

01

Моделирование электрических полей при наличии стержней со скругленными вершинами

© М.М. Резинкина

Институт технических проблем магнетизма НАН Украины,
61106 Харьков, Украина
e-mail: marinar2@mail.ru

(Поступило в Редакцию 22 мая 2014 г.)

С помощью предложенной математической модели для описания электрических полей при наличии криволинейных границ раздела сред проанализировано влияние параметров проводящих стержней со скругленными вершинами на максимальные уровни напряженности электрического поля. Показано как соотношение высоты и диаметра стержней, моделирующих молниеотводы, влияет на уровни максимальной напряженности. Данный анализ позволил определить условия возникновения встречного лидера от наземных объектов различной высоты при грозовой обстановке.

Введение

В ряде практически важных случаев необходима информация о характере распределения и уровнях максимальной напряженности электрического поля (ЭП) в окрестности проводящих стержней. Применение систем, содержащих проводящие стержни, является одним из возможных способов практической реализации получивших в последнее время распространение метаматериалов [1]. Системы „стержень–плоскость“ используют в высоковольтной импульсной технике для инициации разрядов в различных средах [2], к этой же категории объектов относятся стержневые молниеотводы. При определении зон защиты молниеотводов необходимо, в частности, определить условия возникновения встречного лидера.

Как правило, вершины используемых в технике стержней являются скругленными. При расчете ЭП в таких системах возникает проблема учета кривизны поверхности вершин стержней. Применение в данном случае метода конечных элементов не решает в полной мере проблему, поскольку используемые элементы (например, треугольники) имеют углы, а значит при расчете напряженность ЭП на них будет получаться завышенной. Учитывая, что основная часть стержня является прямолинейной, для расчета целесообразно применять конечно-разностные методы [3]. Однако известно, что использование прямоугольной расчетной сетки для описания ЭП в системах с криволинейными поверхностями приводит к существенному увеличению рассчитанных уровней напряженности ЭП, которое не имеет места в действительности [4]. Причем измельчение расчетной сетки только ухудшает ситуацию. Для того чтобы решить данную проблему, применяются различные приемы, например, представление производных в виде полиномов, а не конечных разностей [5]. Однако такой подход связан с усложнением задачи, а значит, теряются основные преимущества конечно-разностных методов: простота и возможность учета нелинейных параметров сред. Для расчета электромагнитных полей в подобных системах

применяются также так называемые конформальные схемы, предполагающие усреднение материальных параметров сред по объемам ячеек, расположенных на криволинейных границах раздела сред [6]. Использование данного подхода для сред, материальные параметры которых отличаются не более чем в 5–10 раз, дает весьма хорошие результаты [6,7]. Если же данные величины отличаются на несколько порядков (например, при расположении проводящего стержня в воздухе), то, как будет показано ниже, использование данного метода оказывается неэффективным.

1. Постановка задачи

Рассмотрим случай расчета электрического поля в окрестности проводящего цилиндрического стержня-молниеотвода, находящегося во внешнем вертикально направленном ЭП напряженностью E_0 в условиях грозовой обстановки. Поскольку движение лидерного канала молнии к земле происходит сравнительно медленно (скорость порядка 10^4 – 10^5 м/с [2]), расстояния, на которых изменяется ЭП, существенно превышают характерные размеры молниеотводов, поэтому расчет может быть выполнен в квазистационарном приближении. Расчетная система, содержащая проводящий цилиндрический стержень со скругленной вершиной (1), представлена на рис. 1.

Уравнение, описывающее распределение ЭП в данном случае, получим следующим образом. Запишем уравнение Максвелла в виде [8]

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \gamma\mathbf{E} + \frac{\partial\mathbf{D}}{\partial t}, \quad (1)$$

где \mathbf{H} , \mathbf{E} — напряженности магнитного и электрического поля соответственно, $\mathbf{D} = \varepsilon_0\varepsilon\mathbf{E}$, $\varepsilon_0 = 0.885 \cdot 10^{-11}$ Ф/м, ε — относительная диэлектрическая проницаемость, γ — удельная электропроводность.

Аналитические решения для напряженности ЭП в системах, содержащих цилиндрические стержни со скруг-

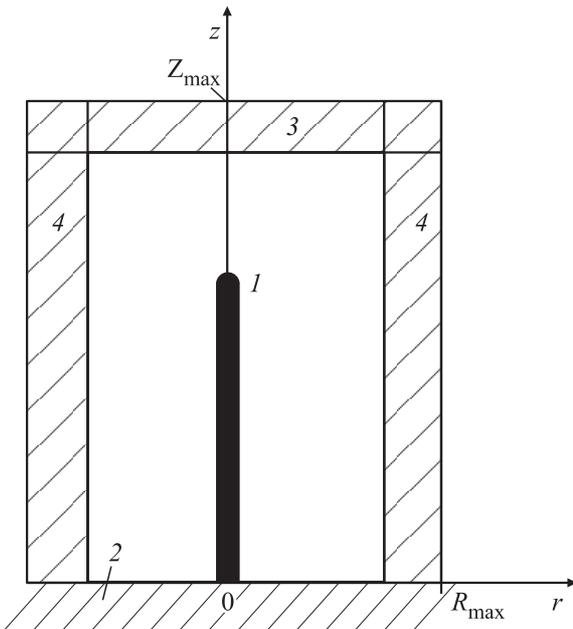


Рис. 1. Исследуемая расчетная система, содержащая стержни. 1 — стержень, 2 — земля, 3, 4 — PML-слой.

ленными вершинами, отсутствуют. Для нахождения распределения ЭП используем численный метод конечных объемов [9]. Учитывая осевую симметрию рассматриваемой системы, была использована цилиндрическая система координат. При этом полагалось, что ось Oz совпадает с осью стержня 1 и перпендикулярна поверхности земли 2 (рис. 1). Полагалось также, что расчетная область ограничена прямоугольником со сторонами $z = 0$, $z = Z_{\max}$, $r = R_{\max}$, $r = 0$ (рис. 1) и разбита на элементарные прямоугольные ячейки. При использовании метода конечных объемов решаемое разностное уравнение получают с помощью законов сохранения, в данном случае заряда. Для этого возьмем дивергенцию от обеих частей (1), учитывая, что в установившемся режиме второе слагаемое в правой части стремится к нулю. Затем проинтегрируем полученное уравнение по объемам элементарных ячеек, на которые разбита расчетная область, и используем подстановку $\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi$ (где φ — электрический потенциал), окончательно получим

$$\oint_S -\frac{\partial\varphi}{\partial n} \gamma ds = 0, \quad (2)$$

где S — стороны прямоугольника, которые делят пополам расстояния между соседними узлами, n — направление нормали к контуру интегрирования.

Для того чтобы уменьшить расчетную область, на ее границах введены так называемые хорошо согласованные слои (PML) [6] (см. 3, 4 на рис. 1). Данные слои выполняют вспомогательную функцию и нужны для обеспечения быстрого и безотражательного спада возмущения ЭП, вызванного наличием исследуемых объектов, при приближении к границам рас-

четной области. Распределение ЭП в PML-слоях не учитывается в результатах расчета. Полагается, что электропроводность в таком слое толщиной d является тензором, имеет различные значения в направлениях координатных осей Or , Oz и изменяется по глубине слоя в соответствии с полиномиальным законом. Так, для PML-слоя, перпендикулярного оси Or (см. 4 на рис. 1), изменение r -й — $\gamma_r^{\text{PML}}(r)$ и z -й — $\gamma_z^{\text{PML}}(r)$ компонент тензора электропроводности в направлении оси Or записывается в виде [6]

$$\gamma_r^{\text{PML}}(r) = \gamma_0 k_r(r), \quad \gamma_z^{\text{PML}}(r) = \gamma_0 / k_r(r),$$

где $k_r(r) = 1 + (k_{\max} - 1)(r/d)^m$, k_{\max} — максимальная величина k_r на внешней границе PML-слоя, m — показатель степени, γ_0 — значение электропроводности среды, примыкающей к внутренней границе PML-слоя.

Значения компонент тензора электропроводности в PML-слое, перпендикулярном оси Oz (см. 3 на рис. 1), имеют вид

$$\gamma_z^{\text{PML}}(z) = \gamma_0 k_z(z), \quad \gamma_r^{\text{PML}}(z) = \gamma_0 / k_z(z),$$

где $k_z(z) = 1 + (k_{\max} - 1)(z/d)^m$.

Величины электропроводностей в зонах пересечения PML-слоев находят путем перемножения соответствующих компонент в каждом из слоев.

Условия на границах расчетной области (рис. 1) полагались следующими: $\varphi = 0$ на поверхности земли ($z = 0$), $\partial\varphi/\partial n = 0$: при $R = 0$ и при $r = R_{\max}$ (на внешней границе расчетной области). Для того, чтобы учесть, что на верхней границе расчетной области за PML-слоем напряженность приложенного ЭП равна E_0 , при $z = Z_{\max}$ использовалось условие $\partial\varphi/\partial n = k_{\max} E_0$ (подробнее см. [10]).

Сравнение с аналитическим решением для шара в однородном ЭП показало, что при использовании 10 PML-слоев, имеющих параметры $m = 5$, $k_{\max} = 500 \cdot \gamma_0$, обеспечивается относительная погрешность расчета напряженностей и потенциалов ЭП не более 3%.

2. Моделирование электрических полей при наличии криволинейных поверхностей раздела

Остановимся подробнее на расчете ЭП в окрестности скругленных вершин стержней. При использовании метода конечных объемов узлы, в которых рассчитываются значения потенциалов, обычно располагают на границах раздела сред [10]. Это позволяет учесть граничные условия автоматически, не задавая их отдельными уравнениями. При использовании конечно-разностных методов криволинейная граница раздела сред может быть заменена ступенчатой аппроксимирующей поверхностью [6]. Это обуславливает появление при расчете локальных зон с повышенной напряженностью ЭП, которые в действительности места не имеют [4]. Причем, уровни

напряженности ЭП в зонах, прилегающих к углам аппроксимирующих криволинейную поверхность прямоугольных ячеек, будут тем больше, чем меньше шаг пространственной расчетной сетки. Рассчитанное таким образом распределение напряженности ЭП на поверхности проводящего шара, находящегося в однородном ЭП, показано на рис. 2 (см. сплошную кривую 1). Расчет проводился при шаге сетки $\Delta = 0.02 \cdot R$ (где R — радиус шара). Для сравнения на том же рисунке (см. кривую 2) показано аналитическое решение для проводящего шара в однородном внешнем ЭП (см., например, [11]). Как видно из сравнения кривых 1 и 2, отличия уровней напряженности ЭП для этих двух случаев весьма велики.

Как уже отмечалось выше, для устранения данной проблемы применяется ряд приемов [4–6]. Все они являются весьма громоздкими, что существенно усложняет их практическую реализацию. Предлагается достаточно простой способ получения решений для напряженностей ЭП в окрестности криволинейных поверхностей раздела сред, не связанный с введением неортогональной сетки или повышением порядка аппроксимации производных.

Суть данного подхода состоит в следующем. Учтем, что рассматриваемая система содержит проводящую (стержень) и непроводящую (воздух) среды. Причем, для квазистационарного случая потенциал проводящего объекта можно полагать постоянным. Для того чтобы упростить выкладки, будем рассматривать двумерную осесимметричную систему: для трехмерных объектов используется тот же подход. Сначала рассмотрим случай прямолинейной границы раздела сред (рис. 3, а). Замкнутый контур S , по которому осуществляется интегрирование решаемого уравнения (2), может быть представлен в виде 4 отрезков, перпендикулярных компонентам напряженности ЭП: S_{1r} и S_{2r} (в направлении, параллельном

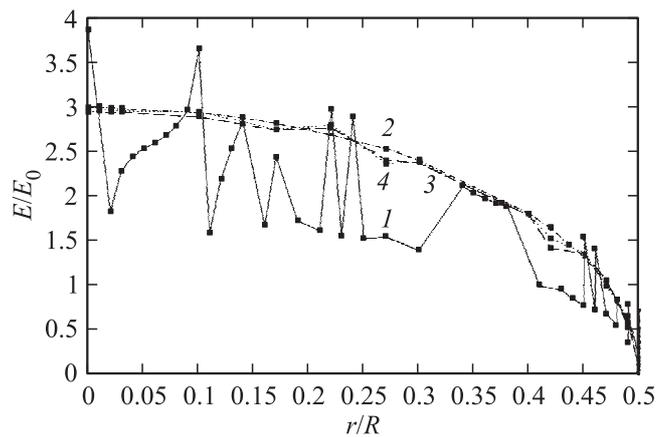


Рис. 2. Рассчитанные распределения напряженности ЭП на поверхности проводящего шара радиусом R , находящегося в однородном внешнем ЭП напряженностью E_0 : 1 — решение с помощью ступенчатой аппроксимации (сплошная кривая), 2 — аналитическое решение для $|E|$ (кривая штрихпунктирная), 3 — решение с помощью предложенного метода (пунктирная кривая), 4 — значения напряженности ЭП, полученные в виде разностей аналитических решений для потенциалов в узлах расчетной сетки (кривая штриховая).

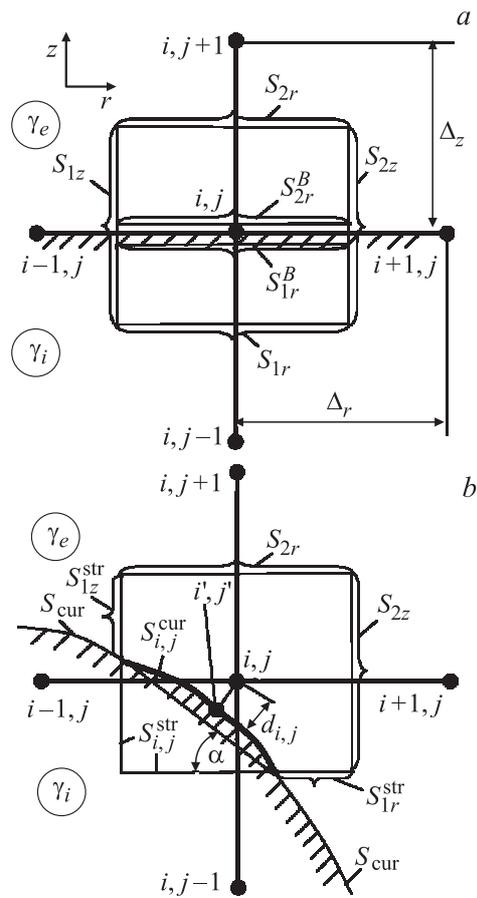


Рис. 3. Ячейка расчетной схемы в случае прямолинейной (а) и криволинейной (б) границ раздела сред.

оси Or), а также S_{1z} и S_{2z} (в направлении, параллельном оси Oz). Это возможно, поскольку интегрирование (2) по контурам S_{1r}^B и S_{2r}^B , которые прилегают вплотную к границе раздела сред по обе стороны от нее, в данном случае может быть заменено интегрированием по S_{1r} и S_{2r} . Такая замена правомочна, так как участки, по которым происходит интегрирование, равны между собой: $S_{1r}^B = S_{1r} = S_{2r}^B = S_{2r} = \Delta_r$ (где Δ_r — шаг по пространству в направлении оси Or), а разностные аналоги z – x компонент напряженностей ЭП по обе стороны от границы раздела: $Ez_{i,j}^+$ и $Ez_{i,j}^-$ определяются одними и теми же выражениями: как производные шагом назад или шагом вперед при интегрировании по S_{1r}^B и S_{2r}^B или как центральные производные при интегрировании по S_{1r} и S_{2r} :

$$Ez_{i,j}^+ = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \approx -\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{\Delta_z},$$

$$Ez_{i,j}^- = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \approx -\frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{\Delta_z}, \quad (3)$$

где $\varphi_{i,j}$ — потенциал узла (i, j) , Δ_z — шаг по пространству в направлении оси Oz .

Запишем (2) в разностной форме в виде суммы интегралов по отрезкам, перпендикулярным осям Or и Oz , учитывая, что $\gamma_e \ll \gamma_i$ (где γ_i, γ_e — электропроводность проводящей и непроводящей сред соответственно):

$$\oint_S -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \gamma ds \approx (I_{z2} - I_{z1}) + (I_{r2} - I_{r1}), \quad (4)$$

где

$$I_{z1} = -\gamma_i \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{\Delta_z} S_{1r} = -\gamma_i \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j+1}}{\Delta_z} \Delta_r, \quad (5)$$

$$I_{z2} = -\gamma_e \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{\Delta_z} S_{2r} = -\gamma_e \frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{\Delta_z} \Delta_r, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} I_{r1} &= -0.5(\gamma_e + \gamma_i) \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{\Delta_z} S_{1z} \\ &\approx -0.5\gamma_i \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{\Delta_r} \Delta_r, \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} I_{r2} &= -0.5(\gamma_e + \gamma_i) \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{\Delta_r} S_{2z} \\ &\approx -0.5\gamma_i \frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{\Delta_z} \Delta_z, \end{aligned} \quad (8)$$

Рассмотрим теперь (i, j) -ю ячейку расчетной системы, для которой S -контур интегрирования (2), включает участок $S_{i,j}^{\text{cur}}$ криволинейной границы раздела S^{cur} (рис. 3, *b*). Для того чтобы учесть наличие этого участка при построении разностной схемы, будем полагать, что $S_{i,j}^{\text{cur}}$ дополняет S до замкнутого контура вместо прямолинейного участка $S_{i,j}^{\text{str}}$, который проходит внутри проводящей среды. Как отмечалось выше, при принятых допущениях потенциал всего проводящего объекта (стержня) одинаков: обозначим его U_0 . Причем значения потенциалов в узлах, расположенных внутри проводящей среды, получаются из решения автоматически при задании уровня потенциала $\varphi = U_0$ на соответствующем участке внешней границы расчетной области. Обозначим через En напряженность ЭП у поверхности стержня, направленную перпендикулярно к этой поверхности. Поскольку потенциалы всех узлов, расположенных внутри и на поверхности проводящей среды, одинаковы, будем полагать, что при определении En в виде разности потенциалов вместо узлов, находящихся внутри проводящей среды (в нашем случае $(i-1, j)$ и $(i, j-1)$ — см. рис. 3, *b*), может быть использован узел (i', j') , расположенный на поверхности раздела сред в месте касания перпендикуляра к этой поверхности из узла (i, j) :

$$En_{i,j} = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \approx -\frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i',j'}}{d_{i,j}} = -\frac{\varphi_{i,j} - U_0}{d_{i,j}}, \quad (9)$$

где $d_{i,j}$ — расстояние от узла (i, j) до криволинейной поверхности раздела.

Разложим En на r - и z -компоненты, полагая, что участок $S_{i,j}^{\text{cur}}$ наклонен к горизонтали под углом α (рис. 3, *b*)

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial r} = E_r \approx En \sin \alpha, \quad -\frac{\partial \varphi}{\partial z} = E_z \approx En \cos \alpha. \quad (10)$$

Тогда слагаемые I_{z1} и I_{r1} в (4), для которых контур интегрирования уравнения (2) включает в том числе криволинейные участки границы раздела, запишем следующим образом:

$$I_{r1} \approx -\gamma_e \frac{\varphi_{i,j} - U_0}{d_{i,j}} \left\{ \sin \alpha S_{1z}^{\text{str}} [k_r + (1 - k_r)] + k_r S_{i,j}^{\text{cur}} \right\}, \quad (11)$$

$$I_{z1} \approx -\gamma_e \frac{\varphi_{i,j} - U_0}{d_{i,j}} \left\{ \cos \alpha S_{1r}^{\text{str}} [k_z + (1 - k_z)] + k_z S_{i,j}^{\text{cur}} \right\}, \quad (12)$$

где

$$k_r = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha < \pi/4 \\ 1, & \text{если } \alpha > \pi/4, \end{cases}$$

$$k_z = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha > \pi/4 \\ 1, & \text{если } \alpha < \pi/4, \end{cases}$$

$S_{1z}^{\text{str}}, S_{1r}^{\text{str}}$ — длины прямолинейных участков контура интегрирования S ; $S_{i,j}^{\text{cur}}$ — длина криволинейного участка S (рис. 3, *b*).

При получении (11), (12) использовался упрощенный подход, когда полагается, что при $\alpha > \pi/4$ кривая $S_{i,j}^{\text{cur}}$ вместе с участком S_{1z} или S_{2z} (в нашем случае это отрезок S_{1z}^{str}) дополняет часть контура интегрирования, параллельную оси Oz . Если же $\alpha < \pi/4$, то кривая $S_{i,j}^{\text{cur}}$ полагается частью контура интегрирования, дополняющей вместе с участком S_{1r} или S_{2r} (в нашем случае это отрезок S_{1r}^{str}) часть контура интегрирования, параллельного оси Or . Для рассматриваемой ячейки (рис. 3, *b*) слагаемые I_{z2} и I_{r2} в (4) определяются выражениями (6) и (8), поскольку при их получении криволинейные участки в контур интегрирования не входят. Нахождение длин криволинейного участка $S_{i,j}^{\text{cur}}$, прямолинейных отрезков $S_{1z}^{\text{str}}, S_{1r}^{\text{str}}$, а также $d_{i,j}$ не представляет существенных трудностей и может быть выполнено, например, численно в результате более мелкого разбиения ячеек, лежащих на границах раздела. Причем благодаря предложенному подходу, приграничные ячейки, расположенные внутри проводящей среды, удастся виртуально переместить на ее поверхность при определении ЭП в непроводящей среде. Такое „перемещение“ не влияет на определение ЭП внутри проводящей среды, поскольку изменение расстояния между внутренними узлами не сказывается на рассчитанных уровнях электрических потенциалов из-за весьма существенного различия между величинами электропроводностей проводящей и непроводящей сред. Те же принципы используются для получения численной аппроксимации (2) при другом расположении ячеек расчетной сетки по отношению к границе раздела сред.

Таким образом, применение предложенного подхода позволяет учесть как длину криволинейных участков границы раздела, так и расстояния между расположенными в непроводящей среде приграничными узлами расчетной сетки и границей раздела. Это возможно в результате использования для получения решаемых

уравнений закона сохранения (в данном случае заряда) с помощью интегрирования исходных дифференциальных уравнений по контуру ячеек расчетной схемы с учетом конфигурации границы раздела внутри каждой ячейки.

На рис. 2 кривая 3 показаны результаты расчета модуля напряженности ЭП на поверхности проводящего шара, расположенного в однородном ЭП, полученные с помощью описанного подхода. Уровни $|\mathbf{E}|$ в (i, j) -м узле определяются по рассчитанным значениям потенциалов в узлах расчетной сетки как усредненные значения по объему ячейки следующим образом:

$$|\mathbf{E}| = \sqrt{Ez_{i,j}^2 + Er_{i,j}^2}, \quad (13)$$

где

$$Ez_{i,j} \approx -0.5 \left(\frac{\varphi_{i,j+1} - \varphi_{i,j}}{\Delta_z} + \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i,j-1}}{\Delta_z} \right),$$

$$Er_{i,j} \approx -0.5 \left(\frac{\varphi_{i+1,j} - \varphi_{i,j}}{\Delta_r} + \frac{\varphi_{i,j} - \varphi_{i-1,j}}{\Delta_r} \right).$$

Для узлов, расположенных в непроводящей среде на расстоянии от границы раздела, меньшем шага расчетной сетки, соответствующие слагаемые в (13) рассчитываются с помощью (9), (10) с учетом реального расстояния до границы раздела.

На рис. 2 приведены также аналитические решения. Причем, кривая 2, рассчитана с помощью аналитического решения для $|\mathbf{E}|$, а кривая 4 представляет собой результаты расчета $|\mathbf{E}|$ в виде разностей аналитических решений для потенциалов в узлах расчетной сетки по формулам вида (9), (10), (13). Данные результаты ближе к полученным из численного решения (см. кривую 3), поскольку $|\mathbf{E}|$ определяется не в узле, как для кривой 2, а в объеме ячейки, как для численного решения. Все вычисления, результаты которых показаны на рис. 2, выполнены при одной и той же расчетной сетке, имеющей шаг по пространству в направлениях осей Or и Oz : $\Delta = 0.02R$ (где R — радиус шара). Как видно из сравнения кривых 3 и 4, наблюдается совпадение модулей напряженности ЭП в пределах относительной погрешности не более 3% (см. таблицу). В то же время уровни напряженности ЭП, рассчитанные при ступенчатой аппроксимации криволинейной поверхности (см. кривую 1), существенно (до 29%) отличаются от аналитического решения (см. таблицу). Как показали проведенные расчеты, значения напряженности ЭП, полученные при использовании конформальной схемы [6], полностью совпадают с данными, полученными при использовании ступенчатой аппроксимации. Это объясняется тем, что при столь большом различии величин удельной электропроводности проводящей и непроводящей сред (на 5–6 порядков и более) уменьшение в несколько раз эквивалентной электропроводности расположенных на границе раздела ячеек, содержащих проводящую и непроводящую среды, практически не оказывает влияния на рассчитанные уровни потенциалов.

Зависимости относительной погрешности расчета потенциалов и напряженностей ЭП от шага разбиения расчетной области

Δ/R	$\delta_{\max}^E, \%$	$\delta_{\max}^\varphi, \%$	$\delta_{E \max}, \%$
0.1	2.5	1.21	2.74/15.5*
0.05	2.38	2.6	2.7/16.7*
0.025	1.92	1.99	2.7/26*
0.02	2.13	2.34	1.7/29.2*

* Результаты расчета с использованием ступенчатой аппроксимации.

Еще одной особенностью при использовании ступенчатой аппроксимации является рост погрешности при уменьшении шага сетки за счет возрастания рассчитанной напряженности ЭП на углах контура, аппроксимирующего границу раздела (см. данные таблицы, отмеченные *). Это явление не наблюдается при использовании описанного выше подхода. В таблице приведены значения максимальной относительной погрешности расчета потенциалов и напряженностей ЭП в рассматриваемой системе „проводящий шар в однородном ЭП“ при различной величине шага сетки. Значения относительных погрешностей рассчитывались следующим образом:

$$\delta_{\max}^E = \frac{||\mathbf{E}| - |\mathbf{E}^{\text{ан}}||}{|\mathbf{E}^{\text{ан}}|}, \quad \delta_{\max}^\varphi = \frac{|\varphi - \varphi^{\text{ан}}|}{\varphi^{\text{ан}}},$$

$$\delta_{E \max} = \frac{||\mathbf{E}_{\max}| - |\mathbf{E}_{\max}^{\text{ан}}||}{|\mathbf{E}_{\max}^{\text{ан}}|},$$

где $|\mathbf{E}|, |\mathbf{E}^{\text{ан}}|$ — модули напряженности ЭП, полученные в результате численного и аналитического решений соответственно, $\varphi, \varphi^{\text{ан}}$ — электрические потенциалы, полученные в результате численного и аналитического решений соответственно, $|\mathbf{E}_{\max}|, |\mathbf{E}_{\max}^{\text{ан}}|$ — модули максимальной напряженности ЭП на поверхности шара, полученные в результате численного и аналитического решений соответственно.

Причем, аналитические решения для напряженности ЭП рассчитывались по формулам вида (9), (10), (13) в виде разностей аналитических решений для потенциалов в узлах расчетной сетки. Как видно из таблицы, относительные погрешности расчета φ и $|\mathbf{E}|$ при использовании описанного выше подхода практически не зависят от шага по пространству Δ и не превышают 3% при $\Delta \leq R/10$. В то же время, погрешность расчета ЭП при использовании ступенчатой аппроксимации возрастает при уменьшении шага разбиения (см. данные таблицы, отмеченные *).

3. Влияние геометрии стержней со скругленными вершинами на уровни максимальной напряженности ЭП

Для того чтобы оценить, как влияет высота молниеотвода на возможность развития от него встречного лидера, были рассчитаны распределения ЭП при различной высоте стержней.

Предварительно были проведены расчеты при последовательном увеличении габаритов ограниченной PML-слоями расчетной области в направлениях координатных осей, а также при измельчении шага расчетной сетки. Полагалось, что решение адекватно описывает распределение ЭП, когда значения напряженностей и потенциалов переставали меняться при последовательном двукратном измельчении расчетной области и увеличении ее габаритов. Из анализа полученных данных были сделаны следующие выводы: для того, чтобы относительная погрешность не превышала 3%, размеры расчетной области в радиальном направлении должны быть не меньше, чем высота стержня — молниеотвода (H), а в вертикальном — в 1.2 раза превышать H , шаг расчетной сетки должен быть не больше, чем $R/10$ (где R — радиус скругления стержня).

Рассмотрен случай, когда в условиях грозовой обстановки лидерный канал молнии находится далеко от

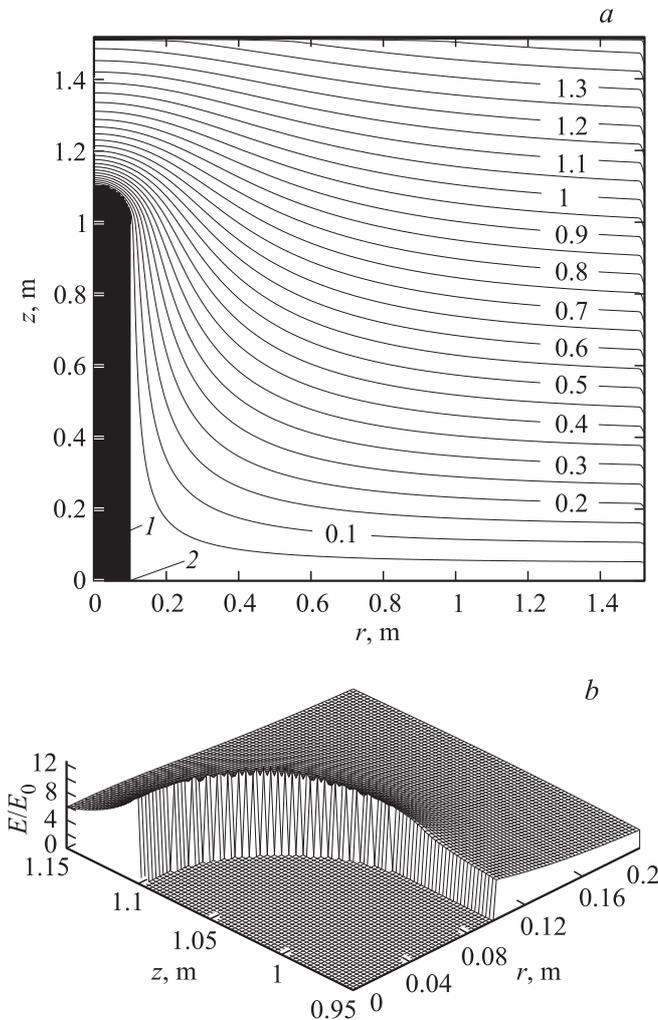


Рис. 4. Рассчитанные распределения параметров ЭП в окрестности контактирующего с землей 2 проводящего стержня 1, находящегося в однородном внешнем вертикально направленном поле напряженностью E_0 . *a*) — распределение линий равного потенциала $\varphi = \text{const}$, *b*) — распределение напряженности ЭП вблизи вершины стержня.

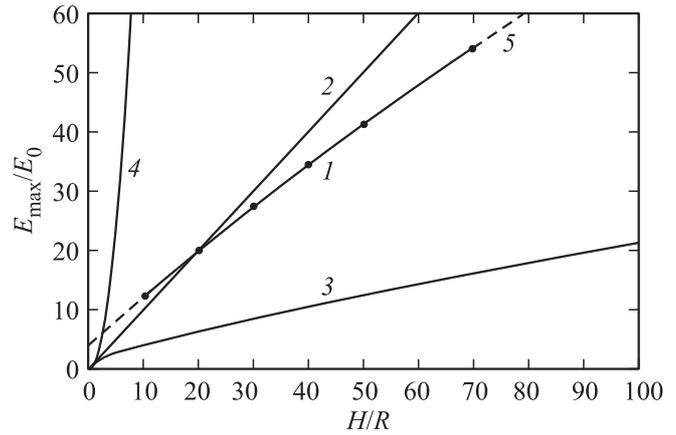


Рис. 5. Зависимости максимальной напряженности ЭП в окрестности проводящего стержня—молниеотвода от его высоты H . 1 — численный расчет с помощью описанного подхода, 2 — зависимость $E_{\text{max}} = E_0 H/R$, 3, 4 — аналитические решения для вытянутого проводящего эллипсоида при расстоянии от вершины $\Delta = 0$ (3) и $\Delta = R = 0.1 \text{ m}$ (4), 5 — полиномиальная аппроксимация кривой 1.

молниеотвода, и можно полагать, что к нему приложено равномерное ЭП. Согласно литературным данным (см., например, [12], при разрядах в системах „стержень—плоскость“ существует так называемый критический радиус стержня. Он определяется из условия идентичности характера пробоя в системах со стержнями, радиус которых меньше критического радиуса: $R \leq R_{\text{cr}}$, поскольку при выполнении данного условия пробивное напряжение не зависит от величины R из-за наличия короны. Рассмотрен случай, когда величина радиуса стержня—молниеотвода равна критическому радиусу — $R = R_{\text{cr}} = 0.1 \text{ m}$ [12], поскольку, как правило, радиус молниеотводов не превышает эту величину.

На рис. 4 представлены результаты численного расчета распределений параметров ЭП в окрестности проводящего стержня, находящегося во внешнем однородном поле E_0 , выполненные с помощью описанного выше подхода. Расчеты проводились при следующих исходных данных: $H/R = 10$, $R = 0.1 \text{ m}$, $\Delta_r = \Delta_z = R/40$, $Z_{\text{max}} = 1.2H$, $R_{\text{max}} = H$ (где H и R — соответственно высота и радиус стержня со скругленной вершиной). Граничные условия приведены в конце подраздела 1. Как видно из рис. 4, *a, b*, использование предложенного метода расчета позволяет сгладить рассчитанные значения потенциалов и напряженностей ЭП, избежав существенного возрастания их уровней на углах расчетной сетки.

На рис. 5 показаны результаты численного расчета зависимости E_{max} — максимальных уровней напряженности ЭП в окрестности проводящих стержней, находящихся во внешнем однородном поле напряженностью E_0 (см. кривую 1), от их высоты H . Расчет проводился при следующих параметрах расчетной сетки: $\Delta_r = \Delta_z = R/10$, $Z_{\text{max}} = 1.2H$, $R_{\text{max}} = H$, $H = \text{var}$. На рисунке приведены также результаты инженерных оценок для E_{max} (кривые 2–4). Кривая 2 соответствует

оценке E_{\max} в виде отношения потенциала ЭП на высоте вершины заземленного стержня к его радиусу

$$E_{\max} = E_0 H / R.$$

Кривые 3 и 4 получены в результате использования аналитического выражения для напряженности ЭП над эллипсоидом на его оси (см., например, [13]) при расстоянии от его вершины $\Delta = R_{\text{cr}}$ (кривая 3) и $\Delta = 0$ (кривая 4). Как видно из сравнения кривых 1–4, значения $E_{\max}^* = E_{\max} / E_0$, полученные с учетом реальной формы молниеотвода (цилиндр, вершина которого скруглена из-за наличия короны), занимают промежуточное положение по отношению к наименьшим (кривая 3), которые соответствуют расстоянию от стержня, равному критическому радиусу R_{cr} , и наибольшим уровням, которые соответствуют точке на вершине эквивалентного эллипсоида (кривая 4).

На рис. 4 кривая 5 соответствует аппроксимации кривой 1 полиномом

$$E_{\max}^*(H/R) = 1.1884 \cdot 10^{-5} (H/R)^3 - 0.00276 (H/R)^2 + 0.8499 (H/R) + 4.06472. \quad (14)$$

Учитывая, что критерием начала пробоя в воздухе служит достижение пробивной напряженности $E_{br} = 30 \text{ kV/cm}$ (см., например, [2]), из (14) можно записать выражение для критической напряженности ЭП, при приложении которой к стержню–молниеотводу высотой H с его вершины возможно инициирование встречного лидера

$$E_{\text{cr}}(H/R) \approx 3 \cdot 10^6 / [1/19 \cdot 10^{-5} (H/R)^3 - 0.0028 (H/R)^2 + 0.85 (H/R) + 4.06] \text{ V/m}.$$

Из полученных данных можно сделать вывод, что в условиях грозовой обстановки, когда приближающийся к земле лидерный канал молнии находится еще далеко от земли и молниеотводов, а напряженность ЭП составляет порядка $10^3 - 2 \cdot 10^4 \text{ V/m}$ [14], достижение напряженности ЭП, необходимой для инициации встречного лидера от молниеотводов, возможно лишь при условии, что их высота превышает $H_{\text{cr}} = 150 - 200 \text{ m}$. В то же время, при приближении лидерного канала молнии к земле и увеличении вследствие этого напряженности ЭП в зоне под ним величина H_{cr} может быть существенно меньше.

Заключение

1. Предложенный метод учета криволинейной границы раздела сред, основанный на использовании метода конечного интегрирования, позволяет рассчитать распределение ЭП с относительной погрешностью, не превышающей 3%, при шаге расчетной сетке не большем, чем $0.1R$ (где R — радиус скругления).

2. С помощью предложенного метода учета криволинейной границы раздела сред рассчитаны зависимости максимальной напряженности ЭП от соотношения

между высотой и диаметром стержней. Показано, что использование аналитических решений для проводящего вытянутого эллипсоида приводит к существенной погрешности при нахождении уровней максимальной напряженности вблизи вершин стержней.

3. Аппроксимация рассчитанной зависимости уровня максимальной напряженности в окрестности молниеотвода от его высоты позволила получить аналитическое выражение для критической напряженности, при которой с вершины молниеотвода возможно инициирование встречного лидера.

Список литературы

- [1] *Toal B., McMillen M., Murphy A., Atkinson W.H.R., Pollard R.* // Materials Research Express. 2014. № 1. P. 1–11.
- [2] *Базелян Э.М., Ражанский И.М.* Искровой разряд в воздухе. Новосибирск: Наука, 1988. 165 с.
- [3] *Самарский А.А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1989. 616 с.
- [4] *Popov E., Nevie`re M., Gralak B., Tayeb G.* // Opt. Soc. of America. 2002. Vol. 19. N 1. P. 33–42.
- [5] *Gjonaj E., Lau T., Schnepf S., Wolfheimer F., Weiland T.* // New Journal of Physics. 2006. N 8. P. 1–21.
- [6] *Taflove A., Hagness S.* Computational electromagnetics: the finite difference time domain method. Boston–London: Artech House, 2000. 852 p.
- [7] *Резинкина М.М.* // Электричество. 2003. № 8. С. 50–55.
- [8] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества. М.: Наука, 1989. 504 с.
- [9] *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости. М.: Энергоатомиздат, 1984. 150 с.
- [10] *Резинкина М.М.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 6. С. 85–92.
- [11] *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.-Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1948. 539 с.
- [12] *Cooray V.* Lightning Protection. London: The Institution of Engineering and Technology. 2010. 1036 p.
- [13] *Кучинский Г.С., Кизеветтер В.Е., Пинталь Ю.С.* Изоляция установок высокого напряжения. М.: Энергоатомиздат, 1987. 368 с.
- [14] *Базелян Э.М., Райзер Ю.П.* Физика молнии и молниезащиты. М.: Физматлит, 2001. 319 с.