Журнал технической физики, 2015, том 85, вып. 2

01

# Уравнение поперечной динамики релятивистского электронного пучка, распространяющегося в омическом плазменном канале и режиме ионной фокусировки

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет,
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: man06@mail.ru

(Поступило в Редакцию 19 декабря 2013 г. В окончательной редакции 8 июля 2014 г.)

Сформулировано уравнение, которое включает в себя два режима: случай резистивной шланговой неустойчивости и ситуацию развития ионной шланговой неустойчивости на линейной стадии их динамики. Отмечены стабилизирующие и дестабилизирующие слагаемые в указанных уравнениях.

## Введение

Изучение динамики крупномасштабных неустойчивостей релятивистских электронных пучков (РЭП) в плотных и разреженных газоплазменных средах в последние три десятилетия привлекает внимание отечественных и зарубежных исследователей [1–17]. Было замечено, что уравнения динамики резистивной шланговой неустойчивости (РШН) РЭП в омической плазме и ионной шланговой неустойчивости (ИШН) электронных пучков в режиме ионной фокусировки (ИФ) имеют относительно схожую математическую структуру, хотя физические причины возбуждения указанных неустойчивостей являются весьма разными. В частности, причина генерации РШН заключена во взаимодействии невозмущенного тока пучка с возмущенным электромагнитным полем, вызванным вихревыми токами, возбуждающимися в омической плазме при поперечном смещении РЭП. С другой стороны, нарастание ИШН определяется в основном инерционным механическим отставанием поперечного движения канала положительных ионов относительно соответствующих смещений РЭП [5–8].

В настоящей работе сформулировано уравнение поперечной динамики РЭП, которое объединяет два режима — случай возбуждения РШН и ИШН на линейной стадии их развития.

## Постановка и решение задачи

Рассмотрим азимутально-симметричный параксиальный РЭП, распространяющийся либо в омическом плазменном канале, либо вдоль предварительно созданного плазменного цилиндрического канала в режиме ИФ. Первый случай соответствует коэффициентам-переключателям $\eta_2 = 1$, $\eta_1 = 0$, а второй — $\eta_2 = 0$, $\eta_1 = 1$.

Обратимся к уравнению движения одиночного электрона пучка в плоскости, поперечной к оси $z$ цилиндрической системы координат $(r, \theta, z)$ (ось $z$ совпадает с начальной осью симметрии омического плазменного канала или ионного канала). Тогда можно записать

$$\frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} = e\left(\mathbf{E}_\perp + \beta\mathbf{i}_z \times + \frac{\mathbf{v}_\perp}{c} \times \mathbf{i}_z B_z\right), \tag{1}$$

$$\mathbf{E}_\perp = \eta_1\mathbf{E}_\perp^{(\eta_1)} + \eta_2\mathbf{E}_\perp^{(\eta_2)}, \tag{2}$$

$$\mathbf{B}_\perp = \eta_1\mathbf{B}_\perp^{(\eta_1)} + \eta_2\mathbf{E}_\perp^{(\eta_2)}, \tag{3}$$

где $\mathbf{p}_\perp$ — поперечная (относительно оси $z$) компонента вектора импульса электрона пучка, $t$ — время, $e$ — заряд электрона, $E$ — поперечная компонента вектора коллективного электрического поля, $\beta = v_z/c$ — отношение продольной компоненты скорости электрона пучка к скорости света $c$, $\mathbf{v}_\perp$ — поперечная компонента скорости электрона пучка, $\mathbf{i}_z$ — орт оси $z$, $\mathbf{B}_\perp$ и $B_z$ — поперечная и продольная компоненты вектора индукции магнитного поля, $\mathbf{E}_\perp^{(\eta_1)}$ и $\mathbf{B}_\perp^{(\eta_1)}$ — соответствующие векторы для случая режима ИФ, а $\mathbf{E}_\perp^{(\eta_2)}$ и $\mathbf{B}_\perp^{(\eta_2)}$ — для случая омического канала.

Далее будем предполагать, что внешнего магнитного поля нет, и, кроме того, будем считать, что в омическом случае (при транспортировке в плотной газоплазменной среде) имеет место полная зарядовая нейтрализация. Продольной компонентой индукции магнитного поля, созданного пучково-плазменной системой, будем пренебрегать (по сравнению с $\mathbf{B}_\perp^{(\eta_1)}$ и $\mathbf{B}_\perp^{(\eta_2)}$) в силу параксиальности пучка. Тогда имеем

$$\mathbf{E}_\perp^{(\eta_2)} = 0. \tag{4}$$

Кроме того,

$$\mathbf{E}_\perp^{(\eta_1)} = -\nabla(\eta_1\Phi^*), \tag{5}$$

$$\Phi^* = \Phi^{(i)} + \Phi^{(e)} + \Phi^{(b)}, \tag{6}$$

где $\Phi^{(e)}, \Phi^{(i)}$ и $\Phi^{(b)}$ — электростатические потенциалы, созданные соответственно электронной и ионной компонентой фоновой плазмы и самим РЭП,

$$\beta\mathbf{i}_z \times \mathbf{B}_\perp = -\nabla(\eta_1\Psi_0 + \eta_2\Psi_2), \tag{7}$$

где

$$\Psi_2 = -\beta\left(A_z^{(b)} + A_z^{(p)}\right), \quad \Psi_0 = -\beta A_z^{(b)}. \tag{8}$$

Здесь $A_z^{(b)}$ и $A_z^{(p)}$ — соответственно продольные компоненты векторного потенциала электромагнитного поля пучка и фоновой плазмы.

Сначала рассмотрим электромагнитное поле, созданное в режиме ИФ только одним пучком. С помощью решения уравнения Пуассона для $\Phi^{(b)}$ и соответствующего уравнения для $A_z^{(b)}$ можно показать, что выполнено следующее соотношение: $\Phi^{(b)} = A_z^{(b)}/\beta$. Тогда имеем

$$-\nabla_\perp(\eta_1\Phi^{(b)}) + \nabla_\perp(\eta_1\Psi_0) = -\nabla_\perp(\eta_1\Phi^{(b)}) - \nabla_\perp(\eta_1\beta A_z^{(b)}) = -\nabla_\perp\left(\eta_1\frac{\beta_2-1}{\beta^2}A_z^{(b)}\right) = -\nabla_\perp(\eta_1\beta\mu_0 A_z^{(b)}), \tag{9}$$

где $\mu_0 = -1/(\beta^2/\gamma^2)$, $\gamma$ — лоренц-фактор электронов пучка.

Пренебрегая этим слагаемым в случае сильнорелятивистского РЭП ($\gamma \gg 1$), из (1) получим

$$\frac{d\mathbf{p}_\perp}{dt} = e[-\eta_1\nabla_\perp\Psi_1 - \eta_2\nabla_\perp\Psi_2], \tag{10}$$

где

$$\Psi_1 = \Phi^{(i)} + \Phi^{(e)}, \tag{11}$$

а $\Psi_2$ определено в (8).

Тогда при переходе от пары независимых переменных $(t, z)$ к паре $(\tau, z)$ (где $\tau = t - z/(\beta c)$ — сдвинутое время) находим

$$\frac{\partial^2\mathbf{r}_\perp}{\partial z^2} = -\frac{c}{I_A\beta}[\eta_1\nabla_\perp\Psi_1 + \eta_2\nabla_\perp\Psi_2], \tag{12}$$

где $I_A = \beta\gamma mc^3/|e|$ — предельный ток Альфвена, $m$ — масса электрона. Рассматривая частный случай $\mathbf{r}_\perp = x\mathbf{i}_z$, из (12) имеем

$$\frac{\partial^2 x}{\partial z^2} = -\frac{c}{I_A\beta}\frac{\partial}{\partial x}[\eta_1\Psi_1 + \eta_2\Psi_2]. \tag{13}$$

Усредняя уравнение (13) по плотности тока, смещенного в поперечной плоскости пучка, получим

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = -\frac{c}{I_b^2\beta}\left(\frac{I_b}{I_A}\right)\int J_{bz}(\mathbf{r}, z, \tau)\frac{\partial}{\partial x}[\eta_1\Psi_1 + \eta_2\Psi_2]d\mathbf{r}_\perp, \tag{14}$$

где $Y(z, \tau)$ — амплитуда поперечного смещения сегмента пучка со временем инжекции $\tau$, $I_b$ — полный ток пучка.

Заметим, что уравнение (14) объединяет известное уравнение динамики РШН РЭП и соответствующее уравнение для ИШН-пучка.

Ограничимся случаем линейной стадии развития РШН или ИШН РЭП. В этой ситуации можно записать

$$\Psi_1 = \Psi_{10} + \delta\Psi_1, \tag{15}$$

$$\Psi_2 = \Psi_{20} + \delta\Psi_2, \tag{16}$$

где $\Psi_{10}, \Psi_{20}$ — равновесные значения величин $\Psi_1$ и $\Psi_2$, $\delta\Psi_1$ и $\delta\Psi_2$ — возмущения соответствующих величин, для которых на линейной стадии развития изучаемых неустойчивостей выполнено условие

$$\delta\Psi_1 \ll \Psi_{10}, \quad \delta\Psi_2 \ll \Psi_{20}. \tag{17}$$

Кроме того, при развитии крупномасштабных неустойчивостей с азимутальным числом $\tilde{m} = 1$ (к которым относятся РШН и ИШН) возмущения можно представить в следующем виде [6–8]:

$$\delta\Psi_1 = \Psi_1^{(1)}\exp(i\theta), \quad \delta\Psi_2 = \Psi_2^{(1)}\exp(i\theta), \tag{18}$$

где $\Psi_1^{(1)}$ и $\Psi_2^{(1)}$ — амплитуды соответствующих возмущений, $\theta$ — азимутальный угол, $i$ — мнимая единица.

Тогда с учетом (14)–(17) на линейной стадии развития рассматриваемых неустойчивостей имеем

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z} = -\frac{c}{I_b^2}\left(\frac{I_b}{I_A}\right)\frac{1}{\beta}[P_1 + P_2], \tag{19}$$

где

$$P_1 \equiv \int d\mathbf{r}_\perp \delta J_{bz}\left[\eta_1\frac{\partial\Psi_{10}}{\partial x} + \eta_2\frac{\partial\Psi_{20}}{\partial x}\right], \tag{20}$$

$$P_2 \equiv \int d\mathbf{r}_\perp \delta J_{bz0}\left[\eta_1\frac{\partial\delta\Psi_1}{\partial x} + \eta_2\frac{\partial\delta\Psi_2}{\partial x}\right]. \tag{21}$$

Здесь $\delta J_{bz}$ — возмущение $z$-компоненты вектора плотности тока пучка, $J_{bz0}$ — равновесное значение указанной плотности тока.

Далее с учетом (18) находим

$$P_1 = \int_0^\infty dr\int_0^{2\pi} d\theta J_{bz1}\exp(i\theta)\cos\theta\, r\left[\eta_1\frac{\partial\Psi_{10}}{\partial r} + \eta_2\frac{\partial\Psi_{20}}{\partial r}\right]. \tag{22}$$

Откуда следует

$$P_1 = \pi\int_0^\infty dr\, J_{bz1} r\frac{\partial}{\partial r}[\eta_1\Psi_{10} + \eta_2\Psi_{20}]. \tag{23}$$

Из (18) и (21) имеем

$$P_2 = \int_0^\infty dr\int_0^{2\pi} d\theta J_{bz0}\, r\left[\eta_1\frac{\partial\delta\Psi_1}{\partial r} + \eta_2\frac{\partial\delta\Psi_2}{\partial r}\right] = \int_0^\infty dr J_{bz0}\int_0^{2\pi} d\theta(\cos\theta + i\sin\theta)r\left\{\cos\theta\frac{\partial}{\partial r}\left[\eta_1\Psi_1^{(1)} + \eta_2\Psi_2^{(1)}\right] - \frac{\sin\theta}{r}i\left[\eta_1\Psi_1^{(1)} + \eta_2\Psi_2^{(1)}\right]\right\}. \tag{24}$$

После интегрирования по $\theta$ находим

$$P_2 = \pi\int_0^\infty dr J_{bz0}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left\{\eta_1\Psi_1^{(1)} + \eta_2\Psi_2^{(1)}\right\}\right]. \tag{25}$$

Подставляя (23) и (25) в (19), получим

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2} = -\frac{c\pi}{I_b^2}\left(\frac{I_b}{I_A}\right)\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\infty dr\left\{J_{bz\,i}\,r\,\frac{\partial}{\partial r}\left[\eta_1\frac{\partial\Psi_{10}}{\partial r}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\eta_2\frac{\partial\Psi_{20}}{\partial r}\right]+J_{bz\,0}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left\{\eta_1\Psi_1^{(1)}+\eta_2\Psi_2^{(1)}\right\}\right]\right\}. \quad (26)$$

С учетом (6) и (8) уравнение (26) можно представить в виде

$$\frac{\partial Y}{\partial z^2} = G_0 + G_1 + G_3, \quad (27)$$

где

$$G_0 = \frac{c\pi}{I_b^2}\left(\frac{I_b}{I_A}\right)\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\infty dr\left\{\eta_2 J_{bz\,1} r\beta\frac{\partial A_{z\,0}}{\partial r}\right.$$

$$\left.-\eta_1 J_{bz\,0}\frac{\partial}{\partial r}\left[r(\Phi_1^{(i)})\right]\right\}, \quad (28)$$

$$G_1 = \frac{c\pi}{I_b^2}\left(\frac{I_b}{I_A}\right)\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\infty dr\left\{\eta_2 J_{bz\,0}\beta\frac{\partial}{\partial r}(rA_{z\,1})\right.$$

$$\left.-\eta_1 J_{bz\,1}\,r\,\frac{\partial}{\partial r}\,r(\Phi_0^{(i)})\right\}, \quad (29)$$

$$G_3 = -\frac{c\pi}{I_b^2}\left(\frac{I_b}{I_A}\right)\frac{1}{\beta}\int\limits_0^\infty dr\left\{\eta_1 J_{bz\,1} r\frac{\partial}{\partial r}\left(\Phi_0^{(e)}\right)\right\}$$

$$\left.+\eta_1 J_{bz\,0}\frac{\partial}{\partial r}\left[r\Phi_1^{(e)}\right]\right\}. \quad (30)$$

Здесь

$$A_z = A_z^{(b)} + A_z^{(p)}, \quad (31)$$

$$\Psi_{10} = \Phi_0^{(i)} + \Phi_0^{(e)}, \quad \Psi_1^{(0)} = \Phi_1^{(i)} + \Phi_1^{(e)}, \quad (32)$$

$$\Phi^{(i)}(r,\theta) = \Phi_0^{(i)}(r) + \Phi_1^{(i)}(r)\exp(i\theta), \quad (33)$$

$$\Phi^{(e)}(r,\theta) = \Phi_0^{(e)}(r) + \Phi_1^{(e)}(r)\exp(i\theta). \quad (34)$$

Применим далее модель „жесткого“ пучка, в рамках которой предполагается, что при поперечном смещении РЭП радиальный профиль плотности его тока не искажается [6,8]. Указанная модель может быть использована только на линейной стадии развития РШН и ИШН, когда амплитуда отклонения пучка существенно меньше характерного радиуса РЭП. В этом случае имеем

$$J_{bz\,1} = -Y\frac{\partial J_{bz0}}{\partial r}, \quad A_{z\,1} = -D\frac{\partial A_{z0}}{\partial r}, \quad (35)$$

$$\Phi_1^{(i)} = -D^{(i)}\frac{\partial\Phi_0^{(i)}}{\partial r}, \quad \Phi_1^{(e)} = -D^{(e)}\frac{\partial\Phi_0^{(e)}}{\partial r}, \quad (36)$$

где $Y$ — амплитуда отклонения оси симметрии РЭП, $D, D^{(i)}, D^{(e)}$ — амплитуды отклонения центров симметрии магнитного поля (в случае распространения РЭП в омическом плазменном канале), а также амплитуды отклонения центров симметрии ионного канала и электронной компоненты фоновой плазмы (в случае распространения РЭП в режиме ИФ). Электромагнитный потенциал $A_{z0}$ удовлетворяет невозмущенной части уравнения Ампера

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial A_{z0}}{\partial r}\right) = -\frac{4\pi}{c}J_{bz0}(1-\alpha_m). \quad (37)$$

Здесь $\alpha_m$ — коэффициент токовой (магнитной) нейтрализации, а потенциалы $\Phi_0^{(i)}, \Phi_0^{(e)}$ определяются из уравнений Пуассона

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_0^{(i)}}{\partial r}\right) = 4\pi|e|n_0^{(i)}(r), \quad (38)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi_0^{(e)}}{\partial r}\right) = -4\pi|e|n_0^{(e)}(r), \quad (39)$$

где $n_0^{(i)}(r)$ и $n_0^{(e)}(r)$ — радиальные профили равновесных объемных концентраций ионов и электронов фоновой плазмы.

Тогда с учетом (35)–(39) после ряда преобразований из (28)–(30) получим

$$G_0 = -\eta_2 k_s^2(1-\alpha_m)Y + \eta_1 k_{si}^2\frac{D^{(i)}}{\beta}, \quad (40)$$

$$G_1 = \eta_2 k_s^2(1-\alpha_m)D - \eta_1 k_{si}^2\frac{Y}{\beta}, \quad (41)$$

$$G_3 = \eta_1 k_{se}^2\frac{Y}{\beta} - \eta_1 k_{se}^2\frac{D^{(e)}}{\beta}, \quad (42)$$

где

$$k_s^2 = 4\pi^2\frac{I_b}{I_A}\int\limits_0^\infty dr\left(\frac{J_{bz0}(r)}{I_b}\right)^2 r, \quad (43)$$

$$k_{si}^2 = 4\pi^2\frac{I_b}{I_A}\int\limits_0^\infty dr\frac{rJ_{bz0}(r)J_{0i}^*(r)}{I_b^2}, \quad (44)$$

$$k_{se}^2 = 4\pi^2\frac{I_b}{I_A}\int\limits_0^\infty dr\frac{rJ_{bz0}(r)J_{0e}^*(r)}{I_b^2}. \quad (45)$$

Здесь

$$J_{0i}^{(*)} = cn_0^{(i)}|e|, \quad J_{e0}^{(*)} = cn_0^{(e)}|e|. \quad (46)$$

Из формул (40)–(42) следует, что в омическом случае причиной возбуждения РШН (при высокой канальной проводимости) является возмущение коллективного магнитного поля, вызванное появлением вихревых плазменных токов (первое слагаемое в (41)). С другой стороны, в ситуации режима ИФ причиной развития ИШН является возмущение электрического поля, созданного ионным каналом (второе слагаемое в (40)) и, кроме того, влияние невозмущенного электрического поля электронной компоненты фоновой плазмы (первое слагаемое в (42)). Невозмущенное коллективное электромагнитное поле в омическом случае играет стабилизирующую роль (первое слагаемое в (40)). В режиме ИФ стабилизирующее действие оказывает невозмущенное электрическое поле ионов (второе слагаемое в (41)) и возмущенное поле электронов фоновой плазмы (второе слагаемое в (42)).

## Заключение

В настоящей работе сформулировано уравнение поперечной динамики РЭП, которое включает в себя два режима: случай развития резистивной шланговой неустойчивости и ситуацию возникновения ионной шланговой неустойчивости на линейной стадии их эволюции. Отмечены стабилизирующие и дестабилизирующие слагаемые в указанных уравнениях и физические причины, их определяющие.

## Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980. 167 с.
[2] *Диденко А.Н., Григорьев В.П., Усов Ю.П.* Мощные электронные пучки и их применение. М.: Атомиздат, 1977. 277 с.
[3] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М.: Физматлит, 1990. 336 с.
[4] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М.: Мир, 1984. 432 с.
[5] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С., Филиппов Б.В.* Динамика пучков заряженных частиц в газоплазменных средах. СПб.: Изд-во СПбГУ, 2002. 98 с.
[6] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. N 8. P. 1327–1343.
[7] *Uhm H.S., Lampe M.* // Phys. Fluids. 1980. Vol. 23. N 8. P. 1574–1585.
[8] *Buchanan H.L.* // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. N 1. P. 221–231.
[9] *Надеждин Е.Р., Сорокин Г.А.* // Физика плазмы. 1983. Т. 9. N 5. С. 989–991.
[10] *Аранчук Л.Е., Вихарев В.Д., Горев В.В.* и др. // ЖЭТФ. 1984. Т. 86. № 4. С. 1280–1295.
[11] *Владыко В.Б., Рудяк Ю.В.* // Физика плазмы. 1991. Т. 17. № 5. С. 623–628.
[12] *Кондратьев Н.А., Сметанин В.И.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 67–73.
[13] *Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 1. С. 80–83.
[14] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 3. С. 40–44.
[15] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // РиЭ. 1992. Т. 37. № 4. С. 694–699.
[16] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 12. С. 43–46.
[17] *Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 1. С. 76–78.