

07,09

Остаточные напряжения в стержнях сапфира, выращиваемых способом Степанова

© В.М. Крымов, Ю.Г. Носов, С.И. Бахолдин, Е.В. Галактионов, В.Н. Маслов, Э.А. Тропп

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
Санкт-Петербург, Россия

E-mail: v.krymov@mail.ioffe.ru

(Поступила в Редакцию 29 сентября 2014 г.)

Поляризационно-оптическим методом исследованы остаточные напряжения в цилиндрических кристаллах сапфира ориентации [0001]. По величине расхождения изогир определялся угол оптических осей $2V$ и находилась разность нормальных компонент тензора упругих остаточных напряжений ($\sigma_\varphi - \sigma_r$). Найдено, что на поверхности слитка действуют тангенциальные растягивающие напряжения величиной не более 20 МПа. Проведено сравнение остаточных напряжений с расчетными величинами термоупругих напряжений, возникающих при выращивании кристалла в данной тепловой зоне. Показано, что найденная картина остаточных напряжений может быть вызвана термоупругими напряжениями, развивающимися в непосредственной близости от фронта кристаллизации.

1. Введение

Благодаря уникальному сочетанию физических свойств монокристаллы сапфира широко применяются для изготовления окон, подложек светодиодных структур, часовых стекол и т.д. Важнейшей характеристикой кристаллов сапфира являются величина и распределение остаточных напряжений, приводящих к аномальной двуосности кристаллов. Они недопустимы в ряде случаев применения сапфира, например, в поляризационной оптике, оптических линиях связи и т.д.

Остаточные напряжения связаны, как правило, с дефектами кристаллической решетки, которые возникают при выращивании кристаллов в результате пластической деформации под действием термических напряжений. Остаточные напряжения в прозрачных твердых телах обычно изучают с помощью поляризационно-оптического метода. Для оптически изотропных материалов и кубических кристаллов измеряют разность хода между обыкновенным и необыкновенным лучами при параллельном просвечивании. При изучении оптически одноосных кристаллов применяют в большинстве случаев метод коноскопии, т.е. измеряют угол расхождения между осями при просвечивании в сходящемся свете для сечений, перпендикулярных оптической оси [1].

Для сапфира впервые такие исследования были выполнены в [2] на кристаллах, выращенных способом Вернейля. Найдено, что часто встречающиеся области аномальной двуосности в этих кристаллах связаны с упругими остаточными напряжениями. О сравнительной величине этих напряжений можно было судить по максимальному углу между оптическими осями в образцах. В [3] построены розетки равных касательных напряжений для отдельных краевых дислокаций в кристалле сапфира и приведены примеры наблюдения таких розеток в поляризованном свете. Далее картина напряжений, вызываемых одной дислокацией, обобщена

на случай группы дислокаций и предсказаны оптические эффекты, которые должны наблюдаться у границ линий скольжения.

Детальное изучение остаточных напряжений в кристалле сапфира, выращенном способом Вернейля, проведено в [4]. Кристалл имел следующие размеры: длина 42 мм, диаметр 17 мм. С помощью компенсатора Берека измерена разность хода лучей в сечении, перпендикулярном оси выращивания кристалла. Используя выведенную формулу, связывающую разность главных напряжений и величину двулучепреломления, авторы построили эпюру осевых напряжений в сечении кристалла. Найдено, что в его центральных участках действуют напряжения сжатия, а в периферийных — напряжения растяжения. Величина напряжений составляла ~ 45 МПа в центре кристалла и ~ 80 МПа на периферийных участках. Такой же вывод для кристаллов Вернейля — сжатие в центре, растяжение на периферии — дается в работе [5]. Здесь же приводятся значения остаточных напряжений в кристаллах Вернейля 100–150 МПа для стандартной тепловой зоны и 15–20 МПа при использовании дополнительного нагрева в процессе охлаждения кристалла. В пластинах сапфира, выращенных методом горизонтальной направленной кристаллизации, имеет место обратное распределение остаточных напряжений: растяжение — в центральной области пластины, сжатие — по ее краям [6].

Методом коноскопии исследованы остаточные напряжения в базисноограниченных ленточных кристаллах сапфира сечением 30×1.5 мм, выращенных способом Степанова [7]. Изучались как совершенные (безблочные) кристаллические ленты сапфира, так и кристаллы, содержащие блоки. Ленты различного совершенства выращивались в различных температурных зонах. Сравнение измеренных напряжений в блочных и безблочных лентах показало, что в лентах с блочной структурой идет более быстрое нарастание напряжений по мере удаления от

затравки. Показано, что в таких лентах на расстоянии ~ 120 mm от затравки скалывающие напряжения достигают 25 МПа и в этом же месте начинается образование блоков. В то же время уровень напряжений в безблочной ленте — в средней ее части — не превышает 5 МПа. Отмечено, что разработанный метод определения остаточных напряжений может быть использован для неразрушающего контроля качества базисноограниченных лент.

В настоящее время интенсивно развивается технология выращивания кристаллов сапфира в форме стержней различного размера методами Чохральского и Степанова. Для этих кристаллов оценка уровня остаточных напряжений также является актуальной задачей.

Целью настоящей работы является применение поляризационно-оптической методики для изучения остаточных напряжений в объеме профилированных (цилиндрических) монокристаллов сапфира, выращенных способом Степанова.

2. Эксперимент

2.1. Выращивание кристаллов. Способом Степанова выращивались стержни сапфира круглого сечения диаметрами 8, 12 и 23 mm кристаллографической ориентации c — $[0001]$. Использовалась обычная тепловая зона: графитовый нагреватель диаметром 120 mm, графитовые тепловые экраны, аргон как газовая среда, тигель и формообразователь из молибдена. Скорость выращивания составляла 1 mm/min. Для изучения остаточных напряжений отбирались только безблочные кристаллы. Из выращенных кристаллов перпендикулярно направлению вытягивания вырезались образцы для исследования в виде шайб толщиной 4.5 mm. Шайбы шлифовались и полировались до оптической прозрачности.

2.2. Методика измерения остаточных напряжений. Остаточные напряжения в сапфире исследовались поляризационно-оптическим методом в сходящемся поляризованном свете (метод коноскопии). Кристалл сапфира является оптически одноосным, но под действием напряжений приобретает аномальную двуосность, которая проявляется в расхождении ветвей изогир коноскопической фигуры. Величина расхождения изогир характеризует максимальные скалывающие напряжения (разность квазиглавных напряжений), а ориентировка плоскости оптических осей P — траектории квазиглавных нормальных напряжений.

Коноскопические картины наблюдались с помощью поляризационного микроскопа Полам Р-111 с окуляром $10\times$ (шкала с ценой деления 0.1 mm) и объективом $20\times$. Поле зрения при этом составляло 0.7 mm. Измерения проводились в полярных координатах с шагом по диаметру шайбы 1 mm и по углу 7.2° с помощью специального приспособления. В каждой точке сетки (всего 528 точек для кристалла диаметром 23 mm) измерялись величина максимального расхождения изогир и угол наклона плоскости P к оси X_1 , направленной вдоль

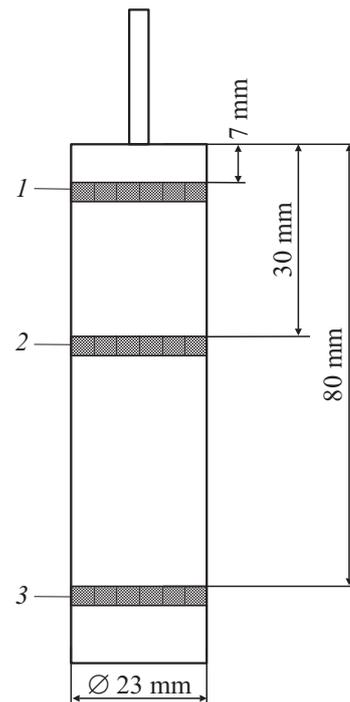


Рис. 1. Схема разрезки выращенного кристалла для исследования. Цифрами обозначены плоские шайбы, вырезанные на расстояниях 7 (1), 30 (2) и 80 mm (3) от затравки.

$[2\bar{1}\bar{1}0]$. Толщина пластин 4.5 mm обеспечивала достаточную четкость коноскопической фигуры. Градуировка шкалы проводилась путем наклона ненапряженного кристалла сапфира с помощью столика Федорова. Точность определения напряжений таким методом составляла примерно 2 МПа.

Изучение кристаллов разного диаметра показало, что в кристаллах диаметром 8 mm уровень напряжений ниже чувствительности метода, а в кристаллах диаметром 12 и 23 mm напряжения оказались на уровне 10–20 МПа. Более детально картина остаточных напряжений изучена в кристалле диаметром 23 mm. В этом кристалле (рис. 1) переход от затравки диаметром 5 mm к основному сечению 23 mm был настолько резким, что угол разращивания составил практически 90° . При этом на верхнем торце кристалла образовалась грань пинакоида (0001). Несмотря на такое резкое разращивание, кристалл был безблочным. Для изучения остаточных напряжений из кристалла вырезаны три шайбы на расстояниях 7, 30 и 80 mm от затравки.

3. Расчет остаточных напряжений по результатам оптических измерений

Сапфир относится к тригональной сингонии (кристаллографическому классу $\bar{3}m$). Напряжения в шайбе рассчитывались в кристаллофизической системе коор-

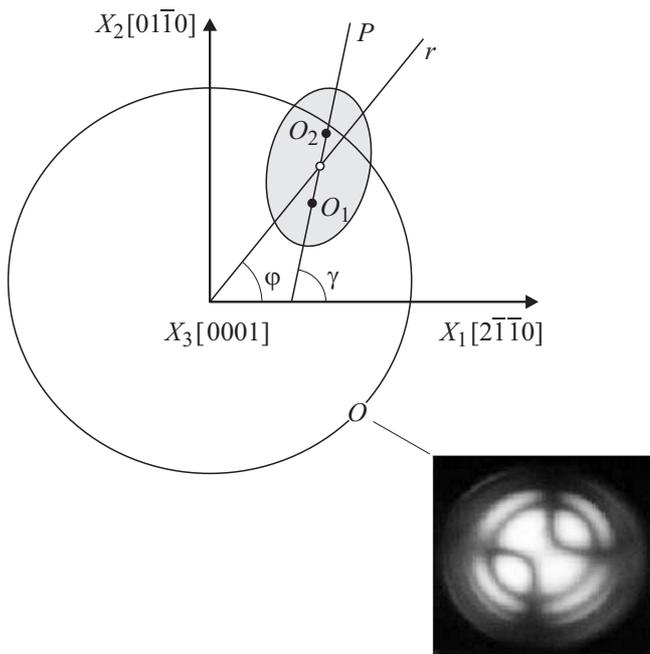


Рис. 2. Схема ориентации кристаллофизических осей. Показано сечение оптического эллипсоида. Плоскость оптических осей P перпендикулярна плоскости шайбы и составляет угол γ с осью X_1 . O_1 и O_2 — точки выхода оптических осей. Справа внизу в качестве примера приведен снимок коноскопической фигуры, полученной в поляризационном микроскопе с помощью линзы Бертрана.

динат (X_1, X_2, X_3). Ось X_3 перпендикулярна плоскости исследуемой шайбы (параллельна оси L_{i3} — инверсионной оси третьего порядка), совпадает с направлением просвечивания и направлением выращивания исходного кристалла. Ось X_1 расположена в плоскости шайбы в направлении a (ось симметрии второго порядка $[2\bar{1}\bar{1}0]$), ось X_2 — в направлении m ($[01\bar{1}0]$) (рис. 2).

Если внутренние напряжения отсутствуют, то оптическая индикатриса представляет собой эллипсоид вращения, и при просвечивании вдоль оптической оси двулучепреломление отсутствует. В кристалле с остаточными напряжениями эллипсоид становится трехосным, имеет две оптические оси с острым углом $2V$ между ними.

Поскольку исследовались относительно тонкие шайбы, можно считать, что в них реализуется плосконапряженное состояние. Это означает, что все напряжения, нормальные к плоскости образца, равны нулю, и в тензоре напряжений остаются только три компоненты: $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$ (или в матричных обозначениях $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_6$).

Задача расчета внутренних напряжений в ленточных кристаллах сапфира нулевой ориентации (базисной) по данным оптических измерений аномальной двуосности была рассмотрена в [7], где получены формулы для разности нормальных компонент напряжений ($\sigma_1 - \sigma_2$) и

касательной компоненты σ_6

$$\sigma_1 - \sigma_2 = C \operatorname{tg}^2 V \cos 2\gamma, \tag{1}$$

$$\sigma_6 = \frac{C}{2} \operatorname{tg}^2 V \sin 2\gamma, \tag{2}$$

где $C = \frac{n_o^{-2} - n_e^{-2}}{\pi_{11} - \pi_{12}}$, π_{11} и π_{12} — пьезооптические коэффициенты, n_o и n_e — показатели преломления, γ — угол наклона плоскости P к оси X_1 .

Поскольку исследуемый образец имеет форму круглой шайбы, удобнее проводить измерения и расчеты напряжений в полярных координатах (r, φ)

$$\sigma_r = \sigma_1 \cos^2 \varphi + 2\sigma_6 \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_2 \sin^2 \varphi, \tag{3}$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_1 \sin^2 \varphi - 2\sigma_6 \cos \varphi \sin \varphi + \sigma_2 \cos^2 \varphi, \tag{4}$$

$$\sigma_{r\varphi} = (\sigma_2 - \sigma_1) \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_6 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \tag{5}$$

Тогда разность нормальных напряжений будет равна

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = (\sigma_1 - \sigma_2) \cos 2\varphi + 2\sigma_6 \sin 2\varphi. \tag{6}$$

Подставляя (1), (2) в (5), (6), получим окончательно

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = C \operatorname{tg}^2 V \cos 2(\gamma - \varphi), \tag{7}$$

$$\sigma_{r\varphi} = \frac{C}{2} \operatorname{tg}^2 V \sin 2(\gamma - \varphi). \tag{8}$$

4. Экспериментальные результаты

На рис. 3 показаны эпюры остаточных напряжений $\sigma_\varphi - \sigma_r$ для каждой из трех исследованных шайб. Видно, что максимальные значения величин $\sigma_\varphi - \sigma_r$ составляют в исследованных образцах 15–20 МПа. Знак величины $\sigma_\varphi - \sigma_r$ для подавляющего большинства измеренных точек положительный.

Наиболее простая картина распределения $\sigma_\varphi - \sigma_r$ по сечению характерна для образца, ближайшего к затравке. В этом случае максимальные значения $\sigma_\varphi - \sigma_r$ составляют 15–16 МПа и находятся у поверхности кристалла. При движении к центру образца величина напряжений падает до нуля (или по крайней мере становится меньше величины чувствительности метода). Центральная область кристалла диаметром 7–7.5 мм не имеет остаточных напряжений.

Образец, вырезанный из срединной части кристалла, имеет меньшие значения напряжений ~ 10 МПа у поверхности, но при движении к центру величина $\sigma_\varphi - \sigma_r$ не только уменьшается, но на отдельных участках меняет знак. В картине распределения напряжений центральной части образца видна симметрия третьего порядка.

Наконец, третий, ближайший к фронту отрыва образец дает картину распределения напряжений $\sigma_\varphi - \sigma_r$, близкую к картине напряжений первого образца при меньшей области нулевых напряжений в центре.

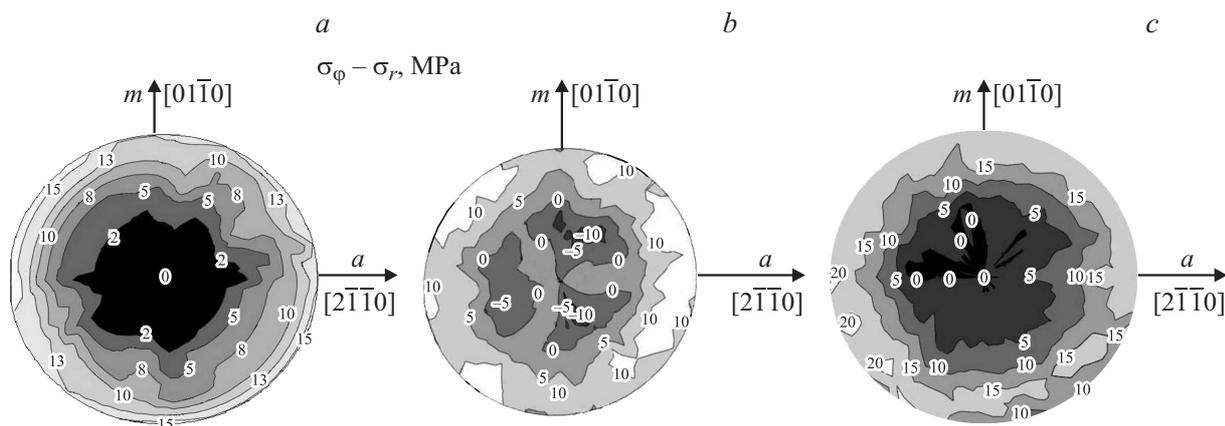


Рис. 3. Эпюры остаточных напряжений ($\sigma_\varphi - \sigma_r$) для трех образцов, вырезанных из кристалла сапфира на различных расстояниях от затравки. *a-c* — данные для образцов 1–3 соответственно (см. рис. 1).

Сопоставление измеренных напряжений для всех трех образцов удобно провести путем усреднения значений $\sigma_\varphi - \sigma_r$ в каждом образце. Такое усреднение по углу измерения (рис. 4) показывает основную общую особенность распределения напряжения по всей длине кристалла: в центральной части образца напряжения малы (или равны нулю), далее они возрастают и достигают максимальных значений в 2–3 мм от поверхности кристалла.

Поскольку в силу граничных условий радиальное напряжение на боковой поверхности образца σ_r равно нулю, можно сделать вывод, что на поверхности и вблизи нее действуют тангенциальные растягивающие напряжения σ_φ .

Найденные остаточные напряжения во всех трех сечениях не могут привести к самопроизвольному разрушению кристалла или образованию трещин в нем,

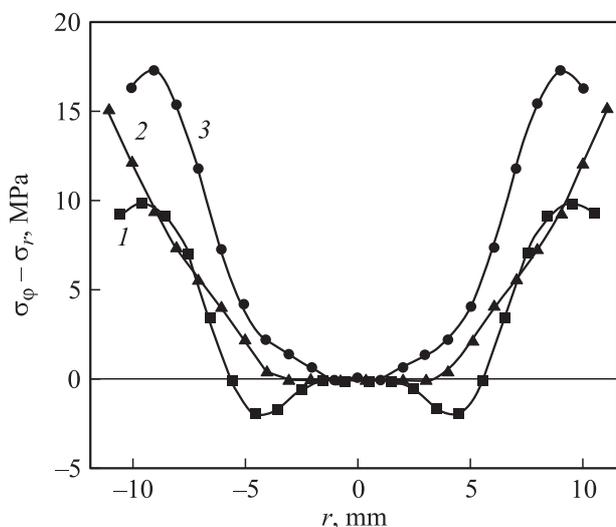


Рис. 4. Радиальные распределения измеренных напряжений ($\sigma_\varphi - \sigma_r$) для трех образцов сапфира, усредненные по углу измерения. 1–3 — то же, что на рис. 1.

поскольку они существенно меньше предела прочности сапфира на растяжение при комнатной температуре: 300–900 МПа [8].

Из данных оптических измерений касательное напряжение $\sigma_{r\varphi}$ определяется с большой погрешностью, но по порядку величины не превышает 2–3 МПа.

5. Модельные расчеты термоупругих напряжений

Представляет интерес сопоставить измеренные остаточные напряжения с расчетными значениями термоупругих напряжений, возникающих в растущем кристалле вследствие несовместности температурных деформаций. Для монокристаллов в форме стержней круглого поперечного сечения расчет напряжений может быть выполнен по приближенным аналитическим выражениям, полученным методом асимптотического интегрирования уравнений термоупругости [9]. В этом методе решение строится в виде ряда по малому параметру, в качестве которого в данном случае используется отношение радиуса стержня к его длине. Так были получены приближенные формулы для компонент тензора термоупругих напряжений в стержнях в изотропном приближении [10], с учетом анизотропии тепловых и упругих свойств материала [11], а также с учетом зависимости коэффициента теплового расширения от температуры [12]. Но эти формулы пригодны везде, кроме областей вблизи торцов стержня, поскольку при их выводе граничные условия по температуре и напряжениям на торцах удовлетворялись только в среднем.

Однако, при выращивании монокристаллов сапфира именно вблизи фронта кристаллизации, т. е. там, где кристалл наиболее пластичен, возможна наибольшая кривизна температурного поля. Следовательно, там можно ожидать максимальных значений термоупругих напряжений. Для получения приближенных формул, пригодных и у торцов стержня, необходимо кроме основного

итерационного процесса построить еще погранслоиные поправки, компенсирующие невязки в граничных условиях по температуре и напряжениям на торцах. Алгоритм построения пограничного слоя для случая изотропных кристаллов в виде стержней кругового сечения был рассмотрен в [10]. Он приводил к задаче нахождения напряжений в полубесконечном круговом цилиндре с боковой поверхностью, свободной от напряжений, и заданными напряжениями на торце, которая может быть решена методом однородных решений [13,14]. Приближенные формулы для компонент тензора термоупругих напряжений с учетом погранслоиных поправок, определяемых этим методом, для стержней круглого сечения приведены в работе [15] и имеют вид:

$$\sigma_r(r, z) \approx -\frac{E\alpha\varepsilon^2}{16(1+\nu)} [\sigma_r^{\text{ext}}(r, z) + \sigma_r^{\text{int}}(r, z) + \sigma_r^{T\text{int}}(r, z)], \quad (9)$$

$$\sigma_\phi(r, z) \approx -\frac{E\alpha\varepsilon^2}{16(1+\nu)} [\sigma_\phi^{\text{ext}}(r, z) + \sigma_\phi^{\text{int}}(r, z) + \sigma_\phi^{T\text{int}}(r, z)], \quad (10)$$

$$\sigma_z(r, z) \approx \frac{E\alpha\varepsilon^2}{8(1+\nu)} [\sigma_z^{\text{ext}}(r, z) + \sigma_z^{\text{int}}(r, z)], \quad (11)$$

$$\tau_{rz}(r, z) \approx \frac{E\alpha\varepsilon^2}{8(1+\nu)} \tau_{rz}^{\text{int}}(r, z), \quad (12)$$

где E — модуль Юнга, α — коэффициент теплового расширения, ν — коэффициент Пуассона, $\varepsilon = R/L$ — малый параметр задачи (R и L — радиус и длина цилиндра).

Формулы для слагаемых σ_r^{ext} , σ_ϕ^{ext} , σ_z^{ext} (внешнее разложение) совпадают с полученными ранее формулами [10], описывающими поля напряжений без учета погранслоиных поправок. Остальные слагаемые в (9)–(12) появляются при построении этих поправок (внутреннее разложение). Слагаемые $\sigma_r^{T\text{int}}$, $\sigma_\phi^{T\text{int}}$ являются следствием учета погранслоиной поправки для температуры $T^{\text{int}}(r, z)$ [15]. Необходимость выполнения граничного условия $\sigma_z = 0$ по всему фронту кристаллизации приводит к появлению слагаемых σ_r^{int} , σ_ϕ^{int} , σ_z^{int} и τ_{rz}^{int} . Отметим, что внешнее разложение (результат основного итерационного процесса) для компоненты τ_{rz} начинается с членов порядка ε^3 , поэтому представление для данной компоненты тензора включает только внутреннее разложение (погранслоиную поправку).

Алгоритм приближенного вычисления слагаемых, соответствующих погранслоиным поправкам, приведенный в [15], достаточно сложен. Он включает в себя решение трансцендентного уравнения и системы четырех линейных алгебраических уравнений. Важно отметить, что при вычислении погранслоиных поправок в формулах (9)–(12) используется только один параметр температурного поля — вторая производная средней по сечению стержня температуры в точке $z = 0$, т.е. на фронте кристаллизации. Как и следовало ожидать, все дополнительные слагаемые, описывающие пограничный

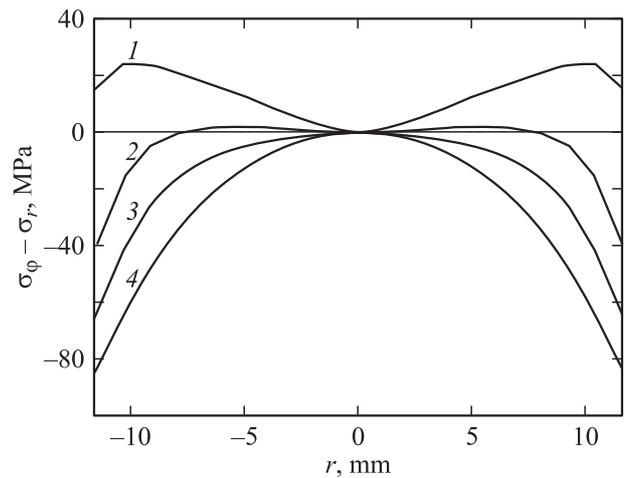


Рис. 5. Радиальные распределения расчетных значений разности нормальных компонент ($\sigma_\phi - \sigma_r$) тензора термоупругих напряжений в модельном температурном поле: 1 — на фронте кристаллизации, 2–4 — на высоте 0.5, 1 и 5 мм соответственно.

слой вблизи торца стержня, уменьшаются по экспоненциальному закону с увеличением z и становятся малы по сравнению с напряжениями, соответствующими внешнему разложению, уже на расстояниях, меньших диаметра кристалла.

В настоящей работе с помощью этих приближенных формул рассчитана разность нормальных компонент ($\sigma_\phi - \sigma_r$) тензора термоупругих напряжений в цилиндрическом кристалле сапфира диаметром 23 мм в модельном температурном поле с постоянной второй производной, равной 2.4 К/мм². На рис. 5 приведены радиальные распределения ($\sigma_\phi - \sigma_r$). На высоте примерно 0.5 мм от фронта кристаллизации упругие напряжения в растущем кристалле меняют знак: до этой высоты они положительные, выше — отрицательные.

6. Обсуждение результатов

В работах [16,17] была предложена модель образования блочной структуры базисноограниченных лент сапфира, выращенных из расплава способом Степанова.

В основе модели лежат следующие предположения. В наиболее высокотемпературной области, т.е. непосредственно на фронте кристаллизации или вблизи него, происходит пластическая деформация под действием термических напряжений. Образующиеся при этом дислокации при определенных условиях могут перестраиваться в малоугловые границы, развитие которых и приводит к образованию блоков. Пластическая деформация в кристаллах сапфира происходит посредством образования и движения дислокаций по двум системам скольжения: легкой базисной $\{0001\}\langle 11\bar{2}0 \rangle$ и более жесткой призматической $\{11\bar{2}0\}\langle 1\bar{1}00 \rangle$. Критические напряжения сдвига для этих систем при предплавленных

температурах различны и находятся на уровне примерно 1 и 10 МПа соответственно. Поэтому в зависимости от кристаллографической ориентации и уровня термических напряжений „работает“ та или иная система, что приводит к той или иной дислокационной конфигурации в выращиваемом кристалле.

Для лент всех ориентаций, кроме базисной, первой начинает работать легкая базисная система, что ограничивает фактически действующие термические напряжения на уровне, близком к критическому для этой системы (~ 1 МПа). Призматическая система в этих условиях работать не может.

В лентах базисной ориентации базисная система скольжения не работает просто ввиду геометрии ее расположения: все компоненты тензора напряжений лежат в плоскости скольжения и не дают сдвиговых напряжений в плоскости базиса. Если действующие напряжения превышают критическое значение (~ 10 МПа), то становится возможной работа призматической системы. Линии дислокаций этой системы лежат поперек ленты, и при перестройке дислокационной структуры возможно образование дислокационных границ, формирующих наблюдаемые блоки в лентах.

Применим эту же модель для случая выращивания стержней. Как следует из расчетов, на фронте кристаллизации и в узкой зоне, прилегающей к ней, действуют только радиальные и окружные напряжения, направленные нормально к оси выращивания. В стержнях ориентации [0001] аналогично случаю лент базисной ориентации базисная система скольжения под действием этих напряжений не работает, поскольку нормаль к плоскости скольжения перпендикулярна векторам напряжений. Действует призматическая система скольжения, приводящая к образованию дислокаций и связанных с ними остаточных напряжений. Далее при движении дислокаций в трех призматических системах могут образовываться дислокационные границы, которые в дальнейшем могут объединяться в границы блоков.

Как и в случае ленточных кристаллов, для стержней можно ожидать проявления размерного эффекта. При постоянной тепловой нагрузке (тепловом потоке с поверхности) уровень напряжений в стержне пропорционален его радиусу. В стержнях диаметром 8–10 мм интенсивность работы призматической системы скольжения оказывается достаточной для поддержания границ блоков, прорастающих из затравки, но недостаточна для образования новых границ в безблочном кристалле. Уровень остаточных напряжений оказывается низким.

Таким образом, можно предположить, что остаточные напряжения вызваны дефектами структуры, образующимися в результате пластической деформации под действием термоупругих напряжений во время роста. Поэтому знак остаточных напряжений должен быть противоположен знаку вызвавших их термоупругих напряжений. Сопоставив распределение измеренных остаточных (рис. 4) и расчетных (рис. 5) напряжений, можно сделать вывод, что пластическая деформация с образованием

дефектной структуры и остаточных напряжений идет в очень узкой высокотемпературной области (высотой до 0.5 мм) от фронта кристаллизации.

7. Выводы

1. Использование поляризационно-оптического метода позволило измерить величины остаточных напряжений в безблочных цилиндрических кристаллах сапфира ориентации [0001].

2. Величина разности нормальных компонент тензора остаточных упругих напряжений ($\sigma_\varphi - \sigma_r$) для образцов, вырезанных на различных расстояниях от затравки кристалла диаметром 23 мм, не превышает 20 МПа.

3. Во всех исследованных образцах напряжения минимальны в центре кристалла и возрастают к его периферии. На периферии (на цилиндрической поверхности образца) действуют тангенциальные растягивающие напряжения σ_φ .

Список литературы

- [1] А.Г. Штукенберг, Ю.О. Пунин. Оптические аномалии в кристаллах. Наука, СПб (2004). 263 с.
- [2] Н.Ю. Икорникова. Тр. Ин-та кристаллографии 8, 193 (1953).
- [3] В.Л. Инденбом, Г.Е. Томиловский. Кристаллография 2, 1, 190 (1957).
- [4] В.Л. Инденбом, Г.Е. Томиловский. Кристаллография 3, 5, 593 (1958).
- [5] Современная кристаллография / Под ред. Д.Е. Темкина. Наука, М. (1980). Т. 3. 407 с.
- [6] Х.С. Багдасаров. Высокотемпературная кристаллизация из расплава. Физматлит, М. (2004). 160 с.
- [7] А.В. Денисов, В.М. Крымов, Ю.О. Пунин. ФТТ 49, 454 (2007).
- [8] Е.Р. Добровинская, Л.А. Литвинов, В.В. Пищик. Энциклопедия сапфира. Ин-т монокристаллов, Харьков (2004). 508 с.
- [9] И.Е. Зино, Э.А. Тропп. Асимптотические методы в задачах теории теплопроводности и термоупругости. Изд-во ЛГУ, Л. (1978). 224 с.
- [10] Е.В. Галактионов, Э.А. Тропп. Изв. АН СССР. Сер. физ. 40, 1399 (1976).
- [11] П.И. Антонов, С.И. Бахолдин, Е.В. Галактионов, Э.А. Тропп. Изв. АН СССР. Сер. физ. 44, 255 (1980).
- [12] С.И. Бахолдин, Е.В. Галактионов, Э.А. Тропп. ЖТФ 80, 11, 1 (2010).
- [13] В.К. Прокопов. ПММ 12, 2, 135 (1949).
- [14] А.И. Лурье. Пространственные задачи теории упругости. ГИТТЛ, М. (1955). 490 с.
- [15] С.И. Бахолдин, Е.В. Галактионов, Э.А. Тропп. ЖТФ 84, 8, 1 (2014).
- [16] П.И. Антонов, В.М. Крымов, Ю.Г. Носов, И.Л. Шульпина. Изв. РАН, Сер. физ. 68, 6, 777 (2004).
- [17] Л.Л. Куандыков, С.И. Бахолдин, И.Л. Шульпина, П.И. Антонов. Изв. РАН, Сер. физ. 68, 6, 784 (2004).