

Длинный периодически модулированный джозефсоновский контакт в магнитном поле и правильность модели Бина

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: marzelik@mail.ru

(Поступило в Редакцию 6 июня 2014 г.)

Рассчитаны распределение вихрей и профиль магнитного поля, проникающего в длинный контакт. Для расчета использован подход, основанный на анализе непрерывного видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения ее потенциала Гиббса. Компьютерные расчеты по предложенному методу показали, что существует критическое значение I_C , находящееся в интервале 0.95–1.00, разделяющее два возможных режима проникновения в контакт внешнего магнитного поля. При $I > I_C$ расчет при любом значении внешнего поля H_e приводит к приграничной токовой конфигурации конечной длины, полностью компенсирующей внешнее поле в глубине контакта. Если же $I < I_C$, то такая ситуация реализуется лишь до некоторого значения внешнего поля H_{\max} . При больших значениях поля оно проникает в контакт на бесконечную глубину. В тех случаях, когда в глубине контакта магнитное поле равно нулю, у границы оно уменьшается с глубиной почти линейно. Значения коэффициента наклона представляют собой рациональные дроби и остаются постоянными в конечных интервалах I . При выходе I за верхнюю границу такого интервала коэффициент наклона скачком увеличивается и принимает значение другой рациональной дроби. На основании приведенных результатов сделан вывод о нарушении предположений Бина и некорректности использования модели Бина для анализа происходящих процессов.

Введение

Проблема проникновения магнитного поля в сверхпроводник давно привлекает внимание теоретиков и экспериментаторов. В процессах, происходящих в сверхпроводниках II и III рода, находящихся в не очень сильных магнитных полях, важную роль играют вихри. При малых полях вихрей нет, поле выталкивается из образца. При некотором значении поля становится энергетически выгодным возникновение вихрей. В отсутствие пиннинга в образце устанавливается однородная вихревая решетка, соответствующая равномерному проникновению поля, которая по мере роста поля становится более плотной. При наличии пиннинга вихри не могут сразу заполнить весь образец, они возникают сначала возле поверхности и с ростом поля постепенно продвигаются в глубь образца. Это продвижение происходит за счет того, что новые нити, образующиеся у поверхности, как бы „заталкивают“ уже существовавшие вихри внутрь образца. В итоге каждому значению внешнего поля (мы рассматриваем ситуацию, возникающую при монотонном увеличении поля) соответствует некая решетка вихрей вблизи поверхности. Каждый вихрь несет один квант магнитного потока, поэтому магнитная индукция B в каждой точке пропорциональна числу вихрей на единицу площади. Таким образом, профиль магнитного поля, проникающего в образец, определяется распределением вихрей вблизи границы.

Для расчета проникновения магнитного поля в образец прибегают к модели Бина, согласно которой все вихри в области, в которую проникло магнитное поле, находятся в так называемом „критическом состоянии“,

т.е. на грани равновесия, когда сила, действующая на каждый вихрь, равна максимальной силе его пиннинга α_m . Расчет показывает, что зависимость B от координаты x внутри образца в критическом состоянии описывается уравнением

$$\left| \frac{B}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} \right| = \alpha_m(B). \quad (1)$$

Для нахождения зависимости $B(x)$ необходимо знать зависимость α_m от магнитной индукции B (т.е. от плотности вихрей). Первоначально Бин предположил [1], что зависимость $\alpha_m(B)$ линейна, что дает линейную зависимость $B(x)$ (рис. 1, а). Ким и Андерсон [2] на основе анализа экспериментальных данных выдвинули предположение о независимости α_m от B , что приводит к параболическому профилю $B(x)$ (рис. 1, б).

Убедительных логических или математических обоснований модели Бина не существует. Она представляет собой чисто эвристическое предположение. Следует отметить, что прямой проверки ее правильности исследователи избегают. Казалось бы, достаточно задать известную зависимость $\alpha_m(B)$, вычислить по (1) распределение поля и сверить с экспериментом. Но проблема заключается в том, что зависимость $\alpha_m(B)$ обычно неизвестна, поэтому исследователи проделывают обратную операцию: находят экспериментальную зависимость $B(x)$, а потом вычисляют ту $\alpha_m(B)$, которая обеспечит найденную $B(x)$ в предположении справедливости модели Бина. Именно из анализа экспериментальных данных возникают и другие виды зависимости $\alpha_m(B)$, например $\alpha_m(B) \propto B/(B + B_0)^\beta$ для различных значений β [3,4] и

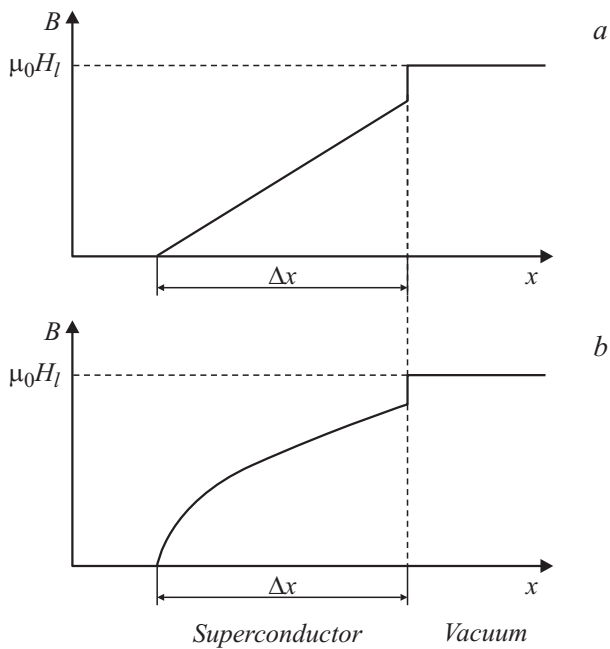


Рис. 1. Зависимость B от координаты x около границы в критическом состоянии.

т. д. Но такие операции не могут служить подтверждением правильности самой модели.

Целью настоящей работы является проверка справедливости модели критического состояния Бина для ситуации, в которой распределение вихрей и магнитного поля внутри образца может быть рассчитано достаточно точно. Такой ситуацией является проникновение магнитного поля в длинный периодически модулированный джозефсоновский контакт.

На базе условий квантования флюксоида в ячейках такого контакта может быть получена система уравнений в конечных разностях для анализа структуры возможных токовых состояний. Важным достоинством этой модели является изначально присутствующий в ней пиннинг, связанный с ячеистой структурой и определяемый конечной величиной энергии, необходимой для перемещения центра вихря в соседнюю ячейку. Это дает возможность исследовать влияние пиннинга, не вводя дополнительные механизмы зацепления вихрей. Поскольку сама идея модели Бина не основывается на деталях механизма пиннинга, то проверка ее применимости для данного случая может дать информацию относительно ее правильности в целом.

Модель и методика расчета

Искусственный периодически модулированный джозефсоновский контакт (рис. 2, *a*) представляет собой тонкий слой диэлектрика (плоскость xu) между двумя сверхпроводниками, пересеченный параллельными друг другу бесконечными вдоль оси z полосами диэлектрика толщины $2l$ вдоль оси y и ширины d вдоль оси x , пери-

одически расположенными вдоль оси x на расстоянии L друг от друга. Внешнее магнитное поле, а также оси вихрей направлены вдоль оси z . На рис. 2, *b* изображена структура искусственно создаваемого периодически модулированного джозефсоновского контакта [5]. На участках между полосами величина скачка фазы между сторонами контакта медленно меняется с координатой, в то время как при переходе через полосу она меняется скачком. Обозначим усредненное по k -му участку между полосами значение скачка через φ_k (рис. 2, *a*). Пусть скачок фазы на ближайшем к границе контакта участке равен φ_1 , и по мере продвижения внутрь φ_2 , φ_3 и т. д. Распределение величин φ описывает установившееся токовое состояние.

Далее мы будем интересоваться распределением фаз, токов и магнитного поля при адиабатическом включении внешнего магнитного поля H_e . При достаточно малых значениях H_e у границы контакта возникает мейснеровская конфигурация, когда величины φ_k убывают с ростом номера и равны нулю в глубине контакта. При этом магнитное поле, созданное приграничными токами, полностью компенсирует внешнее поле в глубине контакта. В работе [6] показано, что такая ситуация имеет место до тех пор, пока внешнее поле не достигнет некоторого максимально возможного значения H_S , причем вплоть до этого значения поля мейснеровское состояние является устойчивым.

Что же будет происходить, когда внешнее поле превысит величину H_S и мейснеровское состояние невозможно? Как известно [7], при отсутствии пиннинга в контакте установилась бы периодическая последовательность вихрей. Как влияет на ситуацию существование пиннинга? В работах [8,9] показано, что характер вихревой картины зависит от величины так называемого параметра пиннинга I , определение которого будет дано далее. При малых значениях I ситуация такая же, как при нулевом пиннинге, т. е. при превышении внешним полем некоторого значения $H_{\max} > H_S$ вихри заполняют

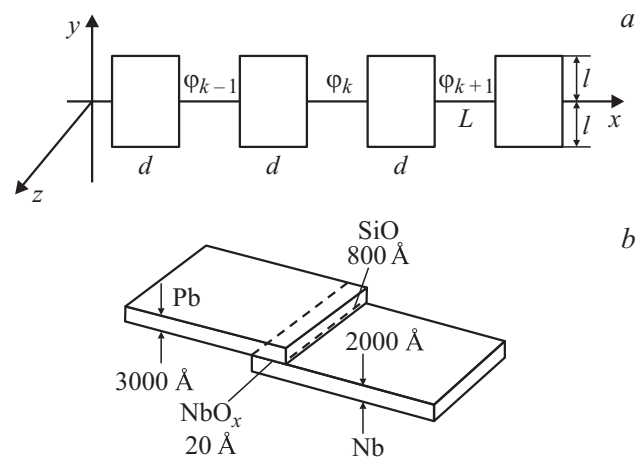


Рис. 2. *a* — модель периодически модулированного джозефсоновского контакта, *b* — структура искусственно созданного периодически модулированного джозефсоновского контакта.

сразу весь контакт от его границы до бесконечности. Это напоминает ситуацию в сверхпроводниках II рода. При больших же значениях I вихри с ростом поля постепенно продвигаются от границы внутрь контакта, а магнитное поле в глубине контакта остается равным нулю, т.е. ситуация аналогична сверхпроводнику III рода. В работе [8] на базе подхода, развитого в нелинейной физике [9], показано, что существует некоторое критическое значение параметра пиннинга $I_C = 0.9716$, разделяющее эти два режима. При $I > I_C$ существует возможность неограниченного роста поля к границе контакта, т.е. при любом внешнем поле у границы может существовать токовая конфигурация конечной длины, обеспечивающая полную компенсацию поля внутри контакта вдали от границы. В работе [10] также рассчитаны профили магнитного поля внутри контакта, соответствующие максимально возможной крутизне спада магнитного поля внутрь контакта. Однако возможность существования такой конфигурации не гарантирует, что именно она обязательно будет возникать при адиабатическом включении внешнего магнитного поля, т.е. при медленном монотонном увеличении его от нуля. Ведь это решение является всего лишь одним из возможных. Кроме того, необходим анализ его устойчивости, ведь ситуация с бесконечным количеством вихрей является энергетически более выгодной. Не произойдет ли при каком-то значении внешнего поля переход от приграничной конфигурации конечной длины к бесконечной последовательности вихрей, как это происходит в сверхпроводниках II рода при H_{C1} ?

В настоящей работе представлен расчет профиля магнитного поля внутри контакта, основанный на анализе непрерывного видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения ее энергии (точнее, потенциала Гиббса). В этом подходе процесс проникновения поля рассматривается как непрерывная трансформация устанавливающегося распределения токов. При этом в каких-то участках конфигурации токи убывают, в каких-то возрастают, т.е. вихри не ведут себя как заталкиваемые полем внутрь жесткие частицы, а как бы „втекают“ внутрь контакта.

Предложенный алгоритм позволяет найти ту конфигурацию, в которую переходит мейсснеровское состояние при малом превышении внешним полем значения H_S , и проследить ее развитие при дальнейшем увеличении поля, что одновременно дает ответ и на вопрос об устойчивости.

Мейсснеровская конфигурация

В каждой ячейке должно быть выполнено условие квантования флюксоида [8,10]

$$2\pi\Phi_m/\Phi_0 + \varphi_m - \varphi_{m+1} = 0, \quad (2)$$

где φ_m — скачок фазы на соответствующем джозефсоновском контакте, Φ_0 — квант магнитного потока, Φ_m —

полный магнитный поток через m -ю ячейку ($m \geq 1$), в рассматриваемой геометрии равный

$$\Phi_m = \mu_0 H S = \mu_0 S \left(\sum_{k=1}^m j_k L - H_e \right) = \mu_0 L S j_C \sum_{k=1}^m \sin \varphi_k - \Phi_e, \quad (3)$$

где j_C — критическая плотность тока, H_e и Φ_e — соответственно напряженность внешнего магнитного поля и его магнитный поток через ячейку площадью $S = 2ld$. Подставив (3) в (2) для различных m и вычтя из уравнения для $(m-1)$ -го контакта уравнение для m -го, получим следующую систему разностных уравнений:

$$\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1} = I \sin \varphi_m \quad (m \geq 2), \quad (4)$$

где $I = 2\pi\mu_0 L S j_C / \Phi_0$ — так называемый параметр пиннинга.

В качестве граничных условий к (4) используем стремление к нулю φ_m при стремлении m к бесконечности, а также условие (2) для $m = 1$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -I \sin \varphi_1 + 2\pi h, \quad (5)$$

где $h = H_e / H_0$ — нормированная напряженность внешнего поля, $H_0 = \Phi_0 / \mu_0 S$ — значение внешнего поля, при котором через каждую ячейку площадью S проходит 1 квант магнитного потока Φ_0 .

Найдем точное решение системы (4). Представим ее в виде рекуррентного закона

$$\varphi_{m+1} = 2\varphi_m - \varphi_{m-1} + I \sin \varphi_m \quad (m \geq 2). \quad (6)$$

Задаваясь значениями φ_1 , будем численно искать соответствующие им возможные значения φ_2 , при которых существует решение в виде монотонно убывающей с

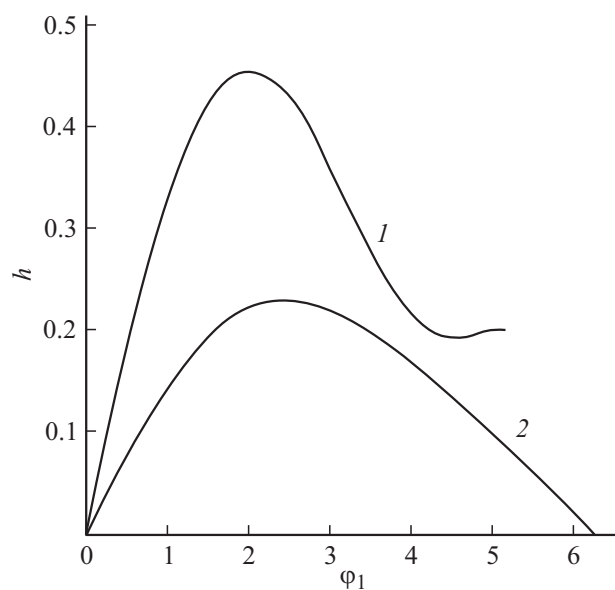


Рис. 3. Зависимость нормированной напряженности внешнего магнитного поля от скачка фазы на участке, ближайшем к границе контакта, для $I = 1.6$ (кривая 1) и $I = 0.5$ (кривая 2).

ростом m комбинации значений φ_m . Далее из уравнения (5) найдем соответствующее полученному решению значение нормированной напряженности внешнего магнитного поля h . На рис. 3 приведены полученные графики зависимости $h(\varphi_1)$ для некоторых значений I . Начальный участок кривой до максимума соответствует мейсснеровскому режиму. Максимально возможное значение h_S соответствует величине магнитного поля H_S , выше которой мейсснеровское решение отсутствует. Развитие ситуации при дальнейшем увеличении поля будем исследовать на базе анализа потенциала Гиббса системы.

Случай $I > I_C$

Как было сказано выше, при таких значениях параметра пиннинга существует возможность неограниченного роста поля к границе контакта [10], т.е. при любом внешнем поле может существовать приграничная токовая конфигурация конечной длины, обеспечивающая полную компенсацию поля внутри контакта вдали от границы.

Рассмотрим конфигурацию, в которой скачки фазы φ_m в контактах с $m > N + 1$ равны нулю. По мере роста внешнего поля и увеличения толщины приграничного слоя величина N может выбираться сколь угодно большой, поэтому это условие не ограничивает общность задачи. Потенциал Гиббса такой конфигурации высотой в 1 м записывается в виде [2]

$$G = E - \int BHdV = \frac{\Phi_0^2}{4\pi^2\mu_0 S} \times \left[\sum_{i=1}^{N+1} \left(\frac{1}{2}(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2 + I(1 - \cos \varphi_i) \right) - 2\pi\varphi_1 h \right]. \quad (7)$$

При выводе (7) мы учли, что в рассматриваемой геометрии термодинамическая напряженность магнитного поля H во всех точках одинакова и равна напряженности внешнего поля H_e , и воспользовались соотношениями (2) (при $\varphi_{N+2} = 0$). Тогда

$$\int BHdV = H_e \sum_i \Phi_i = \frac{H_e \Phi_0}{2\pi} \sum_{i=1}^{N+1} (\varphi_i - \varphi_{i+1}) = \frac{H_e \Phi_0}{2\pi} \varphi_1.$$

Будем трактовать величину G как высоту (или потенциальную энергию) горного рельефа, заданного на многомерном множестве координат. Установившиеся при каком-либо значении внешнего поля h конфигурации соответствуют минимумам энергии (впадинам) в этом рельефе. Если h скачком увеличится на какую-то малую величину, это приведет к некоторому видоизменению рельефа, в результате чего конфигурация (набор координат), соответствовавшая минимуму прежнего рельефа, теперь окажется на склоне нового. Дальнейшее изменение формы этой конфигурации можно рассматривать как „скатывание“ по новому рельефу с уменьшением

„потенциальной энергии“. Пусть этот процесс происходит как результат большого количества маленьких шагов. Логично предположить, что в каждой „точке“ скатывание происходит вдоль линии наибо́льшего спуска, т.е. вдоль градиента функции G . Это значит, что при каждом шаге все „координаты“ φ_i получают приращения, пропорциональные соответствующей проекции градиента: $\Delta\varphi_i = -(\partial G/\partial\varphi_i)\delta$, где $\delta > 0$ — малый постоянный множитель, задающий величину шага. Далее вычисляем все $\partial G/\partial\varphi_i$ в новой точке, т.е. при новых значениях φ_i , и производим следующий шаг. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не придем к новой устойчивой конфигурации, находящейся во впадине рельефа, соответствующего заданному h .

Перед тем как записать выражения для $\partial G/\partial\varphi_i$, учтем граничное условие равенства нулю магнитного поля в глубине контакта. Его можно записать в виде

$$I \sum_{m=1}^{N+1} \sin \varphi_m = 2\pi h. \quad (8)$$

Условие (8) можно трактовать как задание φ_{N+1} в виде функции всех остальных φ_m

$$\varphi_{N+1} = \arcsin \left(2\pi h / I - \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i \right), \quad (9)$$

что следует учитывать при вычислении производных $\partial G/\partial\varphi_i$. Тогда выражения для „проекций градиента“ G имеют вид

$$\begin{aligned} \partial G/\partial\varphi_i &= 2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1} + I \sin \varphi_i \\ &\quad - \partial G/\partial\varphi_{N+1} \cos \varphi_i / \cos \varphi_{N+1} \quad (2 \leq i \leq N), \end{aligned} \quad (10a)$$

$$\begin{aligned} \partial G/\partial\varphi_1 &= \varphi_1 - \varphi_2 + I \sin \varphi_1 - 2\pi h \\ &\quad - \partial G/\partial\varphi_{N+1} \cos \varphi_1 / \cos \varphi_{N+1}, \end{aligned} \quad (10b)$$

$$\partial G/\partial\varphi_{N+1} = \varphi_{N+1} - \varphi_N + I \sin \varphi_{N+1}. \quad (10c)$$

В качестве начальной точки для этого алгоритма возьмем точку на границе мейсснеровского режима H_S , т.е. решение системы (6) для такого φ_1 , при котором h равно своему максимальному значению h_S . Дадим h какое-то небольшое приращение Δh и предоставим возможность „точке“ двигаться по „линии наибо́льшего спуска“, как это объяснялось выше. В смысле программирования это означает задать цикл, в каждом шаге которого новые значения φ_m при $1 \leq m \leq N$ вычисляются по формуле $\varphi_m = \varphi_m - (\partial G/\partial\varphi_m)\delta$ с учетом (10), а φ_{N+1} — по (9). В конце концов придем к конфигурации, в которой все производные $\partial G/\partial\varphi_i$ обратятся в нуль, т.е. будут выполнены условия (4). Это и есть искомая устойчивая равновесная конфигурация, соответствующая $h = h_S + \Delta h$. Далее, начиная от этой конфигурации, можно дать новое приращение Δh и т.д. Таким способом можно исследовать распределение скачков фазы φ_i , а значит, токов и магнитных полей внутри контакта, во всем диапазоне изменения внешнего поля.

Случай $I < I_C$

При таких значениях I приграничная структура может существовать лишь до значения внешнего поля $H_{\max}(I)$. При больших значениях поля длина приграничной конфигурации, рассчитанная по методу, использованному ранее, по ходу расчета все время увеличивается, что означает, что расчет может продолжаться бесконечно долго, а поле проникает в контакт на бесконечную глубину. Однако детали этого процесса остаются неясными. Всегда ли в контакте устанавливается квазипериодическая цепочка вихрей, в которой расстояние между соседями слегка отклоняется от среднего в ту или иную сторону? Могут ли сосуществовать вихри, содержащие различное число квантов потока Φ_0 ? Реализуется ли при каком-то значении поля ситуация, когда каждая ячейка содержит целое число квантов Φ_0 , а суммарный магнитный момент контакта обращается в нуль? Существует ли периодичность по внешнему магнитному полю, связанная с квантованием магнитного потока или флюксонида?

Ограничение длины контакта [11] позволяет найти решение задачи, поскольку две симметричные последовательности вихрей, идущие с разных концов контакта, встретившись в его центре, остановятся. Пусть длина контакта велика по сравнению с размерами приграничной области. Тогда при расчете мейсснеровской токовой конфигурации можно считать контакт бесконечным, как и в предыдущем случае.

Результаты расчетов, их интерпретация и анализ

Контакт бесконечной длины ($I > I_C$)

Компьютерные расчеты полностью подтвердили возможность использования предложенного алгоритма для расчета проникновения поля в контакт. Действительно, постепенно увеличивая значение h , удается проследить последовательное изменение профиля проникающего в контакт магнитного поля. При I , превышающем некоторое критическое значение I_C , расчет при любом значении внешнего поля h (которое является постоянным параметром на каждом этапе расчета) приводит к приграничной конфигурации конечной длины, удовлетворяющей условиям (4). Глубина проникновения увеличивается с ростом параметра h . Если же $I < I_C$, то такая картина имеет место лишь до некоторого значения $h_{\max}(I)$. При больших значениях поля длина приграничной конфигурации по ходу расчета все время увеличивается, при этом потенциал Гиббса монотонно убывает, но условия (4) продолжают не выполняться. Это означает, что расчет может продолжаться бесконечно, а поле проникает в контакт на бесконечную глубину.

Расчет показывает, что при $I = 0.95$ еще существует максимальное значение h_{\max} , но уже при $I = 1$ решение находится при любом h . Это значит, что критическое

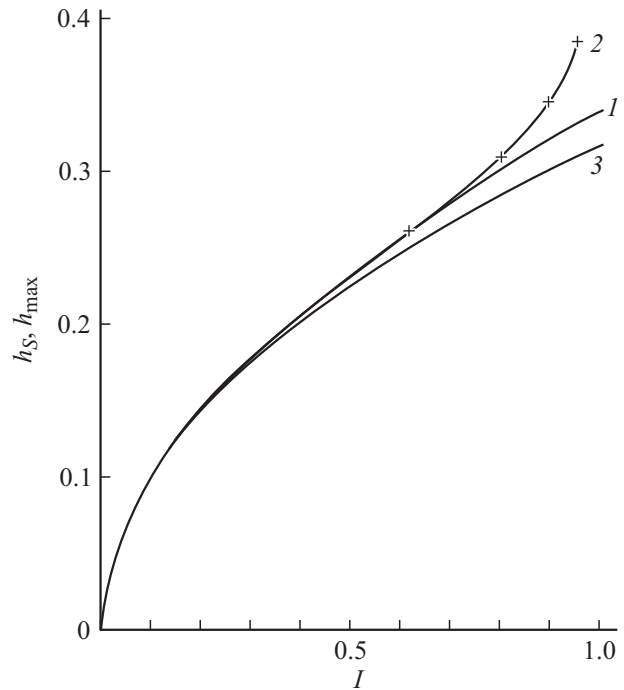


Рис. 4. Зависимости $h_S(I)$ (кривая 1) и $h_{\max}(I)$ (кривая 2) в области $I < I_C$, а также график \sqrt{I}/π (кривая 3), соответствующий границе мейсснеровского режима при малом пиннинге.

значение I_C находится между 0.95 и 1, что согласуется со значением $I_C = 0.9716$, полученным в [5]. На рис. 4 приведены полученные зависимости $h_S(I)$ и $h_{\max}(I)$ в области $I < I_C$, а также кривая \sqrt{I}/π , соответствующая границе мейсснеровского режима при малом пиннинге (квазинепрерывная конфигурация [6]). Из сопоставления кривых видно, что проникновение вихрей в приграничную область контакта заметно изменяет значение границы мейсснеровского режима лишь при достаточно больших значениях параметра пиннинга, близких к критическому.

Согласно (2), магнитное поле внутри m -й ячейки может быть вычислено по формуле

$$h_m = (\varphi_{m+1} - \varphi_m)/2\pi. \tag{11}$$

На рис. 5 приведены рельефы магнитного поля внутри контакта для некоторых небольших значений I (1.2, 1.5, 2.0). Они иллюстрируют возможность интерпретировать полученную конфигурацию φ_m как последовательность вихрей, проникших в контакт. Из аналогии с вихрями в длинном джозефсоновском контакте [7] следует, что центры вихрей на рис. 5 находятся в ячейках с максимальными значениями h_m . При этом анализ распределения скачков фазы φ_m показывает, что это те ячейки, в которых φ_m впервые превосходят значения $2\pi k + \pi$ (k — целое число). Отсюда следует, что для трактовки картины как последовательности вихрей нужно каждый раз, как только φ_m превосходит π , вычитать из него целое число раз по 2π , так чтобы все $|\varphi_m| < \pi$. При

этом количество вычтенных 2π равно числу квантов магнитного потока в соответствующем вихре.

Вихревая интерпретация позволяет объяснить поведение кривых рис. 5. На самом нижнем участке имеются мелкие осцилляции, поскольку между вихрями (с одним квантом Φ_0) есть промежутки. Второй участок осцилляций определяется чередованием ячеек с двумя и одним квантами Φ_0 , третий — с тремя и двумя Φ_0 и т.д. Участки монотонного роста, напротив, соответствуют случаям, когда вихри с одинаковым количеством Φ_0 находятся в нескольких ячейках подряд.

Расчет по вышеописанному алгоритму показывает, что минимальное значение I , при котором в рельефе отсутствуют спадающие участки (т.е. нет осцилляций), равно 3.41. На рис. 6 изображены зависимости для случаев $I = 3.40$ и $I = 3.42$. На первой из них есть спады и подъемы, а вторая имеет монотонный характер. Отме-

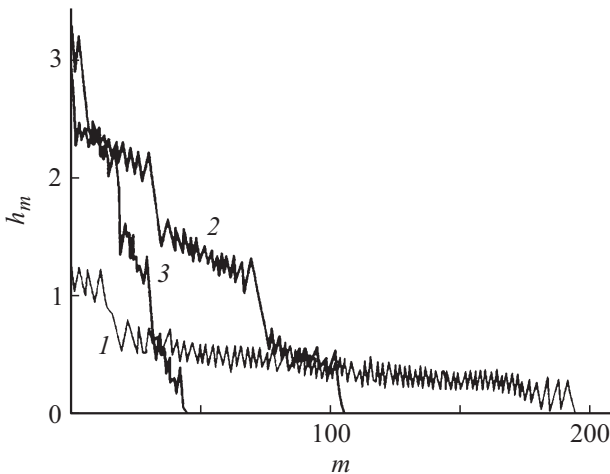


Рис. 5. Зависимости магнитного поля внутри контакта от расстояния до границы (в количестве ячеек) для небольших значений параметра пиннинга: $I = 1.2$ (кривая 1), $I = 1.5$ (кривая 2), $I = 2.0$ (кривая 3).

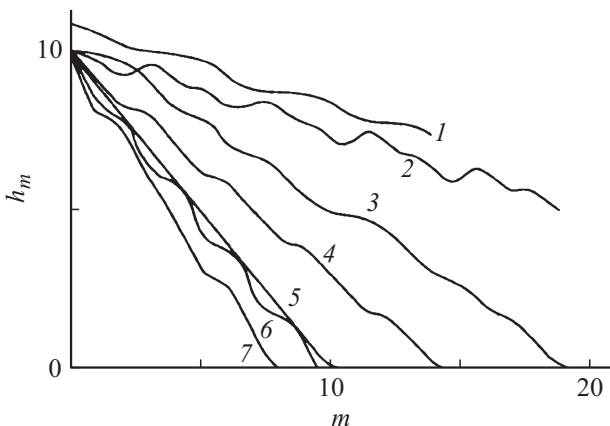


Рис. 6. Зависимости магнитного поля внутри контакта от расстояния до границы для больших значений параметра пиннинга: $I = 3.40$ (кривая 1), 3.40 (2), 5.0 (3), 5.5 (4), 9.0 (5), 10.0 (6), 10.5 (7).

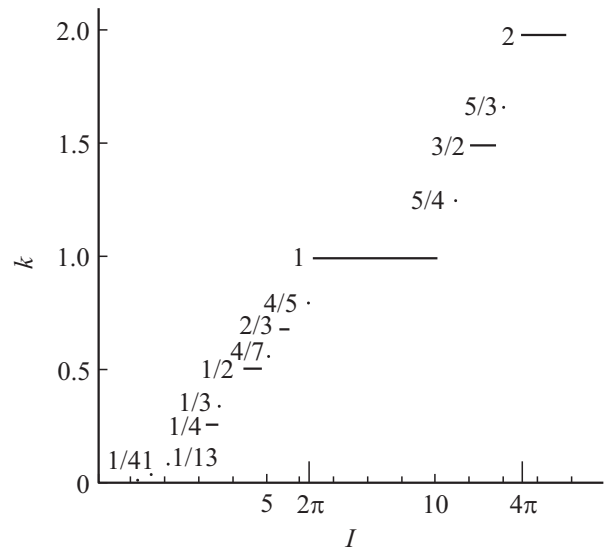


Рис. 7. Зависимость крутизны спада магнитного поля внутри контакта (т.е. усредненного изменения величины h на длине одной ячейки) от I .

тим, что в [10] проведен приближенный аналитический расчет этого значения I , дающий значение 3.35.

На рис. 6 приведены зависимости и для больших значений I . Видно, что с ростом параметра пиннинга крутизна рельефа возрастает. Но иногда один и тот же наклон, т.е. один и тот же профиль поля в образце, наблюдается в целом диапазоне значений I .

Как видно из рис. 5 и 6, во всех случаях проникающее в контакт магнитное поле зависит от глубины почти линейно, с некоторыми более или менее выраженными осцилляциями. Крутизна рельефа увеличивается с ростом параметра пиннинга. На рис. 7 изображен график зависимости крутизны k (т.е. усредненного изменения величины h на длине одной ячейки) от I . Значения коэффициента наклона k представляют собой рациональные дроби. Один и тот же наклон может реализоваться при различных значениях I , расположенных в непрерывном диапазоне. Такие же результаты получены в работе [8], в которой рассчитывались наиболее круто спадающие рельефы. Этот факт позволяет сделать вывод о том, что при адиабатическом включении внешнего магнитного поля реализуется конфигурация, обеспечивающая максимальную крутизну рельефа магнитного поля у границы контакта. Об этом же говорит и совпадение найденного I_C с полученным в [8,9] значением $I_C = 0.9716$, а также сходство зависимости $h_{\max}(I)$ (рис. 3) с кривой, полученной в работе [8].

Контакт конечной длины ($I < I_C$)

Для исследования было выбрано значение $I = 0.9 < I_C$, при котором $h_S = 0.318$, а $h_{\max} = 0.343$. Пусть длина контакта равняется $2N = 200$ ячеек. Компьютерные расчеты полностью подтвердили возмож-

Результаты расчета распределения вихрей для различных значений h

h	Число ячеек до следующего вихря с одним Φ_0
0.344	8655454444344434434
0.35	234434343434343434343
0.5	11211212121121212112121121212121
0.9	001001000100010010001000100100010001000100010001000100010001000
1	001001000100010010001000100100010001000100010001000010001000010000
1.3184	001001000100010010001000100010001000100010001000010000100000000000000
1.31841	001001000100010010001000100010001000100010001000010000100000100000000000X0000000
1.334	10001000100010001000010001000010000100001000000000X0000000X00000000000X0000X00000X0000
1.35	00X000X000X0000X000X000X000X000X000X000X000X000X000X000X000X000X000X000X000X000X000X...

ность использования предложенного алгоритма для расчета проникновения поля в контакт. Действительно, постепенным увеличением значения h от $h_S = 0.318$ удастся проследить последовательное изменение конфигурации токов, причем при каждом h найденные конфигурации удовлетворяют условиям (4). Пока $h < h_{max}$, расчет при любом значении внешнего поля h (которое является постоянным параметром на каждом этапе расчета) приводит к приграничной конфигурации конечной длины. Глубина проникновения увеличивается с ростом параметра h . При $h > h_{max}$ токовая конфигурация теряет характер приграничной структуры и принимает вид бесконечной вихревой последовательности.

Полученную конфигурацию φ_m , как и ранее, можно интерпретировать как последовательность вихрей, проникших в контакт. В таблице приведены результаты расчета распределения вихрей для различных значений внешнего поля h . Цифры означают количество ячеек до следующего вихря с одним квантом магнитного потока Φ_0 . Отсчет начинается от середины контакта, т.е. от ячейки № 100, и идет в сторону границы. Крестики обозначают вихри, содержащие $2\Phi_0$. Видно, что при $h = 0.344$ расстояние между двумя центральными вихрями намного больше, чем между другими (из симметрии следует, что оно равно удвоенному первому значению, т.е. 16 ячеек). В этом случае конфигурация еще сохраняет черты приграничной структуры, так как даже малое взаимное отталкивание двух центральных вихрей позволяет организоваться вихревой структуре, сжимающейся по мере приближения к границе. При больших значениях h вплоть до 1 наблюдаются квазиоднородные последовательности вихрей, расстояния между которыми незначительно отклоняются от среднего значения, которое убывает с ростом h . Начиная с некоторого значения h , вихри могут занимать соседние ячейки, т.е. расстояние между ними равно нулю. В этом случае понятие вихря используется только в смысле сформулированного выше алгоритма. При $h = 1$ поле таково, что магнитный поток внешнего поля через каждую ячейку равен Φ_0 . Легко видеть, что система уравнений (4) и (5) может быть удовлетворена решением $\varphi_k = 2\pi k$, при котором каждая ячейка содержит один вихрь. В этом случае все токи, а также суммарный

магнитный момент всего контакта обращаются в нуль, т.е. внешнее поле полностью проникает в контакт. Однако это лишь одно из бесчисленного множества возможных решений системы, и предыстория развития, т.е. адиабатическое увеличение внешнего поля, не дает ему возможности реализоваться. К моменту, когда $h = 1$, в глубине контакта еще существуют ячейки, не содержащие вихрей. Из строки таблицы для $h = 1$ можно видеть, что по мере приближения к краю контакта последовательность вихрей, занимающих соседние ячейки, становится длиннее, чем в глубине. При дальнейшем росте h эта последовательность растет и достигает максимальной длины при $h = 1.3184$, когда отклонение от ситуации с одним Φ_0 в каждой ячейке проявляется в 20-й ячейке от края контакта. При больших значениях h вблизи границы контакта начинают возникать вихри с $2\Phi_0$ (в таблице обозначены крестиками). С ростом h все больше таких вихрей проникает в контакт, пока при $h = 1.350$ такие вихри не выстроятся в квазиоднородную последовательность по всей длине контакта. При дальнейшем увеличении h период этой последовательности, т.е. среднее расстояние между соседними вихрями, будет уменьшаться, а среднее магнитное поле внутри контакта — расти.

Нормированную магнитную индукцию, равную среднему значению магнитного поля в контакте, согласно (11), найдем по формуле

$$\begin{aligned}
 b = B/B_0 &= \sum_{m=1}^N h_m / N = \sum_{m=1}^N (\varphi_{m+1} - \varphi_m) / 2\pi N \\
 &= (\varphi_1 - \varphi_{N+1}) / 2\pi N = \varphi_1 / 2\pi N, \tag{12}
 \end{aligned}$$

где $B_0 = \Phi_0/S$ — магнитная индукция, при которой через каждую ячейку площадью S проходит 1 квант магнитного потока Φ_0 .

На рис. 8 приведена зависимость средней индукции b в контакте от внешнего поля h (кривая 1). Легко видеть почти строгую периодичность кривой с периодом 1 по обеим осям. Отклонения от периодичности наблюдаются только при малых значениях h , и связаны они с тем, что на участке $0 < h < 0.318$ в контакте нет вихрей (мейсснеровский режим), а на участке $1 < h < 1.318$

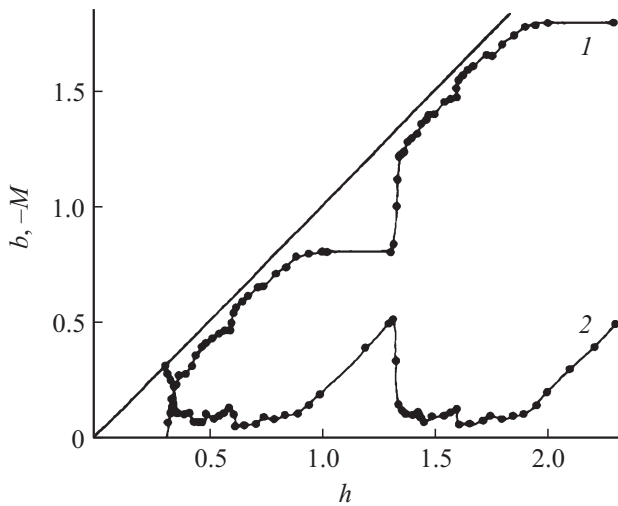


Рис. 8. Зависимости средней индукции b (кривая 1) и магнитного момента единицы объема $-M$ (кривая 2) от внешнего поля h .

вихри есть (в связи с предысторией) (см. таблицу). При дальнейшем увеличении внешнего поля и при переходе к вихрям с большим количеством квантов Φ_0 периодичность будет соблюдаться строго, поскольку указанного выше различия в исходных ситуациях уже не будет.

Намагниченность M , т.е. магнитный момент единицы объема, найдем из соотношения $M = b - h = \varphi_1/2\pi N - h$. Отметим, что если поле в контакте нельзя считать квазиоднородным, то намагниченность не является корректной характеристикой, но отношение полного магнитного момента контакта к его объему в рассматриваемой геометрии описывается тем же выражением. На рис. 8 приведен график зависимости величины $-M = (h - \varphi_1/2\pi N)$ от магнитного поля (кривая 2). Из него видно, что магнитный момент контакта никогда не обращается в нуль, хотя, как это указывалось выше, математически такая возможность при целых значениях h существует.

На рис. 9 и 10 приведены графики зависимостей полей h_m , рассчитанных по формуле (8), от расстояния ячейки от границы. Вихревая интерпретация позволяет объяснить поведение этих кривых. При $h < 0.318$ имеем эффект Мейсснера, т.е. токи и магнитное поле существуют только в приграничной области. При $0.318 < h < 0.344$ образуются приграничные структуры в виде последовательности вихрей вблизи границы. Примером этого является график при $h = 0.342$ — кривая 1 на рис. 9. Видно, что в глубь контакта вихри не проходят. При $h > 0.344$ устанавливается квазиоднородная последовательность вихрей во всем контакте, примером чего является кривая 1 на рис. 10 для $h = 0.35$, осцилляции которой соответствуют чередованию ячеек с квантом Φ_0 и без него. При $h = 1.3184$ (кривая 2 на рис. 10) имеем аналог мейсснеровского режима, когда значительное число последовательных ячеек у границы содержит по одному кванту Φ_0 , но в глубине контакта такие вихри

расположены через одну ячейку. При $h > 1.3184$ в контакт начинают проникать вихри с двумя квантами Φ_0 . Чем больше поле, тем больше таких вихрей войдет в контакт. Примером этой ситуации является график для $h = 1.342$ — кривая 2 на рис. 9. При $h = 1.35$ (кривая 3 на рис. 10) ситуация соответствует квазипериодической последовательности вихрей с чередованием одного и двух квантов Φ_0 в ячейке. Периодичность зависимости ситуации от h подтверждается подобием кривых 1 и 2 на рис. 9 и 10, значения h для которых различаются на 1.

Таким образом, при изменении внешнего поля мы имеем дело с двумя возможными ситуациями: а) квазиоднородное проникновение поля в контакт, б) частичное проникновение вихрей с увеличенным на 1 числом квантов Φ_0 в приграничную область. В первой ситуации поле во всех точках контакта в среднем одинаково. А во втором случае контакт разделяется на две части, в которых поле имеет различные значения, как видно из кривых рис. 9. Величина h , соответствующая окончанию первой и началу второй ситуации, не зависит

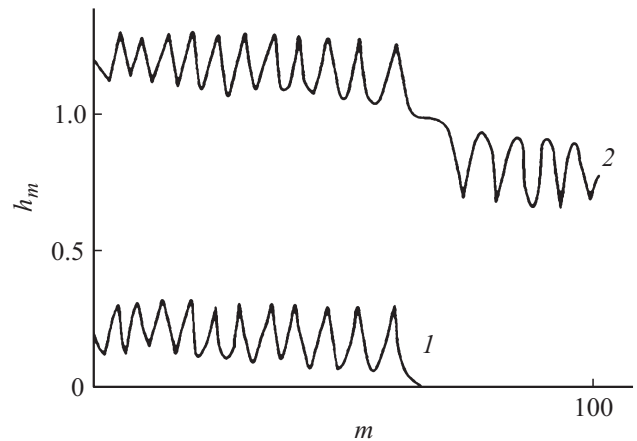


Рис. 9. Зависимости магнитного поля внутри контакта от расстояния до границы для некоторых значений внешнего магнитного поля: $h = 0.342$ (кривая 1), 1.342 (2).

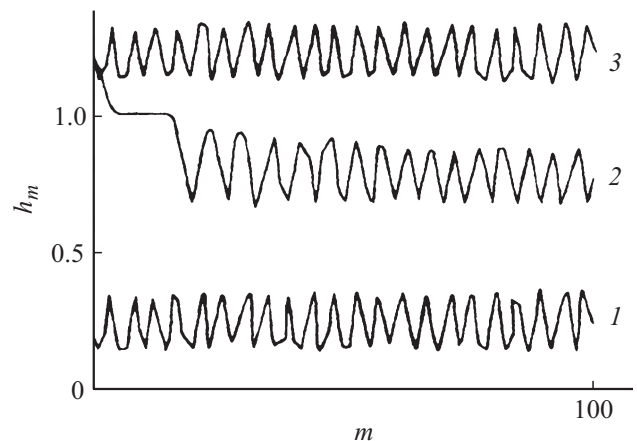


Рис. 10. Зависимости магнитного поля внутри контакта от расстояния до границы для некоторых значений внешнего магнитного поля: $h = 0.35$ (кривая 1), 1.3184 (2), 1.35 (3).

от размеров контакта. А вот поле, при котором заканчивается вторая и начинается первая стадия, соответствует моменту, когда вихри заполнили весь контакт. Поэтому оно зависит от длины контакта.

Анализ корректности модели Бина

Полученные данные позволяют проанализировать, выполняется ли в рассмотренном случае модель Бина.

1. Модель Бина не предсказывает существования критического значения параметра пиннинга I_C . Максимально возможное значение силы пиннинга существует всегда, что, по идее Бина, должно было бы обеспечить существование приграничной системы вихрей при любых значениях параметров контакта и внешнего поля. В рамках этой модели не находит объяснения квазиоднородное заполнение вихрями всего сечения контакта при $I < I_C$ и $h > h_{\max}$.

2. Идея Бина о критическом состоянии подразумевает, что все вихри находятся на грани равновесия, т.е. при увеличении внешнего магнитного поля все они одновременно должны прийти в движение и переместиться в новое положение. Однако данные таблицы показывают, что это не так: в каждый момент перемещается какой-то один вихрь, а остальные остаются на месте.

3. Модель Бина никоим образом не объясняет скачкообразного изменения крутизны профиля поля около границы (рис. 7) с изменением величины параметра пиннинга I , а также обязательного равенства этой крутизны рациональному числу.

Из вышеизложенного можно сделать вывод о нарушении предположений Бина и некорректности использования модели Бина для анализа происходящих процессов. Изложенные результаты дают основания сомневаться в правильности модели Бина и в других ситуациях.

Заключение

Рассчитаны конфигурации токов и профиль магнитного поля, проникающего внутрь длинного периодически модулированного джозефсоновского контакта. Для расчета использован подход, основанный на анализе непрерывного видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения ее потенциала Гиббса. Процесс проникновения магнитного поля в контакт рассматривается как непрерывная трансформация устанавливающегося распределения токов. При этом в каких-то участках конфигурации токи убывают, в каких-то возрастают, т.е. вихри не ведут себя как заталкиваемые полем внутрь жесткие частицы, а как бы „втекают“ внутрь контакта. Предложенный алгоритм позволяет найти ту конфигурацию, в которую переходит мейснеровское состояние при малом превышении внешним полем значения H_S , и проследить ее развитие при дальнейшем увеличении поля, что одновременно дает ответ и на вопрос об устойчивости.

Компьютерные расчеты по предложенному методу показали, что существует критическое значение I_C , находящееся в интервале 0.95–1.00, разделяющее два возможных режима проникновения в контакт внешнего магнитного поля. При $I > I_C$ расчет при любом значении внешнего поля H_e приводит к приграничной токовой конфигурации конечной длины, полностью компенсирующей внешнее поле в глубине контакта. Если же $I < I_C$, то такая ситуация реализуется лишь до некоторого значения внешнего поля H_{\max} . При больших значениях поля оно проникает в контакт на бесконечную глубину. Построен график зависимости $H_{\max}(I)$.

В тех случаях, когда в глубине контакта магнитное поле равно нулю (как при $I > I_C$, так и при $I < I_C$, но $H_e < H_{\max}$), у границы оно уменьшается с глубиной почти линейно, с некоторыми более или менее выраженными осцилляциями. Значения коэффициента наклона представляют собой рациональные дроби и остаются постоянными в конечных интервалах I . При выходе I за верхнюю границу такого интервала коэффициент наклона скачком увеличивается и принимает значение другой рациональной дроби.

Сопоставление полученных выводов и графиков с результатами исследований, в которых рассчитывались наиболее круто спадающие рельефы, позволяет сделать вывод о том, что при адиабатическом включении внешнего магнитного поля при всех его значениях реализуются конфигурации, обеспечивающие максимальную крутизну роста магнитного поля с приближением к границе контакта.

На основании приведенных результатов сделан вывод о нарушении предположений Бина и некорректности использования модели Бина для анализа происходящих процессов.

Список литературы

- [1] *Bean C.P.* // Phys. Rev. Lett. 1962. Vol. 8. P. 250.
- [2] *Kim Y.B., Anderson P.W.* // Rev. Mod. Phys. 1964. Vol. 36. P. 39.
- [3] *Muller K.-H., Macfarlane J.C., Driver R.* // Rev. Mod. Phys. 1989. Vol. 158. P. 69.
- [4] *Lam Q.H., Kim Y., Jeffries C.D.* // Phys. Rev. B. 1990. Vol. 42. P. 4848.
- [5] *Golubov A.A., Serpuchenko I.L., Ustinov A.V.* // Sov. Phys. JETP. 1988. Vol. 67. P. 1256.
- [6] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 10. С. 68.
- [7] *Кулик И.О., Янсон И.К.* Эффект Джозефсона в сверхпроводящих туннельных структурах. М.: Наука, 1970.
- [8] *Dorogovtzev S.N., Samuhin A.N.* // Europhys. Lett. 1994. Vol. 25. P. 693.
- [9] *Заславский Г.М., Сагдеев Р.З.* Введение в нелинейную физику. М.: Наука, 1988.
- [10] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. № 2. С. 36.
- [11] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. № 12. С. 19.