

Электрон-фононное взаимодействие в трехбарьерных наносистемах как активных элементах квантовых каскадных детекторов

© Н.В. Ткач[¶], Ю.А. Сети, Ю.Б. Гринишин

Черновицкий национальный университет им. Ю. Федьковича,
58012 Черновцы, Украина

(Получена 22 июля 2014 г. Принята к печати 3 сентября 2014 г.)

Развита теория электронного туннелирования сквозь открытую наноструктуру как активный элемент квантового каскадного детектора с учетом взаимодействия электронов с объемными и интерфейсными фононами. Методом температурных функций Грина на основе электрон-фононного гамильтониана в представлении вторичного квантования по всем переменным системы выполнен расчет температурных сдвигов и ширин электронных уровней, а также проанализированы вклады различных механизмов электрон-фононного взаимодействия в перенормировку спектральных параметров в зависимости от геометрической конфигурации наносистемы. Из-за слабой электрон-фононной связи в резонансно-туннельной наноструктуре (на основе GaAs/Al_{0,34}Ga_{0,66}As) температурный сдвиг и ширина пика поглощения высокочастотного поля мало чувствительны к электрон-фононному взаимодействию, а обусловлены уменьшением высот потенциальных барьеров из-за различных температурных зависимостей запрещенных зон ям и барьеров.

1. Введение

Со времени создания первого квантового каскадного детектора (ККД) прошло уже десять лет, но интенсивность исследований физических процессов, происходящих в такого типа наноприборах, не уменьшается [1–4]. Интерес экспериментаторов обусловлен уникальными практическими характеристиками ККД, так как они перекрывают весь инфракрасный и терагерцовый диапазон электромагнитных волн и успешно работают в широком интервале температур от криогенных до комнатных.

Физической базой функционирования ККД являются квантовые переходы между электронными квазистационарными состояниями (КСС) открытых наносистем при туннельном электронном транспорте с поглощением высокочастотного (ВЧ) электромагнитного поля. Несмотря на многочисленные экспериментальные исследования ККД [2–4], последовательной и достаточно полной теории, которая бы не только качественно описывала физические процессы, но и однозначно предлагала бы методы улучшения рабочих параметров наноприборов, пока нет.

В большинстве теоретических работ [5–10] исследованы туннельные свойства открытых многослойных наногетеросистем относительно электронного транспорта с поглощением или излучением ВЧ-поля без учета взаимодействия с фононами. Результаты этих и других подобных работ с определенной уверенностью могут использоваться для изучения физических процессов лишь в области криогенных температур, т.к. при комнатных температурах возрастают средние числа заполнения фононных состояний и из-за электрон-фононного взаимодействия можно ожидать изменений спектральных параметров пиков поглощения ВЧ поля, возникающих вследствие квантовых переходов между электронными КСС.

Анализ экспериментальных работ по ККД [1–4] показывает, что с увеличением температуры от криогенной до комнатной действительно происходит определенное красное смещение и некоторое уширение пиков поглощения ВЧ поля, но какова роль фононов или других механизмов и факторов — развитые известные нам теории не вполне (а иногда и совсем) не объясняют.

Теория электрон-фононного взаимодействия в одно- и двухъямных закрытых наносистемах развивалась в работах [11–16] на основе моделей эффективных масс электронов и модели диэлектрического континуума ограниченных (L) и интерфейсных (I) фононов. Гамильтониан электрон-фононных систем в таких моделях обычно находился в представлении фононных чисел заполнения и в координатном по электронным переменным. Затем используя золотое правило Ферми выполнялся аналитический и числовой расчеты вероятностей квантовых переходов и тех физических величин, которые непосредственно связаны с этими вероятностями. В таком подходе вне внимания исследователей оставался важный вопрос о температурных смещениях электронных уровней взаимодействием с L - и I -фононами наносистем.

Цель предлагаемой работы состоит в том, чтобы на основе модели разных эффективных масс электронов в слоях трехбарьерной резонансно-туннельной структуры (ТБРТС) и в модели диэлектрического континуума для фононов получить гамильтониан электрон-фононной системы в представлении вторичного квантования по всем переменным (фононным и электронным) с тем, чтобы используя аппарат температурных функций Грина [17], исследовать температурную перенормировку фононами параметров (сдвигов и ширин) электронного спектра. А с учетом развитой ранее [9,10] теории активной проводимости открытых ТБРТС изучить и температурные изменения спектральных параметров пиков поглощения ВЧ поля при квантовых переходах между электронными КСС. Так как в предлагаемой теории учитывается и температурное изменение высот потенциальных ба-

[¶] E-mail: ktf@chnu.edu.ua

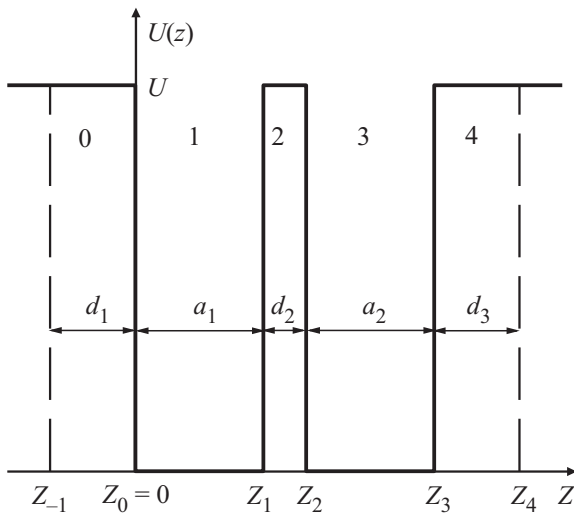


Рис. 1. Потенциальный рельеф закрытой ТБРТС. Штриховые линии указывают границы внешних барьеров открытой наносистемы с ширинами барьеров d_1 и d_3 соответственно.

рьеров из-за разной температурной зависимости ширин запрещенных зон ям и барьеров, то этот механизм температурного изменения спектральных параметров будет учитываться совместно с электрон-фононным.

2. Электронный и фононный гамильтонианы в закрытой ТБРТС в представлении вторичного квантования

Расчет энергетического спектра и волновых функций электрона в закрытой ТБРТС выполняется в модели прямоугольного потенциального рельефа, а также эффективной массы, учитывающей ее координатную зависимость и непараболичность зоны проводимости [18] (рис. 1):

$$U(z) = \begin{cases} 0, \\ U, \end{cases}$$

$$m(z) = \begin{cases} m_w(E) = m_w(1 + E/E_{gw}), & \text{в областях } 1, 3 \\ m_b(E) = m_b \left(1 - \frac{U-E}{E_{gb}}\right), & \text{в областях } 0, 2, 4 \end{cases} \quad (1)$$

Здесь m_w, m_b — массы электрона в яме и барьере без учета параболичности, E — энергия электрона; E_{gw}, E_{gb} — энергии запрещенных зон материалов ям и барьеров наносистемы.

Представляя трехмерную волновую функцию в виде

$$\Psi_{\vec{n}k}(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{S}} e^{i\vec{k}\vec{\rho}} \Psi_{\vec{n}}(z), \quad (\vec{n} = \{n, k_z\}), \quad (2)$$

где \vec{k} и $\vec{\rho}$ — квазиимпульс и радиус-вектор электрона в плоскости xOy , а S — площадь основной области, из

трехмерного уравнения Шредингера со скоррелированной по ТБРТС эффективной массой [19]

$$\frac{1}{m_{\vec{n}}} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi_{\vec{n}}(z)|^2}{m(z)} dz \quad (3)$$

получается полная энергия электрона в виде

$$E_{\vec{n}k} = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_{\vec{n}}} + E_{\vec{n}}. \quad (4)$$

Здесь первое слагаемое описывает кинетическую энергию электрона в плоскости xOy , а энергия $E_{\vec{n}}$ и волновая функция $\Psi_{\vec{n}}(z)$ определяются одномерным уравнением Шредингера

$$\left\{ -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d}{dz} \frac{1}{m(z)} \frac{d}{dz} + U(z) \right\} \Psi_{\vec{n}}(z) = E_{\vec{n}} \Psi_{\vec{n}}(z). \quad (5)$$

В области энергий $E_n \leq U$ ($\vec{n} = n$) решениями уравнения (5) являются волновые функции стационарных состояний, которые имеют вид

$$\Psi_n(z) = \sum_{j=0}^4 \Psi_{jn}(z);$$

$$\Psi_{jn}(z) = \begin{cases} A_{jn} e^{\chi_n z} + B_{jn} e^{-\chi_n z}, & j = 0, 2, 4 \\ A_{jn} \cos k_n z + B_{jn} \sin k_n z, & j = 1, 3, \end{cases} \quad (6)$$

где

$$k_n = \hbar^{-1} \sqrt{2m_w(E_n)E_n},$$

$$\chi_n = \hbar^{-1} \sqrt{2m_b(E_n)(U - E_n)}. \quad (7)$$

Как известно из квантовой механики [20], граничные условия

$$\Psi_{jn}(z)|_{z=z_j} = \Psi_{j+1n}(z)|_{z=z_j};$$

$$\frac{\partial \Psi_{jn}(z)}{m_j(z) \partial z} \Big|_{z=z_j} = \frac{\partial \Psi_{j+1n}(z)}{m_{j+1}(z) \partial z} \Big|_{z=z_j}, \quad j = 0, 1, 2, 3 \quad (8)$$

$$\Psi_n(z \rightarrow \pm\infty) \Rightarrow B_{0n} = A_{4n} = 0$$

и условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Psi_n^*(z) \Psi_{n'} dz = \delta_{nn'} \quad (9)$$

однозначно определяют волновые функции $\Psi_n(z)$ и энергетический спектр E_n электрона в связанных состояниях.

В надбарьерной области энергий ($E_{k_z} \geq U$), вводя продольный квазиимпульс k_z и энергию $E_{k_z} = \hbar^2 k_z^2 / 2m_{\vec{n}}$, для полной энергии электрона получается выражение

$$E_{\vec{k}k} = E_{k_z} + \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m_{\vec{n}}}, \quad (10)$$

а волновая функция $\Psi_{k_z}(z)$ находится из (6) заменой $k_n \rightarrow k_z$, $\chi_n \rightarrow i\chi$ с условием нормировки

$$\int_{-L/2}^{L/2} |\Psi_{k_z}(z)|^2 dz = 1, \quad (11)$$

где L — длина основной области в направлении оси Oz .

Выполнив переход от координатного представления электронного гамильтониана $H_e = T + U$ к представлению вторичного квантования с помощью квантованной волновой функции

$$\hat{\Psi}(\vec{r}) = \sum_{\vec{n}\vec{k}} \Psi_{\vec{n}\vec{k}}(\vec{\rho}, z) a_{\vec{n}\vec{k}}^{\rightarrow}, \quad (12)$$

получается гамильтониан невзаимодействующих электронов в представлении их чисел заполнения

$$\hat{H}_e = \sum_{\vec{n}\vec{k}} E_{\vec{n}\vec{k}} a_{\vec{n}\vec{k}}^{\rightarrow} a_{\vec{n}\vec{k}}^{\rightarrow\dagger} \quad (13)$$

с известным (4) электронным спектром и фермионными операторами рождения $a_{\vec{n}\vec{k}}^{\rightarrow\dagger}$ и уничтожения $a_{\vec{n}\vec{k}}^{\rightarrow}$.

Как известно [11–15], в модели диэлектрического континуума энергетический спектр фононов и их потенциал поля поляризации $\Phi(\vec{r})$ определяются уравнением

$$\varepsilon_j(\omega) \nabla^2 \Phi(\vec{r}) = 0. \quad (14)$$

Здесь для системы с бинарным составом материала j -го слоя диэлектрическая проницаемость $\varepsilon_j(\omega)$ определяется соотношением Лиддена–Сакса–Теллера

$$\varepsilon_j(\omega) = \varepsilon_{j\infty} \frac{\omega^2 - \omega_{Lj}^2}{\omega^2 - \omega_{Tj}^2}, \quad (j = 0, 1, 2, 3, 4), \quad (15)$$

где $\varepsilon_{j\infty}$ — высокочастотная диэлектрическая проницаемость, а ω_{Lj} и ω_{Tj} — частоты продольных (L) и поперечных (T) колебаний массивного аналога материала j -го слоя наносистемы.

Энергетический спектр (Ω_{Lj}) и потенциал поля поляризации $\Phi_{Lj}(\vec{r})$ ограниченных фононов получаются из уравнения (14) при условии $\nabla^2 \Phi_{Lj}(\vec{r}) \neq 0$, из-за чего $\varepsilon_j(\omega)$, т.е. $\Omega_{Lj} = \hbar\omega_{Lj}$, ($j = 0, 1, 2, 3, 4$), что и определяет спектр ограниченных фононов ТБРТС.

Раскладывая потенциал j -й среды $\Phi_{Lj}(\vec{r})$ в двухмерный ряд Фурье с коэффициентами $\Phi_{Lj\lambda}(\vec{q}, z)$, которые содержат всевозможные гармоники ($\lambda = 1, 2, \dots, \infty$)

$$\Phi_{Lj}(\vec{\rho}, z) = \sum_{\vec{\lambda}\vec{q}} \Phi_{Lj\lambda}(\vec{q}, z) e^{i\vec{q}\vec{\rho}} \quad (16)$$

с последующим переходом от фурье-компонент к нормальным координатам и импульсам, а затем к бозонным

операторам $b_{Lj\lambda\vec{q}}$, $b_{Lj\lambda\vec{q}}^{\dagger}$ за известной квантовомеханической системой [20], получается гамильтониан ограниченных фононов в представлении их чисел заполнения

$$\hat{H}_L = \sum_{j\vec{\lambda}\vec{q}} \Omega_{Lj} (b_{Lj\lambda\vec{q}}^{\dagger} b_{Lj\lambda\vec{q}} + 1/2), \quad (j = 0, 1, 2, 3, 4). \quad (17)$$

Спектр и потенциал поля интерфейсных фононов находится из уравнения (14), когда

$$\nabla^2 \Phi_1(\vec{r}) = 0. \quad (18)$$

Это уравнение имеет решением потенциал

$$\Phi_1(\vec{\rho}, z) = \sum_{j\vec{q}} C(\vec{q}) \varphi_j(\vec{q}, z) e^{i\vec{q}\vec{\rho}}, \quad (19)$$

где \vec{q} и $\vec{\rho}$ — двухмерные векторы, а функция

$$\varphi_j(\vec{q}, z) = \alpha_j e^{-qz} + \beta_j e^{qz}, \quad (j = 0, 1, 2, 3, 4)$$

удовлетворяет граничным условиям

$$\left. \begin{aligned} \varphi_j(q, z_j) &= \varphi_{j+1}(q, z) \\ \varepsilon_j(\omega) \frac{\partial \varphi_j(q, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_j} &= \varepsilon_{j+1}(\omega) \frac{\partial \varphi_{j+1}(q, z)}{\partial z} \Big|_{z=z_j} \\ \varphi_0(q, z)|_{z \rightarrow -\infty} &= \varphi_4(q, z)|_{z \rightarrow \infty} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (j = 0, 1, 2, 3). \quad (20)$$

Нетривиальное решение системы (20) методом трансфер-матрицы [13] определяет дисперсионное уравнение

$$\prod_{j=0}^3 \begin{pmatrix} \left(1 + \frac{\varepsilon_j(\omega)}{\varepsilon_{j+1}(\omega)}\right) & \left(1 - \frac{\varepsilon_j(\omega)}{\varepsilon_{j+1}(\omega)}\right) e^{-2qz_j} \\ \left(1 - \frac{\varepsilon_j(\omega)}{\varepsilon_{j+1}(\omega)}\right) e^{2qz_j} & \left(1 + \frac{\varepsilon_j(\omega)}{\varepsilon_{j+1}(\omega)}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

из которого находится спектр энергий $\Omega_{Is\vec{q}} = \hbar\omega_{Is\vec{q}}$ интерфейсных фононов ветки s с квазиимпульсом \vec{q} . В невырожденном случае максимальное количество (s_{\max}) веток равно удвоенному числу границ между слоями наносистемы.

В результате известной процедуры [20] квантования поля интерфейсных фононов получается соответствующий гамильтониан

$$\hat{H}_I = \sum_{\vec{s}\vec{q}} \Omega_{Is\vec{q}} (b_{Is\vec{q}}^{\dagger} b_{Is\vec{q}} + 1/2), \quad (s = 1 \dots s_{\max}) \quad (22)$$

в представлении вторичного квантования.

Таким образом, полный гамильтониан оптических фононов ТБРТС в представлении их чисел заполнения

$$\hat{H}_{ph} = \hat{H}_L + \hat{H}_I \quad (23)$$

оказывается вполне определенным.

3. Гамильтониан электрон-фононного взаимодействия. Электронная функция Грина

Гамильтониан электрон-фононного взаимодействия в координатном представлении определяется обоими полями поляризации (L, I)

$$H_{e-ph}(\vec{r}) = H_{e-L}(\vec{r}) + H_{e-I}(\vec{r}) = -e[\Phi_L(\vec{r}) + \Phi_I(\vec{r})]. \quad (24)$$

Поэтому после известной из квантовой механики [20] процедуры квантования фононных (L и I) полей, переход к представлению электронных чисел заполнения осуществляется с помощью электронной квантованной волновой функции (12). В результате получается гамильтониан электрон-фононного взаимодействия в представлении вторичного квантования по всем электронным и фононным переменным системы

$$\hat{H}_{e-ph} = \hat{H}_{e-L} + \hat{H}_{e-I}. \quad (25)$$

Здесь

$$\hat{H}_{e-L} = \sum_{j=0}^4 \sum_{\substack{\vec{n}_1 \vec{n} \\ \lambda, \vec{q}, \vec{k}}} F_{\vec{n}' \vec{n}}^{Lj}(\lambda, \vec{q}) a_{\vec{n}' k + \vec{q}}^+ a_{\vec{n} k}^- (b_{j\lambda, \vec{q}} + b_{j\lambda, -\vec{q}}^+) \quad (26)$$

— гамильтониан взаимодействия электронов с L -фононами с известными функциями их связи в j -м слое ТБРТС

$$F_{\vec{n}' \vec{n}}^{Lj}(\lambda, q) = \sqrt{\frac{8\pi e^2 \hbar}{S(\pi^2 \lambda^2 + q^2(z_j - z_{j-1})^2)} \left(\frac{\partial \varepsilon_j(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{Lj}} \right)^{-1}} \times \int_{z_{j-1}}^{z_j} dz \Psi_{j\vec{n}_1}^*(z) \Psi_{j\vec{n}}(z) \times \left\{ \begin{array}{l} \cos \left[\pi \lambda \left(\frac{z - z_{j-1}}{z_i - z_{i-1}} \right) - 1/2 \right], \lambda = 1, 3, 5, \dots \\ \sin \left[\pi \lambda \left(\frac{z - z_{j-1}}{z_i - z_{i-1}} \right) - 1/2 \right], \lambda = 2, 4, 6, \dots \end{array} \right\}, \quad (27)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} j = 0, 1, 2, 3, 4 \\ z_{-1} \rightarrow -\infty \\ z_4 \rightarrow \infty \end{array} \right\}.$$

Фигурирующий здесь интеграл берется аналитически, но из-за громоздкости он не приводится в явном виде.

Гамильтониан взаимодействия электронов с I -фононами

$$\hat{H}_{e-I} = \sum_{\substack{\vec{n}_1 \vec{n} \\ s, \vec{q}, \vec{k}}} F_{\vec{n}' \vec{n}}^I(s, \vec{q}) a_{\vec{n}' k + \vec{q}}^+ a_{\vec{n} k}^- (b_{s, \vec{q}} + b_{s, -\vec{q}}^+) \quad (28)$$

содержит известные функции связи

$$F_{\vec{n}' \vec{n}}^I(s, q) = -\sqrt{\frac{4\pi e^2 \hbar}{qSN(s, q)}} \times \sum_{j=0}^4 \int_{z_{j-1}}^{z_j} dz \Psi_{j\vec{n}_1}^*(z) \Psi_{j\vec{n}}(z) [\alpha_j(s, q) e^{-qz} + \beta_j(s, q) e^{qz}] \quad (29)$$

с нормировочным коэффициентом

$$N(s, q) = \sum_{j=0}^4 \frac{\partial \varepsilon_j(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega_{sq}} \times [\beta_j^2(s, q)(e^{2qz_j} - e^{2qz_{j-1}}) - \alpha_j^2(s, q)(e^{-2qz_j} - e^{-2qz_{j-1}})]. \quad (30)$$

Фигурирующие в (29) интегралы также вычисляются аналитически, но из-за громоздкости не приводятся в явном виде.

Найденный гамильтониан

$$\hat{H} = \hat{H}_e + \hat{H}_L + \hat{H}_I + \hat{H}_{e-L} + \hat{H}_{e-I} \quad (31)$$

электрон-фононной системы в ТБРТС в представлении вторичного квантования по всем переменным позволяет рассчитать фурье-образы электронных функций Грина, описывающие дискретный ($\vec{n} = n$) спектр. При конечной температуре ($T \neq 0$ К) и малых концентрациях электронов, согласно диаграммной технике Фейнмана–Пайнса [17], при слабой связи с фононами фурье-образ электронной функции Грина определяется уравнением Дайсона

$$G_n(\vec{k}, \hbar\omega) = [\hbar\omega - E_{n\vec{k}}^- - M_n(\hbar\omega, \vec{k})]^{-1} \quad (32)$$

с массовым оператором (МО) $M_n(\hbar\omega, \vec{k})$, рассчитанным в однофононном приближении с учетом дискретной ($\vec{n}_1 = n_1$) и непрерывной ($\vec{n}_1 = k_z$) областей спектра

$$M_n(\hbar\omega, \vec{k}) = \sum_{\vec{n}_1, p, \vec{q}} F_{\vec{n}_1}^*(p, q) F_{\vec{n}_1 \vec{n}}(p, q) \times \left[\frac{1 + v_{pq}}{\hbar\omega - E_{\vec{n}_1}(\vec{k} - \vec{q}) - \Omega_{pq} + i\eta} + \frac{v_{pq}}{\hbar\omega - E_{\vec{n}_1}(\vec{k} + \vec{q}) + \Omega_{pq} + i\eta} \right]. \quad (33)$$

Здесь введен обобщенный индекс фононных веток ($p = \{j, \lambda; s\}$), который при $p = j, \lambda$ нумерует все

ветки L -фононов в j -х областях ТБРТС, и тогда $F_{\vec{m}\vec{n}_1}(j, \lambda; q) \equiv F_{\vec{m}\vec{n}_1}^{Lj}(\lambda, q)$, а при $p = s$ нумеруют все I -фононные ветки, и тогда $F_{\vec{m}\vec{n}_1}(s, q) \equiv F_{\vec{m}\vec{n}_1}^I(s, q)$; величины $v_{pq} = (e^{\Omega_{pq}/kT} - 1)^{-1}$ определяют средние значения чисел заполнения фононов соответствующих веток. Следует также заметить, что первое слагаемое в МО (33) описывает физические процессы, идущие с рождением фононов соответствующих веток и квазиимпульсов, а второе — с их поглощением.

Согласно теории функций Грина [17], при слабом электрон-фононном взаимодействии дискретная часть электронного спектра (E_n) перенормируется (\tilde{E}_n) за счет сдвига Δ_n

$$\tilde{E}_n = E_n + \Delta_n = E_n + \text{Re } M_n(\hbar\omega = E_n, \vec{k} = 0) \quad (34)$$

и возникает затухание (ширина полосы)

$$\gamma_n = -2\text{Im } M_n(\hbar\omega = E_n, \vec{k} = 0). \quad (35)$$

Так как далее будут анализироваться вклады различных механизмов электрон-фононного взаимодействия в полный сдвиг (Δ_n) и затухание (γ_n), то эти параметры (в силу адитивности МО (33)) целесообразно представить в виде

$$\Delta_n = \Delta_n^L + \Delta_n^I = (\Delta_{nm}^L + \Delta_{nd}^L + \Delta_{nc}^L) + (\Delta_{nm}^I + \Delta_{nd}^I + \Delta_{nc}^I), \quad (36)$$

$$\gamma_n = \gamma_n^L + \gamma_n^I = (\gamma_{nm}^L + \gamma_{nd}^L + \gamma_{nc}^L) + (\gamma_{nm}^I + \gamma_{nd}^I + \gamma_{nc}^I), \quad (37)$$

где $\Delta_{nm}^{L,I}, \gamma_{nm}^{L,I}$ — парциальные вклады в сдвиг и затухание n -го состояния внутризонного электрон-фононного взаимодействия с L - и I -фононами системы,

$$\Delta_{nd}^{L,I} = \sum_{n_1 \neq n} \Delta_{nn_1}^{L,I}, \quad \gamma_{nd}^{L,I} = \sum_{n_1 \neq n} \gamma_{nn_1}^{L,I}$$

— парциальные вклады в Δ_n и γ_n межзонного взаимодействия с L - и I -фононами через все состояния дискретной (d) части электронного спектра, $\Delta_{nc}^{L,I} = \sum_{k_z} \Delta_{nk_z}^{L,I}$;

$\gamma_{nc}^{L,I} = \sum_{k_z} \gamma_{nk_z}^{L,I}$ — парциальные вклады в Δ_n и γ_n электрон-фононного взаимодействия через все состояния континуальной (c) части спектра.

Аналитический расчет парциальных слагаемых сдвигов и затуханий выполняется на основе соответствующих слагаемых МО (33) при переходе от суммирования по квазиимпульсу \vec{q} к интегрированию ($\sum_{\vec{q}} \Rightarrow \frac{S}{4\pi^2} \iint d^2\vec{q}$) с последующим использованием соотношения Дирака

$$\iint \frac{d^2\vec{q}}{f(\vec{q}) + i\eta} = P \iint \frac{d^2\vec{q}}{f(\vec{q})} - i\pi \iint \delta[f(\vec{q})] d^2\vec{q}, \quad (38)$$

где P — символ главного значения интегралов.

Таким способом для Δ_{nm} и γ_{nm} из (33) получаются выражения

$$\Delta_{nm} = \frac{S}{4\pi^2} \sum_{\pm, p} P \iint \frac{|F_{nm}(p, q)|^2 (v_{pq} + 1/2 \pm 1/2)}{E_n - E_{n\vec{q}} \pm \Omega_{p\vec{q}}} d^2\vec{q}, \quad (39)$$

$$\gamma_{nm} = \frac{S}{2\pi} \sum_{\pm, p} \iint |F_{nm}(p, q)|^2 \times (v_{pq} + 1/2 \pm 1/2) \delta(E_n - E_{n\vec{q}} \pm \Omega_{p\vec{q}}) d^2\vec{q}. \quad (40)$$

Поскольку L -фононы бездисперсионные, то интегрирование в (39) и (40) выполняется точно аналитически, хотя результат весьма громоздкий и потому не приводится. Расчет вкладов I -фононов из-за наличия дисперсии выполняется численным интегрированием при заданных физических параметрах ТБРТС. Остальные парциальные слагаемые смещений и затуханий вычисляются аналогично.

4. Анализ перенормировки фононами параметров электронного спектра и температурных изменений параметров пика поглощения электромагнитных волн открытой ТБРТС

На основе развитой в предыдущих параграфах теории электрон-фононного взаимодействия и развитой ранее в работе [9] теории туннелирования сквозь открытую ТБРТС электронов, взаимодействующих с электромагнитным полем, выполнялся расчет спектральных параметров и динамической проводимости активной зоны ККД на примере наносистемы с GaAs-ямами и $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ -барьерами, экспериментально исследованными в работе [1].

Расчет резонансных энергий (E_n) и ширин (Γ_n) КСС электрона и максимальных активных проводимостей $\sigma_{12} = \sigma_{12}(E = E_1, \hbar\omega = E_2 - E_1)$, $\sigma_{13} = \sigma_{13}(E = E_1, \hbar\omega = E_3 - E_1)$ в квантовых переходах $1 \rightarrow 2$ и $1 \rightarrow 3$ в открытой ТБРТС при $T = 0\text{K}$ выполнялся для наносистемы на основе полупроводников $\text{GaAs}/\text{Al}_{0.34}\text{Ga}_{0.66}\text{As}$ с физическими параметрами $m_w = 0.0665m_e$, $m_b = 0.0883m_e$, $U = 274\text{мэВ}$ (m_e — масса свободного электрона). Результаты расчета зависимостей этих величин от положения внутреннего барьера между внешними, т.е. от ширины (a_1) активной ямы при постоянной ширине общей ямы ($a = a_1 + a_2 = 9.9\text{нм}$), приведены на рис. 2. Для удобства изучения и анализа величины Γ_n и нормирование на максимальное значение $\sigma_{12}(a_1 = a)$ парциальные проводимости $\bar{\sigma}_{12}^{\pm}$, $\bar{\sigma}_{13}^{\pm}$ приведены в логарифмических шкалах. Здесь, как и в работе [9], σ^+ описывает проводимость в прямом, а σ^- — в обратном направлениях из ТБРТС.

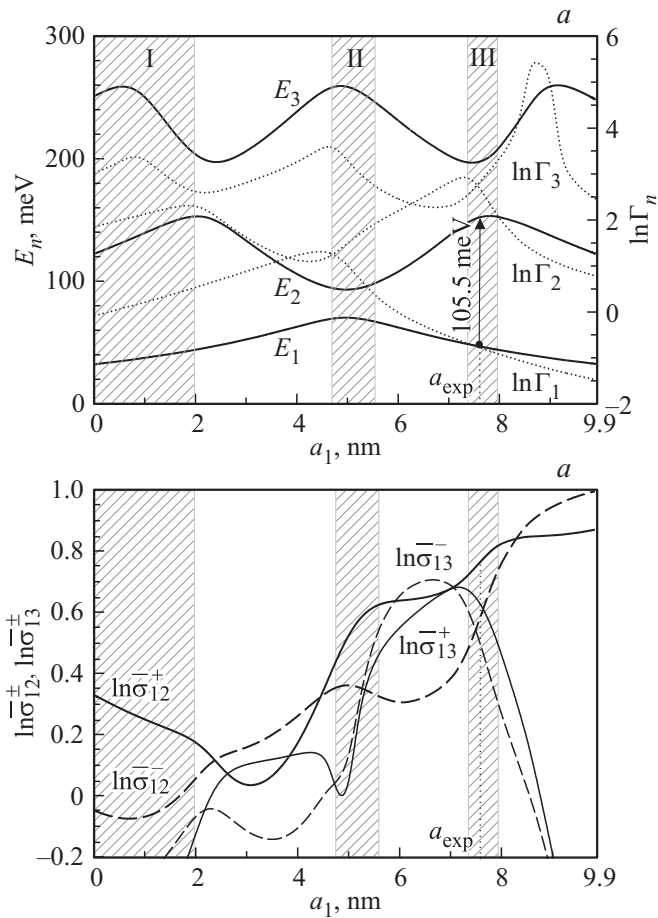


Рис. 2. Зависимости от ширины (a) активной потенциальной ямы резонансных энергий (E_n), логарифмов резонансных ширин (Γ_n , в единицах 1 мэВ) и логарифмов парциальных проводимостей ($\sigma_{12}^{\pm}, \sigma_{13}^{\pm}$) при $a = 9.9$ нм, $d_1 = 3.3$ нм, $d_2 = d_3 = 2.2$ нм.

Из рис. 2 видно, что зависимость резонансных энергий (E_n) от положения (a_1) внутреннего барьера относительно середины общей ямы ($a = a_1 + a_2$) практически симметрична, несмотря на то что ТБРТС несимметрична, так как толщина входного барьера ($d_1 = 3.3$ нм) превышает толщину выходного ($d_3 = 2.2$ нм) почти в 1.5 раза. Это связано с тем, что величины резонансных энергий КСС в открытой системе слабо „чувствительны“ к толщине внешних барьеров, если они превышают нанометровую толщину. С этим же обстоятельством связано и то, что рассчитанные по приведенной теории энергии стационарных состояний в закрытой ТБРТС ($d_1, d_3 \rightarrow \infty$) с точностью не хуже 0.01% совпадают с соответствующими им резонансными энергиями открытой системы независимо от положения внутреннего барьера. Величины резонансных ширин (Γ_n), а значит и времен жизни $\tau_n = \eta/\Gamma_n$, несимметричны относительно среднего положения ($a_1 = a/2$) внутреннего барьера в общей яме, так как τ_n существенно зависят от толщины того внешнего барьера, ближе к которому с большей вероятностью локализована туннелирующая

квазичастица. Если, например, электрон в каком-либо КСС локализован ближе к выходному, более тонкому барьеру ($d_3 = 2.2$ нм), то он быстрее туннелирует из ТБРТС, поэтому время жизни в таком КСС мало, а резонансная энергия — большая. Поскольку, как известно [5–10], величина активной проводимости очень чувствительна к величинам времен жизни электронов в тех КСС, квантовые переходы между которыми ее определяют, то соответствующие парциальные слагаемые $\sigma_{12}^{\pm}, \sigma_{13}^{\pm}$ оказываются сильно нелинейными функциями положения (a_1) внутреннего барьера (рис. 2).

Как показано в работе [9], открытая ТБРТС может успешно работать как активный элемент каскада ККД лишь при выполнении условия ($\sigma_{12}^+ \gg \sigma_{12}^-, \sigma_{13}^{\pm}$), т.е. когда туннельный ток в прямом направлении, возникающий за счет квантового перехода $1 \rightarrow 2$, существенно превышает остальные. Это условие, как видно из рис. 2, выполняется лишь при трех типах конфигураций ТБРТС, отмеченных на рисунке тонированными областями (I, II, III). Из трех рабочих конфигураций наиболее оптимальной является третья, так как в ней не только выполняется упомянутое условие, но и величина σ_{12}^+ максимальна, по сравнению с другими рабочими конфигурациями. Именно в этой конфигурации при $a_1 = a_{\text{exp}} = 7.6$ нм был создан рабочий элемент каскада экспериментального ККД [1], который при $T = 50$ К детектировал электромагнитные волны длиной 11.7 мкм, что соответствует энергии перехода $E_{12}^{\text{exp}} = 106$ мэВ. Теоретические расчеты энергии квантового перехода (при $T = 0$ К) в закрытой модели, согласно разд. 2, и в открытой модели в подходе работы [9] дали результат $E_{12} = 105.5$ мэВ, а суммарная величина ширин обеих КСС (в открытой модели) $\Gamma_{12} = \Gamma_1 + \Gamma_2 = 15.76$ мэВ.

Аналогично предыдущему выполнялся расчет зависимости от a_1 величин $E_n^T, \Gamma_n^T, \bar{\sigma}_{12}^T, \bar{\sigma}_{13}^T$ при комнатной температуре ($T = 300$ К) также без учета электрон-фононного взаимодействия, но с учетом того, что и эффективные массы, и высоты потенциальных барьеров зависят от ширин E_{gw} и E_{gb} , которые, как известно [21], зависят от температуры. В результате расчетов оказалось, что все ранее проанализированные зависимости от a_1 физических параметров при $T = 0$ К качественно не изменяются и при $T = 300$ К. Все они практически не чувствительны к температурным изменениям эффективных масс, но поскольку с температурой уменьшились высоты потенциальных барьеров ($U_{300\text{K}} = 254$ мэВ), то при экспериментальной конфигурации ($a_1 = 7.6$ нм) ТБРТС уменьшилась величина энергии квантового перехода $E_{12}^{T=300\text{K}} = 100.7$ мэВ и увеличилась суммарная ширина $\Gamma_{12}^{T=300\text{K}} = 18.97$ мэВ.

Чтобы исследовать перенормировку электронного спектра фононами, сначала выполнялся расчет L - и I -фононного спектра закрытой ТБРТС с геометрическими параметрами активной зоны экспериментального ККД [1] ($a_1 = 7.6$ нм, $a_2 = 2.3$ нм, $d_2 = 2.2$ нм). Результаты расчета приведены на рис. 3, из которого видно,

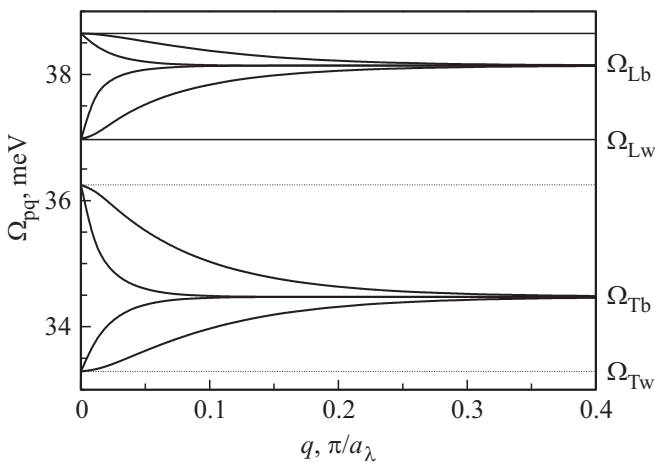


Рис. 3. Зависимость энергий L - и I -фононов от квазиимпульса q в закрытой ТБРТС с геометрическими параметрами $a_1 = 7.6$ нм, $a_2 = 2.3$ нм, $d_2 = 2.2$ нм. Здесь a_λ — величина постоянной решетки материала GaAs.

что в системе есть две ветки бездисперсионных энергии ($\Omega_{Lw} = 36.25$ мэВ, $\Omega_{Lb} = 38.65$ мэВ) L -фононов и восемь слабодисперсионных ($\Omega_\lambda(q)$) веток I -фононов. Интерфейсные фононы образуют две группы энергий по четыре ветки в каждой. Каждая группа содержит по две ветки с положительной и отрицательной дисперсиями в окрестности малых квазиимпульсов q . Низкоэнергетическая группа I -фононных энергий расположена между энергиями поперечных фононов массивных образцов ($\Omega_{Tw} = 33.29$ мэВ, $\Omega_{Tb} = 36.97$ мэВ), а высокоэнергетическая группа — между энергиями продольных ограниченных фононов (Ω_{Lw}, Ω_{Lb}), существующих в наносистеме.

Перенормировка спектральных параметров (E_n, Γ_n) электронов при криогенных температурах (формально $T = 0$ К и $v_{\lambda q} = 0$) происходит только за счет их взаимодействия с рождением виртуальных L - и I -фононов, поэтому энергии обоих уровней (E_1 и E_2) могут только уменьшаться, т.е. возникают отрицательные сдвиги независимо от механизмов их формирования, что и наблюдается на рис. 4. Из рис. 4 видно, что, хотя полные сдвиги (Δ_n^L, Δ_n^I), формируемые L - и I -фононами, сильно нелинейно зависят от расположения (a_1) внутреннего барьера в ТБРТС, их величины соразмерны между собой. При этом почти при всех значениях a_1 иерархия величин парциальных вкладов такова, что внутризонное взаимодействие через фононы преобладает над межзонным через состояния дискретного спектра и тем более над межзонным через состояния непрерывного спектра. Только в тех геометрических конфигурациях ТБРТС, при которых ширины обеих ям близки между собой ($a_1 \approx a_2$) из-за сближения в антикросинге энергетических уровней E_1 и E_2 , в соответствии с физическими соображениями величины парциальных сдвигов обоих состояний ($n = 1, 2$), обусловленные внутриуровневым взаимодействием и взаимодействием через межуров-

невые состояния дискретного спектра, сближаются по величинам между собой.

Затухания (γ_n) электронных состояний определяются законом сохранения энергии, который регламентируется δ -функциями в мнимых частях массового оператора (40). Так как при $T = 0$ К $\text{Im}M(E_1) \propto \delta(E_1 - E_{n \geq 1}(q) - \Omega_{\lambda q} < 0) = 0$, затухание основного состояния электронов из-за взаимодействия с рождением виртуальных фононов невозможно ($\gamma_1 = 0$).

Что же касается затухания возбужденных состояний ($\gamma_{n \geq 2}$), то, поскольку $\text{Im}M(E_{n \geq 2})$ содержит δ -функцию $\delta(E_n - E_{n_1 < n}(q) - \Omega_{\lambda q})$, аргумент которой при $n_1 < n$ может удовлетворять условию $E_n - E_{n_1 < n} = \Omega_{\lambda q}$, то в таком случае $\text{Im}M(E_{n \geq 2}) \neq 0$ и соответственно возникает затухание $\gamma_{n \geq 2} \neq 0$. В связи с этим при $T = 0$ К, как видно из рис. 4, затухание основного состояния отсутствует ($\gamma_1^{L,I} = 0$), а возбужденное состояние затухает ($\gamma_2^{L,I} = \gamma_{21}^{L,I} \neq 0$) лишь при таких конфигурациях ТБРТС, при которых выполняется упомянутое выше условие.

В результате выполненных расчетов оказалось, что в конфигурации ТБРТС, отвечающей экспериментальной [1] активной зоне ($a_1 = 7.6$ нм) ККД при криогенной температуре ($T \approx 0$ К), электрон-фононное взаимодействие сдвигает основной ($n = 1$) рабочий уровень на величину $\Delta_1 = \Delta_1^L + \Delta_1^I = -2.5$ мэВ, а возбужденный ($n = 2$) — на величину $\Delta_2 = \Delta_2^L + \Delta_2^I = -1.9$ мэВ и вызывает уширение возбужденного уровня на величину $\gamma_2 = \gamma_2^L + \gamma_2^I = 0.2$ мэВ. Таким образом, при криогенных температурах в квантовом переходе $1 \rightarrow 2$ с учетом электрон-фононного взаимодействия поглощается электромагнитное поле с энергией $\tilde{E}_{12} = E_{12} + (\Delta_2 - \Delta_1) = 106.1$ мэВ, что лучше согласуется с экспериментальным значением [1], а ширина полосы поглощения немного увеличилась $\Gamma_{12} = \Gamma_{12} + \gamma_2 = 15.96$ мэВ в соответствии с физическими соображениями.

Аналогичные расчеты перенормированных параметров электронного спектра выполнялись при комнатной температуре ($T = 300$ К) ТБРТС. В этом случае в системе существуют „реальные“ фононы ($v_{\lambda q} \neq 0$), поэтому в МО (33) вносят вклад и процессы с рождением фононов, описываемые слагаемым с $1 + v_{\lambda q}$, и с их поглощением, описываемые слагаемым с $v_{\lambda q}$. Теперь во втором слагаемом $\text{Im}M(E)$ δ -функция отлична от нуля независимо от величины энергии E_n и от конфигурации ТБРТС. Поэтому все состояния, включая и основное, кроме температурных сдвигов Δ_n^T приобретают и температурные уширения γ_n^T .

В результате расчетов оказалось, что зависимости от конфигурации ТБРТС (от a_1) парциальных смещений и затуханий при $T = 300$ К качественно подобны тем, которые детально проанализированы при $T = 0$ К. Поэтому на рис. 5 приведены только зависимости от ширины ямы a_1 полных температурных сдвигов (Δ_1^T, Δ_2^T) и ширин (γ_1^T, γ_2^T) рабочих электронных состояний и их составляющих, обусловленных L -фононами ($\Delta_1^{LT}, \Delta_2^{LT}, \gamma_1^{LT}, \gamma_2^{LT}$) и I -фононами ($\Delta_1^{IT}, \Delta_2^{IT}, \gamma_1^{IT}, \gamma_2^{IT}$).

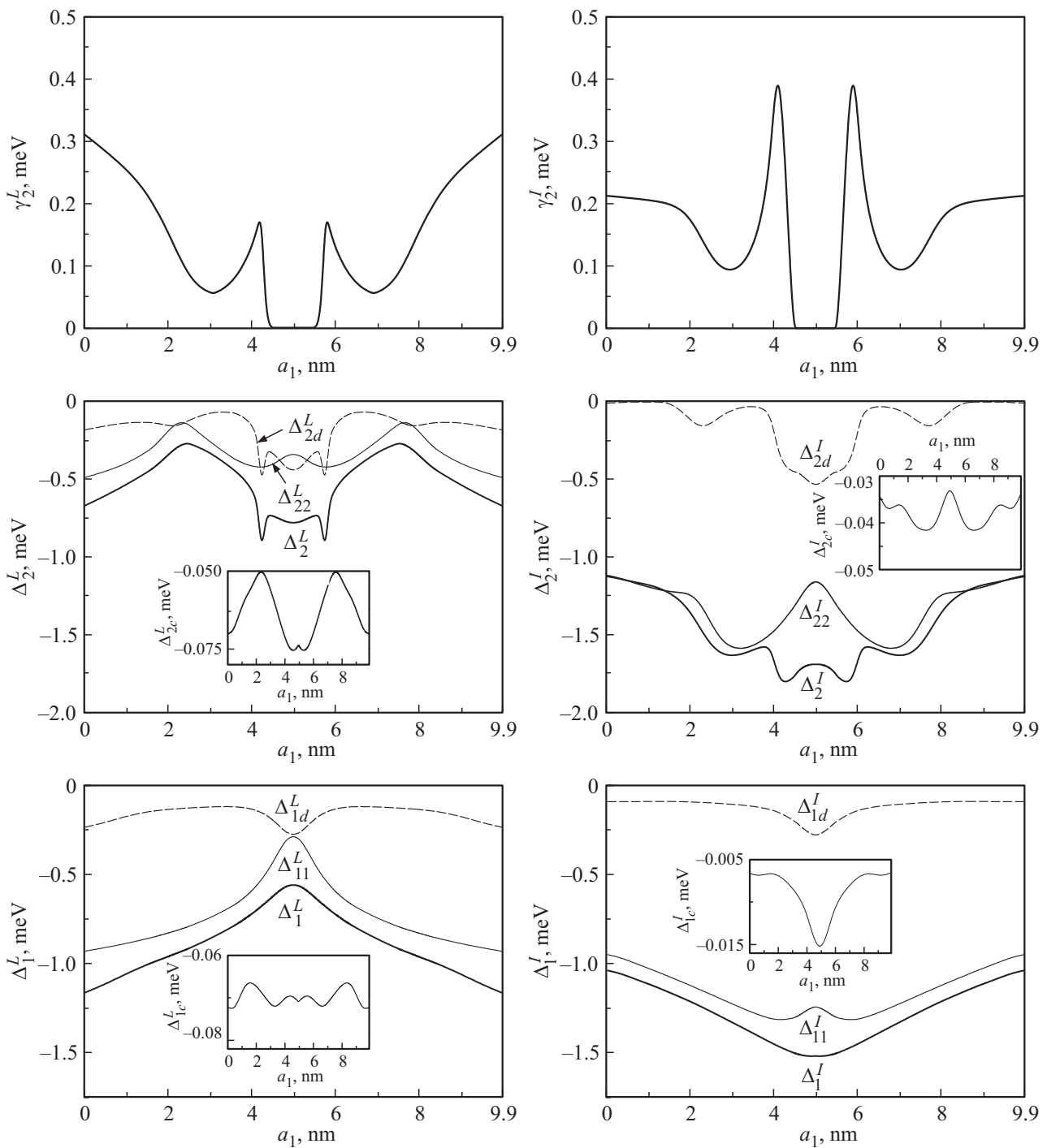


Рис. 4. Зависимости от конфигурации (a_1) ТБРТС полных и частичных сдвигов и ширин электронных состояний, а также сдвига положения максимума пика поглощения электромагнитного поля и его уширения, обусловленных L - и I -фононами при криогенной температуре ($T = 0$ К).

Из рис. 5 видно, что полный температурный сдвиг и затухание основного электронного состояния очень слабо зависят от конфигурации ТБРТС, так как с изменением ширины ямы a_1 вклады L - и I -фононов практически везде взаимодополняют друг друга. Температурные сдвиги и затухания возбужденного электронного состояния нелинейно зависят от ширины ямы a_1 , причем вклад

I -фононов превышает вклад L -фононов как в сдвиг, так и в затухание почти при всех конфигурациях ТБРТС, за исключением тех, при которых внутренний барьер почти прижат к одному из внешних.

Так как величины Δ_1^I и Δ_2^I при всех значениях a_1 не только соразмерны, но и близки между собой, то из-за сильной нелинейности $\Delta_2^I(a_1)$ температурный сдвиг

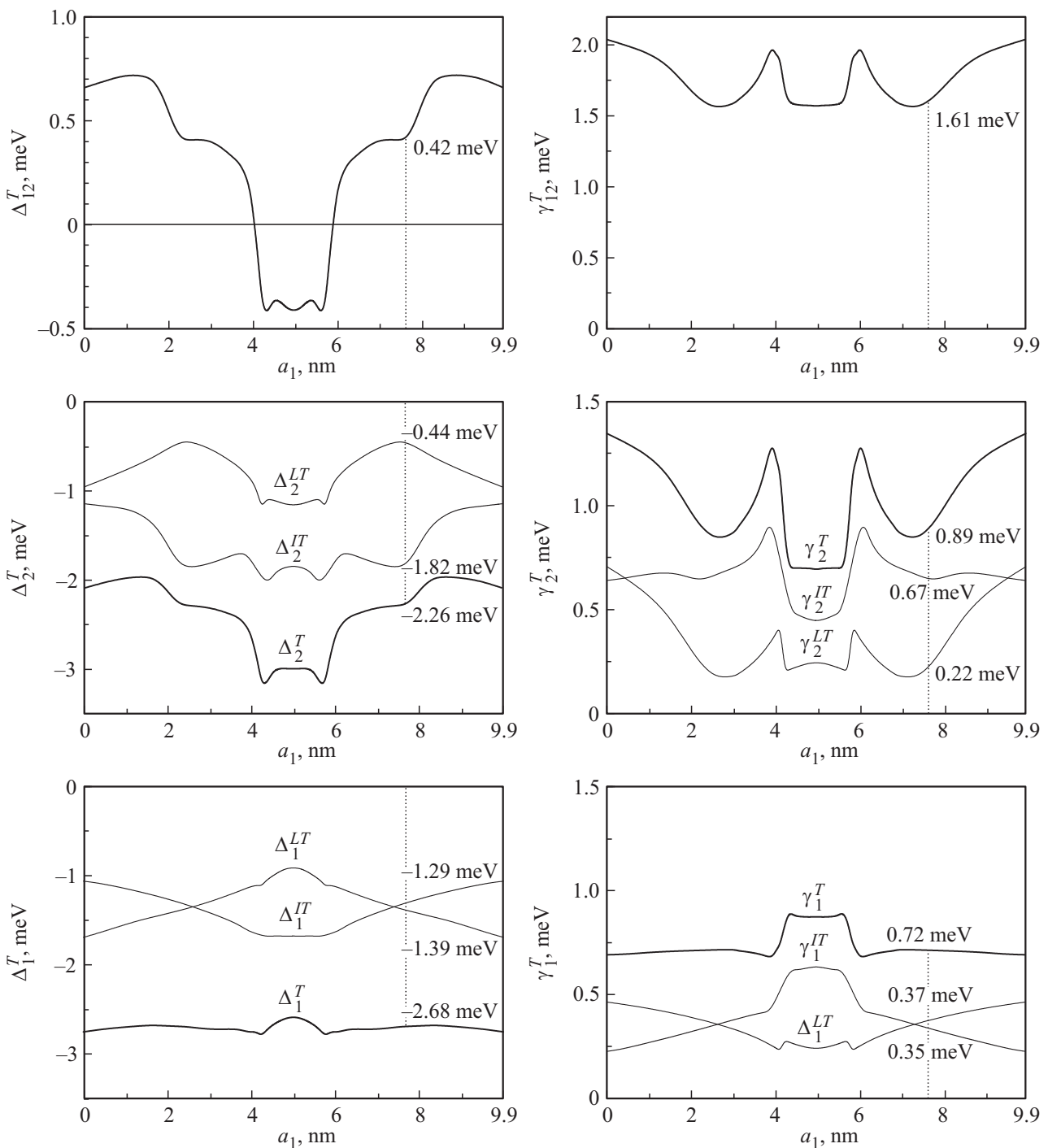


Рис. 5. Зависимости от конфигурации (a_1) ТБРТС полных и парциальных сдвигов и ширин электронных состояний, а также сдвига положения максимума пика поглощения электромагнитного поля и его уширения, обусловленных L и I -фононами при комнатной температуре ($T = 300$ К).

($\Delta_{12}^T = \Delta_2^T - \Delta_1^T$) положения максимума пика поглощения электромагнитного поля, обусловленный электрон-фононным взаимодействием, оказывается небольшим по величине, сильно нелинейным и даже изменяет знак с изменением конфигурации ТБРТС (рис. 5). Что касается температурного уширения ($\gamma_{12}^T = \gamma_1^T + \gamma_2^T$) пика поглощения, обусловленного взаимодействием с фононами,

то оно также нелинейно зависит от a_1 , хотя во всем интервале изменения a_1 $1.75 \leq \gamma_{12}^T \leq 2$ мэВ (рис. 5).

В результате выполненных расчетов оказалось, что электрон-фононное взаимодействие в экспериментальной [1] конфигурации ТБРТС при $T = 300$ К слабо сдвигает максимум пика поглощения электромагнитных волн в область больших энергий ($\Delta_{12}^T = 0.42$ мэВ) и

приводит к его уширению ($\gamma_{12}^T = 1.62$ мэВ). Учитывая эти результаты, а также ранее вычисленные величины энергий квантового перехода с поглощением электромагнитной волны $E_{12}^T = 100.7$ мэВ и с затуханием $\Gamma_{12}^T = 18.97$ мэВ при $T = 300$ К, получаются величины энергии, соответствующей пику поглощения $\tilde{E}_{12}^T = E_{12}^T + \Delta_{12}^T = 101.12$ мэВ и его ширине $\tilde{\Gamma}_{12}^T = \Gamma_{12}^T + \gamma_{12}^T = 20.59$ мэВ.

Экспериментальные значения энергий, соответствующих максимумам пиков поглощения в квантовом переходе $1 \rightarrow 2$, согласно работе [1], составляют 106 мэВ при $T = 50$ К, а при комнатной температуре ($T = 300$ К) 97 мэВ. Пик поглощения в переходе $1 \rightarrow 2$, приведенный в цитируемой работе, слабо выделяется на фоне пиков за счет других переходов поэтому его ширина определяется с небольшой неточностью и составляет порядка 20 мэВ. Таким образом, видно, что результаты теоретических расчетов спектральных параметров пика поглощения электромагнитных волн открытой ТБРТС как активного элемента ККД в широком интервале температур удовлетворительно согласуются с экспериментом.

5. Основные результаты и выводы

1. Развита квантовая теория спектральных параметров квазистационарных состояний электронов в открытой ТБРТС как активном элементе ККД с учетом их взаимодействия с ограниченными и интерфейсными поляризационными фононами наносистемы в интервале температур от криогенных до комнатных.

2. В модели диэлектрического континуума, эффективных масс и прямоугольных потенциалов развита теория электрон-фононного взаимодействия в закрытой ТБРТС. Найден гамильтониан системы электронов, взаимодействующих с ограниченными и интерфейсными фононами, в представлении вторичного квантования по всем переменным системы. Методом температурных функций Грина выполнен расчет перенормированных взаимодействием с фононами спектральных параметров электронных состояний.

3. Исследован вклад различных механизмов взаимодействия в перенормировку сдвигов и ширин электронных уровней в зависимости от температуры и конфигурации ТБРТС. На примере экспериментально исследованной в работе [1] ТБРТС ($\text{GaAs}/\text{Al}_{0.34}\text{Ga}_{0.66}\text{As}$) как активного элемента ККД показано, что вклад L - и I -фононов в сдвиги и ширины электронных рабочих уровней практически одинаковы независимо от температуры. Из-за слабости электрон-фононной связи в ТБРТС ($\text{GaAs}/\text{Al}_{0.34}\text{Ga}_{0.66}\text{As}$) влияние фононов на температурную зависимость положения и ширины пика поглощения электромагнитных волн оказывается меньшим, чем температурные изменения высоты потенциальных барьеров.

4. Установлено, что основной причиной коротковолнового температурного сдвига и уширения пика погло-

щения электромагнитных волн при квантовом переходе электронов в ТБРТС является уменьшение высоты потенциальных барьеров наносистемы, вызванное не одинаковым температурным изменением величин энергий запрещенных зон материалов ям и барьеров. Результаты развитой теории удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Список литературы

- [1] L. Gendron, M. Carras, A. Huynh, V. Ortiz. *Appl. Phys. Lett.*, **85** (14), (2004).
- [2] F.R. Giorgetta et al. *J. Quant. Electron.*, **45**, 1039 (2009).
- [3] Ning Kong, Jun-Qi Liu, Lu Li, Feng-Qi Liu, Li-Jun Wang, Zhan-Guo Wang, Wei Lu. *Chin. Phys. Lett.*, **27** (12), 128 503 (2010).
- [4] Shen-Qiang Zhai, Jun-Qi Liu, Xue-Jiao Wang, Ning Zhuo, Feng-Qi Liu, Zhan-Guo Wang, Xi-Hui Liu, Ning Li, Wei Lu. *Appl. Phys. Lett.*, **102**, 191 120 (2013).
- [5] В.Ф. Елесин. *ЖЭТФ*, **124** (2), 379 (2003).
- [6] В.Ф. Елесин. *ЖЭТФ*, **127** (1), 131 (2005).
- [7] А.Б. Пашковский. *Письма ЖЭТФ*, **82** (4), 228 (2005).
- [8] А.Б. Пашковский. *Письма ЖЭТФ*, **89** (1), 32 (2009).
- [9] Н.В. Ткач, Ю.А. Сети. *ФТП*, **45** (3), 376 (2011).
- [10] M.V. Tkach, Ju.O. Seti, O.M. Voitsekhivska, G.G. Zegrya. *Rom. J. Phys.*, **57** (3–4), 620 (2012).
- [11] N. Mori, T. Ando. *Phys. Rev. B*, **40**, 6175 (1989).
- [12] J.-J. Shi, B.C. Sanders, S.-H. Pan. *Eur. Phys. J. B*, **4**, 113 (1998).
- [13] Yan Zu Wei, X.X. Liang. *Int. J. Mod. Phys. B*, **15** (27), 3539 (2001).
- [14] Z.W. Yan, S.L. Ban, X.X. Liang. *Int. J. Mod. Phys. B*, **17**, 6085 (2003).
- [15] В.Н. Wu, J.C. Cao, G.Q. Xio, H.C. Lio. *Eur. Phys. J. B*, **33**, 9 (2003).
- [16] J.G. Zhu, S.L. Ban. *Eur. Phys. J. B*, **85** (140), (2012).
- [17] А.А. Абрикосов, Л.П. Горьков, И.Е. Дзялошинский. *Методы квантовой теории поля в статистической физике. 2-е изд. испр. и доп.* (М., Добросвет, 1998).
- [18] D.F. Nelson, R.C. Miller, D.A. Kleinman. *Phys. Rev. B*, **35** (14), 7770 (1987).
- [19] X. Gao, D. Botez, J.I. Knezevic. *Appl. Phys.*, **101**, 063 101 (2007).
- [20] Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц. *Квантовая механика (нерелятивистская теория)*. (М., Физматлит, 2004).
- [21] S. Adachi. *J. Appl. Phys.*, **58** (3), 1985.

Редактор Т.А. Полянская

Electron-phonon interaction in three-barrier nanosystems as active elements of quantum cascade detectors

N.V. Tkach, Ju.A. Seti, Y.B. Grynyshyn

Chernovtsy National University,
58012 Chernovtsy, Ukraine

Abstract The theory of electronic tunneling through the open nanostructure, as active element of quantum cascade detector, is developed taking into account the interaction of electrons with confined and interface phonons. Within the method of thermodynamic Green's functions and using the electron-phonon Hamiltonian obtained in the representation of second quantization over all variables, the calculations of temperature shifts and widths of electron states are performed and contributions of different mechanisms of electron-phonon interaction into the renormalization of spectral parameters are analyzed depending on geometric configuration of nanostructure. The temperature shift and width of absorption peak of high frequency field are not sensitive to the electron-phonon interaction due to the weak electron-phonon binding in resonant tunneling nanostructure (at the base of GaAs/Al_{0.34}Ga_{0.66}As) but are mainly caused by the decrease of potential barriers heights at the increasing temperature due to the different temperature dependences of forbidden bands of wells and barriers.