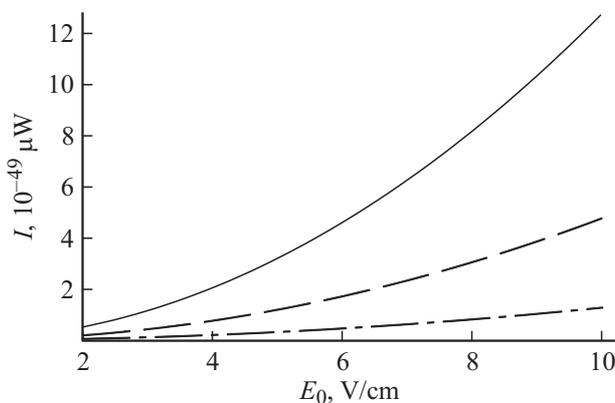
**Рис. 4.** Зависимости интегральной интенсивности электромагнитного излучения грозового облака диаметром 2 km от напряженности электростатического поля, рассчитанные при тех же значениях физических величин, что на рис. 1. Сплошная линия соответствует  $R = 3 \mu\text{m}$ , штриховая линия соответствует  $R = 8 \mu\text{m}$ , штрихпунктирная линия соответствует  $R = 30 \mu\text{m}$ .



**Рис. 2.** Зависимости интегральной интенсивности электромагнитного излучения грозового облака диаметром 2 km от радиуса единичной незаряженной равновеликой сферической капли, рассчитанные при тех же значениях физических величин, что на рис. 1. Сплошная линия соответствует  $E_0 = 2 \text{ V/cm}$ , штриховая линия соответствует  $E_0 = 5 \text{ V/cm}$ , штрихпунктирная линия соответствует  $E_0 = 10 \text{ V/cm}$ .



**Рис. 5.** Зависимости частоты электромагнитного излучения единичной незаряженной каплей от радиуса равновеликой сферической капли, рассчитанные при тех же значениях физических величин, что на рис. 1, и  $E_0 = 5 \text{ V/cm}$ .



**Рис. 3.** Зависимости интенсивности электромагнитного излучения единичной незаряженной каплей от напряженности электростатического поля, рассчитанные при тех же значениях физических величин, что на рис. 1. Сплошная линия соответствует  $R = 3 \mu\text{m}$ , штриховая линия соответствует  $R = 8 \mu\text{m}$ , штрихпунктирная линия соответствует  $R = 30 \mu\text{m}$ .

размера капли частота излучения быстро снижается. От величины напряженности электростатического поля в анализируемом случае слабых полей частота зависит крайне слабо. Результаты расчетов при  $E_0 = 2 \text{ V/cm}$  и  $E_0 = 10 \text{ V/cm}$  практически не различаются и совпадают с приведенной кривой в пределах толщины линии.

Следует отметить, что все проведенные оценки относятся к идеально проводящей жидкости, поэтому существенно завышены (по крайней мере, для воды). Для получения более реалистичных оценок следует учитывать конечную проводимость реальных жидкостей (как это проделано в [9] для заряженных капель). Такая проблема подразумевает решение задачи для вязкой жидкости, поскольку лишь в этом случае можно компенсировать возникающие из-за релаксации заряда касательные напряжения на границе раздела сред.

## Заключение

Осцилляции незаряженных капель во внешнем электростатическом поле генерируют электромагнитное излучение в широком диапазоне частот. Фоновое излучение облаков естественного происхождения может быть частично объяснено излучением электромагнитных волн при осцилляциях капель в электростатических полях.

Авторы выражают благодарность Н.А. Богатову, указавшему на ошибки в нахождении асимптотик сферических функций Бесселя третьего рода в работах [6,8,9], которые легли в основу данного расчета.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170-а и 14-08-00240-а.

## Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Синкевич О.А. // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 7. С. 1276–1283.
- [2] Григорьев А.И. Шаровая молния. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2006. 220 с.
- [3] Качурин Л.Г. Физические основы воздействия на атмосферные процессы. Л.: Гидрометеиздат, 1990. 463 с.
- [4] Стерлядкин В.В. // Изв. АН СССР. ФАО. 1988. Т. 24. № 6. С. 613–621.
- [5] Beard K.V., Tokay A.A. 1991. *Et. N 12. P. 2257–2260.*
- [6] Калечиц В.И., Нахутин И.Е., Полуэктов П.П. // ДАН СССР. 1982. Т. 262. № 6. С. 1344–1347.
- [7] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.
- [8] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Голованов А.С., Рыбакова М.В. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 8–14.
- [9] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2002. № 5. С. 74–80.
- [10] Григорьев А.И., Синкевич О.А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1985. № 6. С. 10–15.
- [11] Cheng K.J. // *Phys. Lett. A.* 1985. Vol. A112. N 11. P. 392–396.
- [12] Ширяева С.О., Волкова М.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 34–42.
- [13] Григорьев А.И., Паранин А.Р., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 9. С. 30–31.
- [14] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [15] O'Konski S.J., Thatcher H.C. // *J. Phys. Chem.* 1953. Vol. 57. P. 955–958.
- [16] Варшолович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
- [17] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
- [18] Schweizer J.D., Hanson D.N. // *J. Coll. Int. Sci.* 1971. Vol. 35. N 3. P. 417–423.
- [19] Мазин И.П., Шметер С.М. Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 280 с.
- [20] Мазин И.П., Хргиан А.Х., Имянитов И.М. Облака и облачная атмосфера. Справочник. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 647 с.