

01
Математическое моделирование диодной системы с полевым острием цилиндрической формы

© Е.М. Виноградова, Н.В. Егоров, А.А. Климаков

Санкт-Петербургский государственный университет,
 факультет прикладной математики — процессов управления,
 198504 Россия, Санкт-Петербург
 e-mail: vincat2008@yandex.ru, robb7@mail.ru

(Поступило в Редакцию 24 марта 2014 г.)

Продемонстрирована диодная система с полевым острием цилиндрической формы. Катод на плоской подложке представляет собой цилиндр с закругленной вершиной, анод — плоскость. Влияние пространственного заряда пучка не учитывается. Все геометрические размеры диодной системы являются параметрами задачи. Для нахождения распределения электростатического потенциала во всей области системы используется метод перекрытия областей, основанный на методе разделения переменных.

Введение

Эмиттеры, принцип действия которых основан на явлении полевой электронной эмиссии, обладают уникальными свойствами [1–4]. В настоящее время проявляется большой интерес к вакуумной нано- и микроэлектронной оптике, основу которой составляют процессы формирования, транспортировки и фокусировки пучков заряженных частиц электрическими и магнитными полями. В большой степени данный интерес обусловлен эмиссионными свойствами углеродных материалов и соответственно развитием микро- и нанотехнологии изготовления полевых катодов, в том числе — углеродных нанотрубок (УНТ) [5–9]. Подобные эмиттеры на основе одиночных или массивов УНТ позволяют получить большие значения напряженности электростатического поля на вершине при достаточно низких анодных напряжениях [10,11].

В настоящей работе вычисляется распределение электростатического потенциала во всей области осесимметричной диодной системы на основе полевого острия цилиндрической формы с закругленной вершиной, расположенного на плоской подложке, анод — плоскость. Для решения задачи используется метод перекрытия областей, с помощью которого решение исходной граничной задачи сводится к нахождению неизвестных коэффициентов в разложении потенциала по собственным функциям из системы линейных алгебраических уравнений с постоянными коэффициентами.

1. Постановка задачи

Задача нахождения распределения осесимметричного электростатического потенциала будет решаться в цилиндрической системе координат (r, z) .

Рассмотрим диодную систему с тонким полевым острием на плоской подложке (рис. 1).

Потенциал катода и подложки равен нулю, потенциал анода — V . При расчете потенциала во всей внутренней

области системы вместо реального острия рассматривается виртуальный катод, совпадающий с нулевой эквипотенциальной поверхностью [12–15]. „Тело“ острия представляет собой цилиндрическую поверхность. Для того чтобы получить требуемую закругленную форму вершины виртуального катода, на оси системы вблизи вершины цилиндра помещается точечный заряд q (рис. 2).

Параметры задачи: $z = 0$ — поверхность подложки острия, $z = L$ — длина острия, $z = Z_1$ — длина цилиндра, моделирующего „тело“ острия, $r = R_1$ — радиус цилиндра, $(r = 0, z = Z_q)$ — координаты точечного заряда, $z = Z_2$ — поверхность анода, $r = R_2$ — радиус границы диодной системы по переменной r , $U(r, 0) = 0$ — граничные условия на подложке острия, $U(z, R_1) = 0$, $(0 \leq z \leq Z_1)$, $U(r, Z_1) = 0$, $(0 \leq r \leq R_1)$ — граничные условия на острие, $U(r, Z_2) = V$ — граничные условия

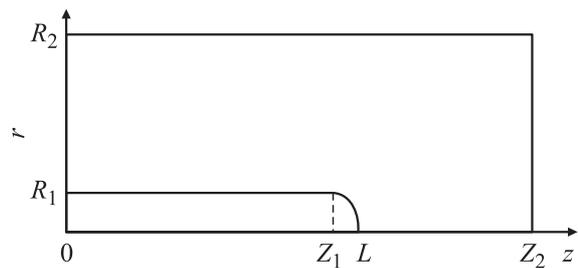


Рис. 1.

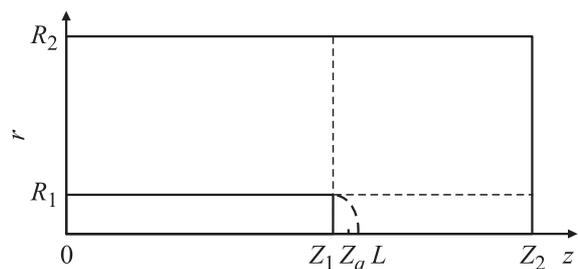


Рис. 2.

на аноде, $U(R_2, z) = V \frac{z}{Z_2}$, $0 \leq z \leq Z_2$ — граничные условия при $r = R_2$, q — величина точечного заряда.

2. Математическая модель

Функция распределения электростатического потенциала удовлетворяет уравнению Пуассона с граничными условиями

$$\begin{aligned} \Delta U(r, z) &= -\frac{\rho(r, z)}{\varepsilon_0}, \\ U(r, 0) &= 0, \quad 0 \leq r \leq R_2, \\ U(r, Z_1) &= 0, \quad 0 \leq r \leq R_1, \\ U(r, Z_2) &= V, \quad 0 \leq r \leq R_2, \\ U(R_1, z) &= 0, \quad 0 \leq z \leq Z_1, \\ U(R_2, z) &= V \frac{z}{Z_2}, \quad 0 \leq z \leq Z_2, \end{aligned} \tag{1}$$

Будем считать, что заряд $q(0, Z_q)$ распределен в малом объеме [16,17]

$$r < \delta_1, \quad |z - Z_q| < \delta_2$$

с постоянной объемной плотностью заряда ρ так, что

$$q = \lim_{\substack{\delta_1 \rightarrow 0 \\ \delta_2 \rightarrow 0}} \rho 2\pi \delta_1^2 \delta_2. \tag{2}$$

Тогда функция $\rho(r, z)$ в правой части уравнения Пуассона для граничной задачи (1) определяется следующим образом:

$$\rho(r, z) = \begin{cases} \rho, & r < \delta_1, \quad |z - Z_q| < \delta_2, \\ 0, & r > \delta_1 \quad \text{или} \quad |z - Z_q| > \delta_2. \end{cases} \tag{3}$$

3. Решение граничной задачи (1)–(3)

Для решения граничной задачи (1)–(3) разобьем всю внутреннюю область диодной системы на 2 подобласти, перекрывающих друг друга:

$$1 \text{ — } (R_1 \leq r \leq R_2, \quad 0 \leq z \leq Z_2),$$

$$2 \text{ — } (0 \leq r \leq R_2, \quad Z_1 \leq z \leq Z_2).$$

Рассмотрим следующую граничную задачу в области 2:

$$\begin{aligned} \Delta U_q(r, z) &= \frac{\rho(r, z)}{\varepsilon_0}, \\ U_q(r, Z_1) &= 0, \quad 0 \leq r \leq R_2, \\ U_q(r, Z_2) &= 0, \quad 0 \leq r \leq R_2, \\ U_q(R_2, z) &= 0, \quad Z_1 \leq z \leq Z_2, \end{aligned} \tag{4}$$

где правая часть уравнения Пуассона определяется по формулам (2)–(3).

Решение задачи (4) имеет вид [16] при $Z_1 \leq z < Z_q$

$$U_q(r, z) = \frac{q}{\pi \varepsilon_0 R_2} \times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\text{sh}(\mu_l(Z_2 - Z_q)) \text{sh}(\mu_l(z - Z_1))}{\gamma_l J_1^2(\gamma_l) \text{sh}(\mu_l(Z_2 - Z_1))} J_0(\mu_l r), \tag{5}$$

при $Z_q \leq z < Z_2$

$$U_q(r, z) = \frac{q}{\pi \varepsilon_0 R_2} \times \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\text{sh}(\mu_l(Z_q - Z_1)) \text{sh}(\mu_l(Z_2 - z))}{\gamma_l J_1^2(\gamma_l) \text{sh}(\mu_l(Z_2 - Z_1))} J_0(\mu_l r), \tag{6}$$

где

$$\mu_l = \frac{\gamma_l}{R_2},$$

γ_l — корни функции Бесселя первого рода нулевого порядка $J_0(\mu_l r)$.

Общее решение уравнения Пуассона $U(r, z)$ (1) можно представить в виде суммы общего решения уравнения Лапласа без учета влияния точечного заряда с заданными граничными условиями и частного решения уравнения Пуассона $U_q(r, z)$ (4) с однородными граничными условиями. В этом случае, используя метод разделения переменных, распределение потенциала

$$U(r, z) = U_i(r, z), \quad i = \overline{1, 2} \tag{7}$$

для каждой из областей имеет вид в области 1

$$U_1(r, z) = V \frac{z}{Z_2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\overline{W}_0(\lambda_k, r, R_2)}{\overline{W}_0(\lambda_k, R_1, R_2)} \sin(\lambda_k z), \tag{8}$$

в области 2

$$\begin{aligned} U_2(r, z) &= V \frac{z}{Z_2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\text{sh}(\mu_n(Z_2 - z))}{\text{sh}(\mu_n(Z_2 - Z_1))} J_0(\mu_n r) \\ &+ U_q(r, z), \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$\lambda_k = \frac{\pi k}{Z_2}, \tag{10}$$

$$\overline{W}_0(\lambda, x, y) = I_0(\lambda x) K_0(\lambda y) - K_0(\lambda x) I_0(\lambda y), \tag{11}$$

$I_0(\lambda x)$, $K_0(\lambda y)$ — модифицированные функции Бесселя нулевого порядка первого и второго рода соответственно.

Распределение потенциала $U(r, z)$ в виде (7)–(11) удовлетворяет уравнению Пуассона во всей области рассматриваемой системы и заданным граничным условиям на поверхностях $z = 0$ ($R_1 \leq r \leq R_2$), $z = Z_2$ ($0 \leq r \leq R_2$), $r = R_2$ ($0 \leq z \leq Z_2$).

Неизвестные коэффициенты, входящие в разложения (8)–(9), вычисляются из условий перекрытия областей **1–2** при $r = r_1$ ($Z_1 \leq z \leq Z_2$) и при $z = Z_1$ ($R_1 \leq r \leq R_2$):

$$U_1(R_1, z) = \begin{cases} 0, & 0 \leq z \leq Z_1, \\ U_2(R_1, z), & Z_1 \leq z \leq Z_2, \end{cases} \quad (12)$$

$$U_2(r, Z_1) = \begin{cases} 0, & 0 \leq r \leq R_1, \\ U_1(r, Z_1), & R_1 \leq r \leq R_2. \end{cases} \quad (13)$$

Условия (12), (13) обеспечивают выполнение граничных значений на поверхностях $r = R_1$ ($0 \leq z \leq Z_1$), $z = Z_1$ ($0 \leq r \leq R_1$), задающих цилиндрическую поверхность острия.

Таким образом, уравнения (12) и (13) приводят к системе линейных алгебраических уравнений относительно наборов неизвестных коэффициентов A_k, B_n соответственно

$$\begin{aligned} A_k - \frac{2}{Z_2} \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{J_0(\mu_n R_1)}{\mu_n^2 + \lambda_k^2} & \left(\mu_n \operatorname{cth}(\mu_n(Z_2 - Z_1)) \sin(\lambda_k Z_1) \right. \\ & \left. + \lambda_k \cos(\lambda_k Z_1) \right) = \frac{2}{Z_2} \left[V Z_2^{-1} (\lambda_k^{-1} Z_1 \cos(\lambda_k Z_1) \right. \\ & \left. - \lambda_k^{-2} \sin(\lambda_k Z_1) \right) + \frac{q}{\varepsilon_0 \pi R_2^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_0(\mu_m R_1)}{(\mu_m^2 + \lambda_k^2) J_1^2(\gamma_m)} \\ & \times \left(\sin(\lambda_k Z_q) - \sin(\lambda_k Z_1) \frac{\operatorname{sh}(\mu_l(Z_2 - Z_q))}{\operatorname{sh}(\mu_l(Z_2 - Z_1))} \right) \Big], \quad (14) \\ B_n + \frac{2R_1}{R_2^2 J_1^2(\gamma_n)} \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{\sin(\lambda_k Z_1)}{\mu_n^2 + \lambda_k^2} & \\ \times \left[\mu_n J_1(\mu_n R_1) + \lambda_k J_0(\mu_n R_1) \frac{\bar{W}_1(\lambda_k, R_1, R_2)}{\bar{W}_0(\lambda_k, R_1, R_2)} \right] & \\ = -2V \frac{R_1}{R_2} \frac{Z_1}{Z_2} \frac{J_1(\mu_n R_1)}{\gamma_n J_1^2(\gamma_n)}, & \quad (15) \end{aligned}$$

$$\bar{W}_1(\lambda, x, y) = I_1(\lambda x) K_0(\lambda y) + K_1(\lambda x) I_0(\lambda y), \quad (16)$$

$I_1(\lambda x), K_1(\lambda y)$ — модифицированные функции Бесселя первого порядка первого и второго рода соответственно.

Решение системы (14)–(16) при различных значениях величины заряда q определяет соответствующую закругленную поверхность вершины полевого острия, совпадающую с нулевой эквипотенциалью.

В том случае, если вершина острия $(0, L)$ задана, для того, чтобы нулевая эквипотенциаль пересекла ось симметрии системы в данной точке ($U_2(0, L) = 0$), величина заряда q определяется в виде

$$\begin{aligned} q = -\pi \varepsilon_0 R_2 \left(V \frac{L}{Z_2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{sh}(\mu_n(Z_2 - L))}{\operatorname{sh}(\mu_n(Z_2 - Z_1))} \right) & \\ \times \left(\sum_{l=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\mu_l(Z_q - Z_1)) \operatorname{sh}(\mu_l(Z_2 - L))}{\gamma_l J_1^2(\gamma_l) \operatorname{sh}(\mu_l(Z_2 - Z_1))} \right)^{-1}. & \quad (17) \end{aligned}$$

Таким образом, в данном случае к уравнениям системы (14)–(16) добавляется еще одно уравнение (17) для нахождения величины заряда q .

Напряженность поля $E_0 = \partial U(r, z) / \partial z$ на вершине острия при $r = 0, z = L$ в соответствии с (5), (9) определяется по формуле

$$\begin{aligned} E_0 = V \frac{L}{Z_2} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{\operatorname{sh}(\mu_n(Z_2 - L))}{\operatorname{sh}(\mu_n(Z_2 - Z_1))} & \\ + \frac{q}{\pi \varepsilon_0 R_2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(\mu_l(Z_q - Z_1)) \operatorname{sh}(\mu_l(Z_2 - L))}{\gamma_l J_1^2(\gamma_l) \operatorname{sh}(\mu_l(Z_2 - Z_1))}. & \quad (18) \end{aligned}$$

4. Результаты численных расчетов

Для представления численных расчетов на рис. 3, 4 были использованы следующие значения параметров

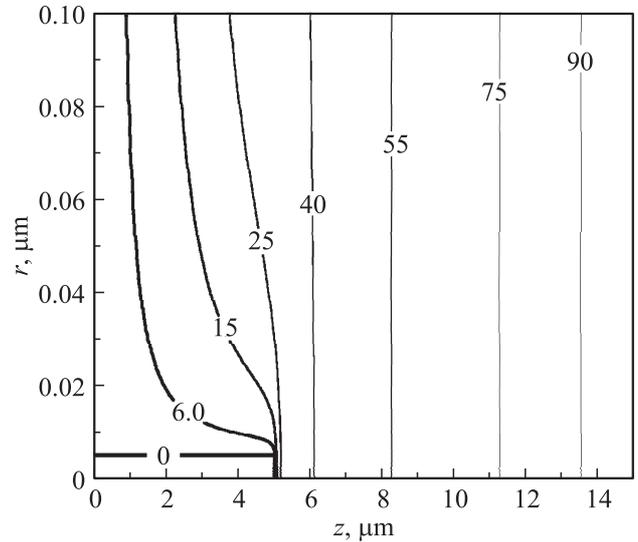


Рис. 3.

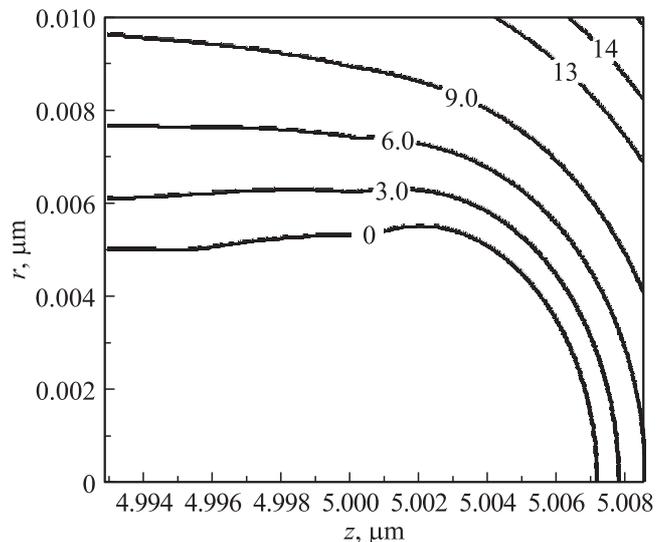


Рис. 4.

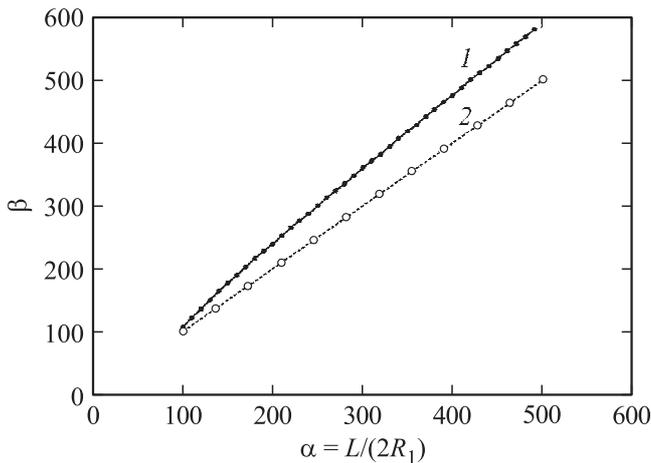


Рис. 5.

ров диодной системы: $R_1 = 0.005 \mu\text{m}$, $R_2 = 0.1 \mu\text{m}$, $Z_1 = 5 \mu\text{m}$, $Z_q = 1.00001 Z_1 \mu\text{m}$, $Z_2 = 15 \mu\text{m}$, $V = 100 \text{V}$, $q/\epsilon_0 = -75 \text{V} \cdot \mu\text{m}$.

На рис. 3 представлены эквипотенциальные линии распределения потенциала во всей области рассматриваемой системы. Поверхность острия совпадает с нулевой эквипотенциалью — виртуальным катодом.

В эмиссионных системах на основе полевого острия весьма важной характеристикой является форм-фактор — коэффициент полевого усиления [18,19]. На рис. 5 представлены значения коэффициента полевого усиления

$$\beta = E_0 \frac{Z_2}{V}$$

от аспектного отношения длины полевого острия цилиндрической формы с плоской вершиной к его диаметру $\alpha = L/(2R_1)$ при $L = Z_1$. Напряженность поля на вершине острия E_0 вычисляется по формуле (18) при $q/\epsilon_0 = 0 \text{V} \cdot \mu\text{m}$. 1 — значения форм-фактора, вычисленные в соответствии с формулой (18), 2 — значения форм-фактора, приведенные в работе [19]. Значения параметров системы: $V = 1000 \text{V}$, $R_1 = 0.005 \mu\text{m}$, $R_2 = 0.1 \mu\text{m}$, $Z_q = 1.0001 Z_1 \mu\text{m}$, $Z_2 = 200 \mu\text{m}$. Значения коэффициента полевого усиления β для приведенных двух графиков на рис. 5 хорошо согласуются при аспектном отношении α , близком к 100. При увеличении α разность значений данных графиков достигает 20%.

Заключение

В настоящей работе моделируется осесимметричная диодная эмиссионная система на основе полевого острия цилиндрической формы. Острие расположено на плоской подложке, анод — плоскость. Влияние пространственного заряда не учитывается. Все геометрические размеры системы и значения потенциалов на электродах представляют собой параметры задачи.

Для того чтобы получить требуемую форму полевого острия с закругленной вершиной, на оси системы вблизи

плоской вершины цилиндра, задающего „тело“ острия, помещается точечный заряд. Таким образом, распределение электростатического потенциала системы является решением граничной задачи (1)–(3) и представляется в виде рядов Фурье–Бесселя (5), (8), (9), коэффициенты которых определяются из системы линейных алгебраических уравнений (14), (15).

Список литературы

- [1] Wilfert St., Edelmann Chr. // Vacuum. 2012. Vol. 86. N 5. P. 556–571.
- [2] Yilmazoglu O., Biethan J.-P., Evtukh A., Semenenko M., Pavlidis D., Hartnagel H.L., Litovchenko V. // Appl. Surf. Sci. 2012. Vol. 258. P. 4990–4993.
- [3] Масалов С.А., Калинина К.В., Евтихьев В.П., Иванов С.В. // ФТТ. 2012. Т. 54. Вып. 6. С. 1057–1061.
- [4] Егоров Н.В., Шешин Е.П. Автоэлектронная эмиссия, принципы и приборы. Долгопрудный: Издат. Дом Интеллект, 2011. 704 с.
- [5] Koh A.T.T., Hsieh J., H.C. Chua Daniel // Appl. Surf. Sci. 2009. Vol. 256. P. 178–182.
- [6] Park J.S., Kim J.P., Noh Y.R., Jo K.C., Lee S.Y., Choi H.Y., Kim J.U. // Thin Sol. Films. 2010. Vol. 519. P. 1743–1748.
- [7] Zhang Y., Liao M.X., Deng S.Z., Chen J., Xu N.S. // Carbon. 2011. Vol. 49. P. 3299–3306.
- [8] Singh A.K., Kumar J. // J. Appl. Phys. 2013. Vol. 113. P. 053303 (1–4).
- [9] Агеев О.А., Блинов Ю.Ф., Ильин О.И., Коломийцев А.С., Коноплев Б.Г., Рубашкина М.В., Смирнов В.А., Федотов А.А. // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 12. С. 128–133.
- [10] Lee H., Goak J., Choi J., Kong B., Lee C.H., Kim K.B., J.Y., Seo Y., Choi Y.C., Ho Song Y.H., Lee N. // Carbon. 2012. Vol. 50. P. 2126–2133.
- [11] Guglielmotti V., Tamburri E., Orlanducci S., Terranova M.L., Rossi M., Notarianni M., Fairchild S.B., Maruyama B., Behabtu N., Young C.C., Pasquali M. // Carbon. 2013. Vol. 52. P. 356–362.
- [12] Дубинов А.Е., Ефимова И.А. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 126–129.
- [13] Виноградова Е.М., Егоров Н.В. // Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49. Вып. 2. С. 251–256.
- [14] Виноградова Е.М., Егоров Н.В., Баранов Р.Ю. // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52. № 2. С. 212–217.
- [15] Морозов М.Ю. // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. Вып. 6. С. 15–22.
- [16] Миролюбов Н.Н. Методы расчета электростатических полей. М.: Высшая школа, 1963. 209 с.
- [17] Виноградова Е.М., Егоров Н.В., Телевный Д.С. // ЖТФ. 2014. Т. 84. Вып. 2. С. 139–144.
- [18] Zhanov A.I., Pogorelov E.G., Chang Yia-Chung, Lee Yong-Gu // J. Appl. Phys. 2011. Vol. 110. P. 114311 (1–9).
- [19] Бельский М.Д., Бочаров Г.С., Елецкий А.В., Sommerer T.J. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 2. С. 130–137.