Журнал технической физики, 2015, том 85, вып. 1

03

О неустойчивости n-й моды осцилляций заряженной капли в однородном электростатическом поле

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, А.А. Ширяев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 4 апреля 2014 г.)

В нелинейных асимптотических расчетах путем разложения по двум малым параметрам (по величине безразмерной равновесной деформации капли и отношению амплитуды осцилляций к ее радиусу) исследуется устойчивость n-й моды осцилляций заряженной капли в однородном электростатическом поле. Показано, что при зарядах, меньших критического по Рэлею, механизм реализации неустойчивости капли в электростатическом поле остается таким же, как и для незаряженной капли. Критическое значение полевого параметра с ростом номера моды выходит на насыщение, но асимптотика, параллельная оси абсцисс, к которой стремится полевой параметр с увеличением номера моды, снижается при увеличении собственного заряда капли.

Введение

В связи с экспериментальной проверкой [1–7] критерия Рэлея [8] реализация неустойчивости заряженной капли, а также в силу широкого применения различного вида бесконтактных подвесов для жидких капель, использующихся как для получения сверхчистых веществ, так и для исследования закономерностей электростатического распада, представляет интерес задача об устойчивости заряженной капли в электростатическом поле. В последнее время было выяснено, что критерии устойчивости заряженной капли по отношению к давлению электростатического поля собственного заряда и незаряженной капли по отношению к давлению электростатического поля заряда, индуцированного самим внешним полем, различаются не только количественно, но и качественно [9–12]. В частности, обнаружено, что с увеличением номера моды критерии неустойчивости незаряженной капли в однородном или неоднородном электростатических полях выходят на насыщение. Это означает, что в достаточно сильном внешнем поле возбудятся одновременно все моды осцилляций, и капля вбросит струю, как это и наблюдается в экспериментах [13]. У заряженной же капли в отсутствие внешнего поля с ростом заряда моды осцилляций возбуждаются последовательно по закону, выведенному еще Рэлеем [8]. Встает вопрос, как будут меняться критические условия неустойчивости, если на каплю в электростатическом поле поместить заряд.

Постановка задачи

Пусть имеется сферическая капля радиуса R, идеальной, несжимаемой, идеально проводящей жидкости, с коэффициентом поверхностного натяжения свободной поверхности σ и массовой плотностью ρ, заряженная зарядом Q, находящаяся в вакууме. Эту каплю мы поместим в однородное внешнее электростатическое поле напряженностью $\mathbf{E}_0$, в котором она примет равновесную форму, близкую к сфероиду, вытянутому по полю [14,15]. Точнее говоря, равновесная форма такой капли будет грушевидная, но в линейном по квадрату эксцентриситета приближении она весьма близка к вытянутому сфероиду, отличия проявляются лишь в более высоких порядках приближений. Будем исследовать капиллярные осцилляции и устойчивость поверхности такой капли по отношению к давлению суммарного электростатического поля такой капли, раскладывая уравнение сфероидальной формы в окрестности исходной сферической формы, используя квадрат эксцентриситета $e^2 \equiv 1 - \left(b^2/a^2\right)$, в качестве малого параметра (a и b — большая и малая полуоси сфероида).

Во избежание излишней громоздкости математических выкладок будем рассматривать лишь осесимметричные осцилляции капли, пренебрегая зависимостью от угла φ, что незначительно отразится на общности рассуждений. Задачу будем решать в неинерциальной системе отсчета, связанной с центром масс движущейся капли, в сферических координатах (r, θ, φ) с началом в центре масс капли. Ось z будем принимать проходящей через центр масс капли параллельно направлению поля (коллинеарно оси симметрии сфероида). Форму капли представим в виде суперпозиции ее равновесной в электростатическом поле формы $r = r(\theta)$ и малого возмущения $\xi(\theta, t)$ на ее поверхности, происходящего из-за тепловых капиллярных волн бесконечно малой амплитуды [16]:

$$F(r, \theta, t) \equiv r - r(\theta) - \xi(\theta, t) = 0, \quad |\xi(\theta, t)| \ll \min r(\theta).$$

Математическая формулировка задачи состоит из уравнения Эйлера, уравнения неразрывности и уравнений, определяющих напряженность электрического поля в предположении малости гидродинамических скоростей по сравнению со скоростью распространения электромагнитного сигнала:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V},\nabla)\mathbf{V}=-\frac{1}{\rho}\nabla P+\frac{\mathbf{F}_{\text{in}}}{\rho},$$

$$\operatorname{div}\mathbf{V}=0,\quad \operatorname{div}\mathbf{E}=0,\quad \mathbf{E}=-\nabla\Phi.$$

Здесь $\mathbf{V}$ — скорость волнового движения жидкости в капле, P — гидродинамическое давление в жидкости, $\mathbf{F}_{\text{in}}=-\frac{4}{3}\pi R^3\rho Q\mathbf{E}_0$ — сила инерции, действующая на единицу объема, которая возникает вследствие ускоренного движения центра масс капли при втягивании поляризованной капли в область большей неоднородности электрического поля, $\mathbf{E}$ и Φ — напряженность и потенциал электростатического поля.

Задачу дополним условием ограниченности скорости в центре масс капли и условием убывания электростатического потенциала с увеличением расстояния:

$$r=0:\ |\mathbf{V}|<\infty,\quad r\to\infty:\ \Phi\to -E_0 r\mu,\ \mu\equiv\cos\theta;$$

а также граничными условиями: динамическим, кинематическим и условием эквипотенциальности поверхности капли:

$$r=r(\theta)+\xi(\theta,t):\quad P-P_{\text{atm}}+P_E=P_\sigma,$$

$$\frac{\partial F}{\partial t}+(\mathbf{V},\nabla)F=0,\ \Phi=\text{const},$$

где давление на свободную поверхность капли электростатического поля P_E и капиллярное давление P_σ выражаются формулами

$$P_E=\frac{\mathbf{E}^2}{8\pi},\quad P_\sigma=\sigma\operatorname{div}\mathbf{n}.$$

Орт нормали к возмущенной поверхности капли $\mathbf{n}$ определяется выражением

$$\mathbf{n}=\left.\frac{\nabla F}{|\nabla \mathrm{F}|}\right|_{F=0}.$$

Исходя из общефизических соображений, дополним задачу условиями сохранения объема капли (следствие несжимаемой жидкости), неподвижного центра масс капли при осцилляциях ее поверхности и сохранения полного заряда капли

$$\iiint_V dV=\frac{4}{3}\pi R^3,\quad \iiint_V \mathbf{r}dV=0,$$

$$\{V:\ 0\le r\le r(\theta)+\xi(\theta,t),\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\},$$

$$\iint_S \kappa dS=Q,$$

$$\{S:\ r=r(\theta)+\xi(\theta,t),\ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le\varphi\le 2\pi\},$$

где κ — поверхностная плотность заряда: $\kappa\equiv(\mathbf{E},\mathbf{n})/4\pi$.

Для удобства расчетов перейдем к безразмерным переменным, выбирая в качестве основных масштабов обезразмеривания: $R=\rho=\sigma=1$. При этом все оставльные величины будут выражены в долях своих характерных значений:

$$[V]=R^{-1/2}\rho^{-1/2}\sigma^{1/2},\quad [P]=\sigma R^{-1},\quad [Q]=R^{3/2}\sigma^{1/2},$$

$$[t]=R^{3/2}\rho^{1/2}\sigma^{-1/2}.$$

За безразмерными величинами сохраним прежние обозначения.

В итоге в задаче будут существовать два малых параметра: квадрат эксцентриситета e^2 и безразмерная амплитуда волнового возмущения равновесной поверхности ξ, причем положим, что $e^2\gg\xi$. Разложения будем проводить по обоим малым параметрам, удерживая члены $\sim e^2\xi$.

Скаляризация задачи

Поскольку в поставленной задаче исследуются движения жидкости, связанные с малыми колебаниями свободной поверхности, воспользуемся моделью потенциального течения, в рамках которой поле скоростей $\mathbf{V}$ определяется гидродинамическим потенциалом $\psi(r,\theta,t)$: $\mathbf{V}=\nabla\psi$. Переходя к электрическому $\Phi(r,\theta,t)$ и гидродинамическому $\psi(r,\theta,t)$ потенциалам, получим систему скалярных уравнений, в безразмерных переменных, имеющих вид

$$P=P_0+E_{\text{in}}r\mu-\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2,\quad \Delta\psi=0,\quad \Delta\Phi=0,$$

$$r=0:\quad |\nabla\psi<\infty|,\qquad r\to\infty:\quad \Phi\to -E_0 r\mu,$$

$$r=r(\theta)+\xi(\theta,t):$$

$$P_0+F_{\text{in}}r\mu-\frac{\partial\psi}{\partial t}-\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2-P_{\text{atm}}+P_E=P_\sigma,$$

$$-\frac{\partial\xi}{\partial t}+\left(\frac{\partial\psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\left(-\frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta}-\frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial\theta}\right)\right)=0,$$

$$\Phi=\text{const},\quad P_E=\frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi},\quad P_\sigma=\operatorname{div}\mathbf{n},$$

$$\mathbf{n}=\left(\mathbf{e}_r-\mathbf{e}_\theta\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}[r(\theta)+\xi(\theta,t)]\right)$$

$$\times\left(1+\frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta}+\frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial\theta}\right)^2\right)^{-1/2},$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r(\theta)+\xi(\theta,t)} r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=\frac{4}{3}\pi,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{r(\theta)+\xi(\theta,t)} \mathbf{r}r^2\sin^2\theta drd\theta d\varphi=0,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}(\nabla\Phi,\mathbf{n})R^2\sin\theta d\theta d\varphi=-4\pi Q.$$

$\mathbf{e}_r$ и $\mathbf{e}_\theta$ — орты сферической системы координат.

Выписанную задачу будем решать асимптотическими методами, предполагая, что вследствие малости амплитуды волновго искажения поверхности капли $\xi(\theta,t)$ мала и амплитуда скорости движения жидкости, вызванного осцилляциями поверхности: $|\psi(r,\theta,t)| \sim |\xi(\theta,t)|$. Рассмотрение ограничим первым порядком малости по амплитуде осцилляций $\xi(\theta,t)$, представим искомые величины в виде сумм компонент нулевого и первого порядков:

$$\Phi = \Phi^{(0)} + \Phi^{(1)} + \mathrm{O}(\xi^2), \quad P_E = P_E^{(0)} + P_E^{(1)} + \mathrm{O}(\xi^2),$$

$$P_\sigma = P_\sigma^{(0)} + P_\sigma^{(1)} + \mathrm{O}(\xi^2), \quad P = P^{(0)} + P^{(1)} + \mathrm{O}(\xi^2).$$

Проводя процедуру линеаризации стандартными методами, получим задачу нулевого порядка для определения равновесной формы поверхности и задачу первого порядка для анализа устойчивости поверхности.

Равновесная форма поверхности

Положим равновесное искажение формы сферической капли малым и представим равновесную во внешнем электростатическом поле форму в виде разложения:

$$r(\theta) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\mu),$$

где $P_n(\mu)$ — осесимметричные полиномы Лежандра n-го порядка [17]. Найдем теперь коэффициенты этого разложения в линейном по отношению a_n/a_0 приближении. Решая электрическую задачу, будем считать, что заряд на капле Q имеет нулевой порядок малости, так как сам по себе он не искажает сферическую форму поверхности. Напряженность внешнего поля E_0 в таком случае будет иметь порядок $(a_n/a_0)^{1/2}$, так как деформация равновесной формы вызвана давлением внешнего поля, т.е. $a_n/a_0 \sim E_0^2$. В итоге получим выражение для потенциала $\Phi^{(0)}$ в окрестностях капли:

$$\Phi^{(0)}(r,\theta) = \frac{Q}{r} + E_0\left(\frac{1}{r^2} - r\right)P_1(\mu) + \frac{e^2}{3}\frac{Q}{r^3}P_2(\mu), \quad (1)$$

$$e^2 \equiv \frac{9w}{(1-W)}, \quad w \equiv \frac{E_0^2}{16\pi}, \quad W \equiv \frac{Q^2}{16\pi}$$

и равновесную сфероидальную форму поверхности капли $r(\theta)$, определяемую из баланса давлений на поверхности капли в нулевом по ξ порядке:

$$r(\theta) = 1 + \frac{e^2}{3}P_2(\mu) + \mathrm{O}(e^4),$$

где e^2 — квадрат эксцентриситета капли, а угол θ отсчитывается от направления $\mathbf{E}_0$.

Устойчивость равновесной формы

Задача первого порядка малости по ξ, полученная из исходной системы уравнений, имеет вид

$$\Delta\psi(\mathbf{r},t) = 0, \Delta\Phi^{(1)}(\mathbf{r},t) = 0,$$

$$r \to 0: \quad |\nabla\psi(\mathbf{r},t)| < \infty, \qquad r \to \infty: \quad \Phi^{(1)}(\mathbf{r},t) \to 0$$

с граничными условиями на свободной поверхности: динамическим, кинематическим и условием потенциальности

$$r = r(\theta): \qquad P^{(1)} + P_E^{(1)} = P_\sigma^{(1)},$$

$$-\frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial t} + \frac{\partial\psi(r,\theta,t)}{\partial r} - \frac{\partial\psi(r,\theta,t)}{\partial\theta}\frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta} = 0,$$

$$\Phi^{(1)}(r,\theta,t) + \frac{\partial\Psi^{(0)}(r,\theta,t)}{\partial r}\xi(\theta,t) = \mathrm{const}.$$

Выражения для поправок к давлениям гидродинамическому, электрическому и давлению капиллярных сил в первом порядке разложений по ξ и по e^2 запишутся в виде

$$r = r(\theta): \qquad P^{(1)} = F_{\mathrm{in}}\xi(\theta,t)\mu - \frac{\partial\psi(r,\theta,t)}{\partial t},$$

$$P_E^{(1)} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{(\nabla\Phi^{(0)})^2}{8\pi}\right)\xi(\theta,t) + \frac{(\nabla\Phi^{(0)}, \nabla\Phi^{(1)})}{4\pi},$$

$$P_\sigma^{(1)} = 2\left(1 - h(\theta) - \xi(\theta,t) - 3\frac{\partial h(\theta)}{\partial\theta}\frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial\theta}\right) - \Delta_\theta(h(\theta) + \xi(\theta,t) - 2\xi(\theta,t)h(\theta)),$$

$$\Delta_\theta \equiv \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right),$$

$$h(\theta) \equiv \frac{e^2}{6}(3\cos^2\theta - 1) \equiv \frac{e^2}{3}P_2(\mu).$$

Запишем в указанном приближении и интегральные условия: сохранения объема, неподвижности центра масс и неизменности заряда капли

$$\int_0^\pi r^2(\theta)\xi(\theta,t)d\mu = 0, \qquad \int_0^\pi r^3(\theta)\xi(\theta,t)d\mu = 0,$$

$$\int_0^\pi \left[\frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial r}2\xi(\theta,t) + (2r(\theta)-1)\left(\frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r^2}\xi(\theta,t) + \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial r}\right) - \frac{\partial\Phi^{(0)}}{\partial\theta}\frac{\partial\xi(\theta,t)}{\partial\theta} - \frac{\partial^2\Phi^{(0)}}{\partial r\partial\theta}\frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta}\xi(\theta,t) - \frac{\partial\Phi^{(1)}}{\partial\theta}\frac{\partial r(\theta)}{\partial\theta}\right]d\mu = 0.$$

Решение уравнения Лапласа для гидродинамического потенциала с учетом ограниченности скорости в центре капли имеет вид

$$\psi(r,\theta,t) = \sum_{n=0}^{\infty} V_n(t) r^n P_n(\mu).$$

Подставляя выражения для равновесной формы поверхности и гидродинамического потенциала в кинематическое граничное условие, определим координатную зависимость ξ:

$$\xi(\theta, t) = \sum_{n=2}^{\infty} \alpha_n(t) P_n(\mu) \qquad (2)$$

и выразим коэффициенты $V_n(t)$ разложения через амплитуды $\alpha_n(t)$:

$$V_n(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \times \left(\frac{e^2}{3} \frac{((6-5n+n^2)K^s_{2,-2+n,n} - K^\theta_{2,-2+n,n})\alpha'_{-2+n}(t)}{n(n-2)} + \left(\frac{1}{n} + \frac{e^2}{3} \frac{((1-n)nK^s_{2,n,n} + K^\theta_{2,n,n})}{n^2}\right)\alpha'_n(t) + \frac{e^2}{3} \frac{((-2-3n-n^2)K^s_{2,2+n,n} + K^\theta_{2,2+n,n})\alpha'_{2+n}(t)}{n(n+2)} \right),$$

$$K^s(n, m, j) \equiv \left(C^{j,0}_{n,0\,m,0}\right)^2,$$

$$K^\theta(n, m, j) = -\sqrt{n(n+1)m(m+1)}\, C^{j,0}_{n,0\,m,0} C^{j,0}_{n,-1\,m,1},$$

где $C^{l,p}_{n,k\,m,q}$ — коэффициенты Клебша–Гордана [17].

Решение уравнения Лапласа для электрического потенциала, удовлетворяющее условию убывания потенциала на бесконечности и условию эквипотенциальности поверхности, получим в виде

$$\Phi^{(1)}(\mathbf{r}, t) = X(r, w, W) + \Upsilon(n, w, W),$$

$$\Upsilon(n, w, W) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sqrt{16\pi W}\alpha_n + 3\sqrt{16\pi w}(\alpha_{-1+n}K^s_{1,-1+n,n} + \alpha_{1+n}K^s_{1,1+n,n}) + \frac{e^2}{3}\sqrt{16\pi W}\big(n\alpha_{-2+n}K^s_{2,-2+n,n} + (2+n)\alpha_n K^s_{2,n,n} + (4+n)\alpha_{2+n}K^s_{2,2+n,n}\big)\Big) \times r^{-(n+1)} P_n(\mu),$$

$$X(r, w, W) \equiv \alpha_0\sqrt{16\pi W}\left(\frac{2}{r} - 1\right) + \sqrt{16\pi w}\,\alpha_1\left(\frac{2}{r} - 1\right) + e^2\sqrt{16\pi W}\alpha_2 \frac{4}{15}\left(\frac{3}{r} + 2\right). \qquad (3)$$

Чтобы удовлетворить динамическому граничному условию, получим выражения для добавок первого порядка малости по амплитуде возмущения к давлениям капиллярных сил и электрического поля. Подставляя (2) в выражение для капиллярного давления, получим для $P^{(1)}_\sigma$:

$$P^{(1)}_\sigma = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu) \left(\frac{e^2}{3}(-2n(1+n)K^s_{2,-2+n,n} - 6K^\theta_{2,-2+n,n})\alpha_{-2+n}(t) + \left((-1+n)(2+n) + \frac{e^2}{3}(-2n(1+n)K^\theta_{2,n,n} - 6K^\theta_{2,n,n})\right)\alpha_n(t) + \frac{e^2}{3}(-2n(1+n)K^s_{2,2+n,n} - 6K^\theta_{2,2+n,n})\alpha_{2+n}(t) \right).$$

С учетом вида электрических потенциалов (1), (3) и выражения для формы поверхности рассчитаем электрическое давление $P^{(1)}_E$:

$$P^{(1)}_E(\mathbf{r}, t) = 4Ww\left(\alpha_1(t) - \frac{12}{5}\alpha_2(t)\right) + \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\mu)\left(4(n+1)Ww\left(\frac{12}{5}\alpha_2(t) - \alpha_1(t)\right) + C^e_{-2,n}\alpha_{-2+n}(t) + C^e_{-1,n}\alpha_{-1+n}(t) + C^e_{0,n}\alpha_n(t) + C^e_{1,n}\alpha_{1+n}(t) + C^e_{2,n}\alpha_{2+n}(t)\right),$$

$$C^e_{-2}(n) = \frac{1}{1-W}\, 12w\big(3n(1-W)K^s_{1,-2+n,-1+n}K^s_{1,-1+n,n} - (4 + (7-5n)W + (1+n)W^2)K^s_{2,-2+n,n} + WK^\theta_{2,-2+n,n}\big),$$

$$C^e_{-1}(n) = 12(-3+2n)\sqrt{w}\sqrt{W}K^s_{1,-1+n,n},$$

$$C^e_0(n) = \frac{1}{1-W}\, 4\big((1-W)(-6w + (-1+n)W) + 9nw(1-W)K^s_{1,-1+n,n}K^s_{1,n,-1+n} + 9(2+n)w(1-W)K^s_{1,n,1+n}K^s_{1,1+n,n} - 3w(4 - (1+5n)W + (1+n)W^2)K^s_{2,n,n} + 3wWK^\theta_{2,n,n}\big),$$

$$C^e_1(n) = 12(-1+2n)\sqrt{w}\sqrt{W}K^s_{1,1+n,n},$$

$$C^e_2(n) = \frac{1}{1-W}\, 12w\big(3(2+n)(1-W)K^s_{1,1+n,n}K^s_{1,2+n,1+n} - (4 - (9+5n)W + (1+n)W^2)K^s_{2,2+n,n} + WK^\theta_{2,2+n,n}\big).$$

Эволюционное уравнение

Используя полученные выражения для давлений $P_E^{(1)}$, $P_\sigma^{(1)}$, $P^{(1)}$, формулы для формы поверхности и гидродинамического потенциала, из динамического граничного условия, воспользовавшись ортогональностью полиномов Лежандра, получим для амплитуд $\alpha_n(t)$ систему связанных дифференциальных уравнений второго порядка, каждое из которых имеет вид

$$\alpha_n''(t)+\omega_n^2\alpha_n(t)-\sum_{m\in\Xi}\left(C_m^f(n)\alpha_{n+m}(t)+C_m^d(n)\alpha_{n+m}''(t)\right)=0,$$

$$\Xi=\{-2,-1,1,2\}. \tag{4}$$

Здесь ω_n — собственная частота колебаний моды с номером n, определяемая дисперсионным уравнением

$$\omega_n^2=n(n-1)((n+2)-4W)-C_\omega,$$

$$\begin{aligned}C_\omega=\;&24wn-36wn^2K^s_{1,-1+n,n}K^s_{1,n,-1+n}\\&-36wn(2+n)K^s_{1,n,1+n}K^s_{1,1+n,n}\\&-\frac{e^2}{3}\,n(3n^2-18+4W(2-W)\\&+n(3+16W-4W^2))K^s_{2,n,n}\\&-\frac{e^2}{3}(n^2+7n-2+4W)K^\theta_{2,n,n},\end{aligned}$$

а $C_m^f(n)$, $C_m^d(n)$ — числовые коэффициенты, выражения для которых приведены в Приложении. Заметим, что индексы n амплитуд $\alpha_n(t)$ не могут быть отрицательными, поэтому естественно полагать $\alpha_n(t)\equiv 0$ при $n<0$.

На рис. 1 представлены значения собственных частот колебаний n-й моды, полученные из дисперсионного уравнения; кривые расположены сверху вниз согласно увеличению параметра Рэлея ($W=0.1,\ 0.2,\ 0.3$). Как видно из рис. 1, заряд на капле приводит к небольшому снижению величин частот колебаний.

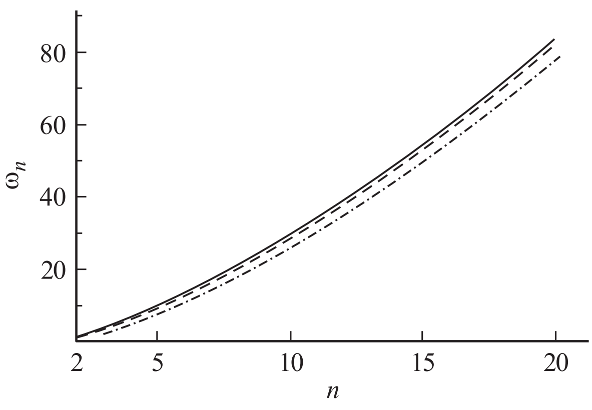

Рис. 1. Зависимости частот колебаний заряженной капли в однородном поле от номера моды. Параметр Тейлора $w=0.05$, кривые расположены сверху вниз согласно увеличению параметра Рэлея ($W=0,\ 0.1,\ 0.3$).

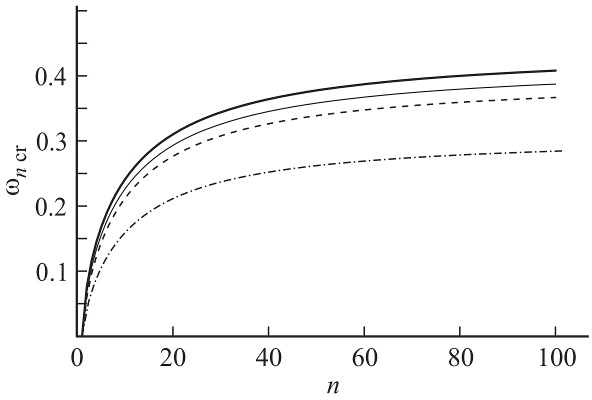

Рис. 2. Зависимость критического значения параметра Тейлора от номера моды для нескольких величин зарядового параметра Рэлея. Графики расположены сверху вниз в порядке возрастания параметра Рэлея ($W=0,\ 0.05,\ 0.1,\ 0.3$).

Из системы (4) видно, что для заряженной капли в однородном элкктростатическом поле выделенная мода (под выделенной модой будем понимать n-ю моду) взаимодействует с четырьмя ближайшими. Отметим, что в случае незаряженной капли во внешнем электростатическом поле n-я мода взаимодействует в том же приближении только с двумя модами [11].

Из условия равенства нулю квадрата собственной частоты моды осцилляций $\omega_n^2=0$ получим критическое значение параметра Тейлора в зависимости от n и W:

$$\omega_{n\,\mathrm{kr}}=\frac{1}{K_\omega}\,\{n(n-1)[(2+n)-4W]\},$$

$$\begin{aligned}K_\omega\equiv\Bigg(&-24n+36n^2K^s_{1,-1+n,n}K^s_{1,n,-1+n}\\&+36n(2+n)K^s_{1,n,1+n}K^s_{1,1+n,n}\\&+\frac{3n(-18+3n^2+8W-4W^2+n(3+16W-4W^2))K^s_{2,n,n}}{1-W}\\&+\frac{3(-2+7n+n^2+4W)K^\theta_{2,n,n}}{1-W}\Bigg).\end{aligned}$$

На рис. 2 представлены зависимости критического значения параметра Тейлора $\omega_{n\,\mathrm{kr}}$ от номера моды, для нескольких величин зарядового параметра Рэлея. Графики расположены сверху вниз в порядке возрастания параметра Рэлея ($W=0.1,\ 0.05,\ 0.1,\ 0.3$).

Как видно из рис. 2, зависимость $\omega_{n\,\mathrm{kr}}$ выходит на насыщение при больших n, а наличие на капле заряда приводит к заметному снижению кривой и уровня горизонтальной асимптотики, к которой зависимость $\omega_{n\,\mathrm{kr}}$ стремится при больших номерах мод. Снижение уровня асимптотики означает, что все моды колебаний могут стать одновременно неустойчивыми при меньшей напряженности внешнего поля.

Заметим, что условия сохранения объема капли и неподвижности ее центра масс определяют величины амплитуд нулевой и первой мод соответственно, которые несложно получить, подставляя в соответствующие интегральные условия выражение для формы поверхности:

$$\alpha_0(t) = -\frac{2}{15}\,e^2\alpha_2(t),$$

$$\alpha_1(t) = -e^2\left(K^s_{2,1,1}\alpha_2(t) + \frac{3}{7}\,K^s_{2,1,3}\alpha_3(t)\right). \qquad (5)$$

Так амплитуды возмущений $\alpha_0(t)$, $\alpha_1(t)$ определены, систему уравнений (4) можно решать для $n \geq 2$ методом последовательных приближений. В нулевом приближении пренебрегаем слагаемыми, отвечающими за взаимодействие мод, тогда система примет вид

$$\alpha_n^{0''}(t) + \omega_n^2\alpha_n^0(t) = 0 \quad (n \geq 2).$$

Решение этого гармонического уравнения очевидно:

$$\alpha_n^0(t) = A_n^+\exp(i\omega_n t) + A_n^-\exp(-i\omega_n t),$$

где $A_n^+ = \mathrm{const}$.

Ограничиваясь в расчетах вторым приближением (по двум малым параметрам), для вычисления амплитуд $\alpha_n(t)$ получим следующее уравнение:

$$\alpha_n''(t) + \omega_n^2\alpha_n(t) - \sum_{m\in\Theta}\left(C_m^f(n) - \omega_{n+m}^2 C_m^d(n)\right)$$

$$\times\,[A_{n+m}^+\exp(i\omega_{n+m}t) + A_{n+m}^-\exp(-i\omega_{n+m}t)] = 0,$$

$$\Theta = \{-2, -1, 1, 2\}. \qquad (6)$$

Уравнение (6) является неоднородным уравнением второго порядка. Его общее решение ищется в виде суммы общего решения однородного уравнения:

$$\alpha_n^{un}(t) = A_n^+\exp(i\omega_n t) + A_n^-\exp(-i\omega_n t) \qquad (7)$$

и частного решения неоднородного уравнения, которое представим в виде суперпозиции экспонент, аналогичных экспонентам, входящим в функцию неоднородности:

$$\alpha_{n\pm m}^{nun}(t) = B_{n,\pm m}^+\exp(i\omega_{n\pm m}t) + B_{n,\pm m}^-\exp(-i\omega_{n\pm m}t)$$

$$(m = 1, 2). \qquad (8)$$

Подставляя (8) в уравнение (6), определим выражения для коэффициентов $B_{n,\pm m}^{\pm}$:

$$B_{n,\pm m}^{\pm} = C_{\pm m}^s(n)A_{n\pm m}^{\pm},$$

$$C_{\pm m}^s(n) = \frac{C_{\pm m}^f(n) - \omega_{n\pm m}^2 C_{\pm m}^d(n)}{\omega_n^2 - \omega_{n\pm m}^2}, \quad m = 1, 2. \qquad (9)$$

Отметим, что исходя из физических соображений, амплитуды колебаний должны описываться вещественными функциями, поэтому можно записать $B_{n,\pm m}^+ = \left(B_{n,\pm m}^-\right)^*$, $A_n^+ = \left(A_n^-\right)^*$, где «*» обозначает комплексное сопряжение. Используя (7), (8) с учетом соотношений (9) для $B_{n,\pm m}^+$ и представляя коэффициенты $A_n^{\pm}$ в виде $A_n^{\pm} = a_n\exp(\pm ib_n)$, где a_n и b_n — вещественные константы, запишем выражение для $\alpha_n(t)$ как суперпозицию $\alpha_n^{un}(t)$ и $\alpha_n^{(nun)}(t)$:

$$\alpha_n(t) = a_n\exp[i(\omega_n t + b_n)]$$

$$+\sum_{m=1}^{2} a_{n\pm m}\exp[i(\omega_{n\pm m}t + b_{n\pm m})]C_{\pm m}^s(n) + \mathrm{cc}. \qquad (10)$$

Аббревиатура cc обозначает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным. В решении (10) константы a_n и b_n определяются из начальных условий.

Начальные условия

Рассмотрим случай, когда в начальный момент времени возбуждена мода с номером k, амплитуду которой положим равной константе ξ, а скорость движения поверхности в начальынй момент примем равной нулю:

$$t = 0: \qquad \alpha_n(t) = \xi\delta_{n,k}, \quad \alpha_n'(t) = 0 \quad (n \geq 2). \qquad (11)$$

Подставляя решение (10) в систему начальных условий (11), получим

$$\begin{cases} a_n\cos(b_n) + \sum\limits_{m=1}^{2} a_{n\pm m}\cos(b_{n\pm m})C_{\pm m}^s(n) = \xi\delta_{n,k}, \\ a_n\omega_n\sin(b_n) + \sum\limits_{m=1}^{2} a_{n\pm m}\omega_{n\pm m}\sin(b_{n\pm m})C_{\pm m}^s(n) = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Систему связанных уравнений (12) будем решать методом последовательных приближений. Как видно из соотношения (12) по сравнению со случаем незаряженной капли в однородном электростатическом поле, связность мод увеличилась: добавилось взаимодействие изначально возбужденной k-й моды с ближайшими модами с номерами $k \pm 1$.

В нулевом приближении пренебрежем взаимодействием мод, после чего система примет вид

$$\begin{cases} a_n^0\cos(b_n^0) = \xi\delta_{n,k}, \\ a_n^0\omega_n\sin(b_n^0) = 0, \end{cases}$$

а ее решения при $\omega_n \neq 0$ достаточно очевидны:

$$\begin{cases} a_n^0 = \xi\delta_{n,k}, \\ b_n^0 = \pi m, \quad m \in \mathbb{Z}. \end{cases} \qquad (13)$$

В первом приближении запишем систему, учитывая решение (13) в слагаемых, которыми пренебрегаем в нулевом приближении. При этом α (см.(11)) приводится к виду

$$\begin{cases} a_n\cos(b_n) + \sum\limits_{m=1}^{2} a_{n\pm m}^0\cos(b_{n\pm m}^0)C_{\pm m}^s(n) = \xi\delta_{n,k}, \\ a_n\omega_n\sin(b_n) + \sum\limits_{m=1}^{2} a_{n\pm m}^0\omega_{n\pm m}\sin(b_{n\pm m}^0)C_{\pm m}^s(n) = 0. \end{cases} \qquad (14)$$

Решая систему (14) для различных n, получим, что она дает нетривиальные решения для номеров в интервале $k-2 \le n \le k+2$:

$$\begin{cases} a_k = \xi, \\ \sin(b_k) = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_{k\pm m} = -\xi C^s_{\mp}(k \pm m), \\ \sin(b_{k\pm m}) = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Тогда выражения амплитуд соответствующих мод получим из (10) в виде

$$\alpha_k(t) = \xi \cos \omega_{kt},$$

$$\alpha_{k\pm m}(t) = \xi C^s_{\mp m}(k)(\cos\omega_k t - \cos\omega_{k\pm m} t) \ \ (m = 1, 2), \tag{16}$$

где $C^s_{\pm m}(k)$ определяется (9).

Выражение для функции, описывающей возмущение поверхности капли, $\xi(\theta, t)$ с учетом решений (15) запишется в виде

$$\xi(\theta, t) = \xi \cos(\omega_{kt}) P_k(\mu)$$

$$+ \xi \sum_{m=1}^{2} C^s_{\mp m}(k \pm m)[\cos(\omega_{kt}) - \cos(\omega_{k\pm m} t)] P_{k\pm m}(\mu). \tag{17}$$

На рис. 3 показан временной ход нулевой моды осцилляций, полученный из условия сохранения объема капли в виде (5), рассчитанный при различных значениях зарядового параметра W. Как известно, в расчетах первого по ξ приближения для несжимаемой жидкости нулевая мода не возбуждается [18, с. 345], так как ее возбуждение соответствовало бы радиальным осцилляциям капли, невозможным в несжимаемой жидкости. В нелинейных расчетах нулевая мода возбуждается уже во втором порядке малости [19] и имеет компенсационный характер: ее возбуждение компенсирует изменение объема жидкости, возникающее за счет нелинейного взаимодействия колебательных мод. В данной задаче возбуждение нулевой моды компенсирует изменение объема в результате взаимодействия равновесной деформации поверхности капли и возмущения ξ. Из рис. 3 видно, что амплитуда и период осцилляций нулевой моды увеличиваются с ростом зарядового параметра.

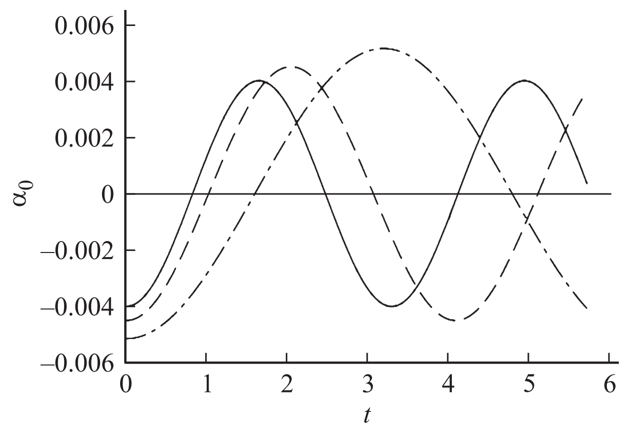

Рис. 3. Временная зависимость амплитуды нулевой моды осцилляций при амплитуде изначально возбужденной 2-моды $\xi = 0.1$ и при различных значениях параметра Рэлея (сплошная — $W = 0.1$, штриховая — $W = 0.2$, штрихпунктирная — $W = 0.3$).

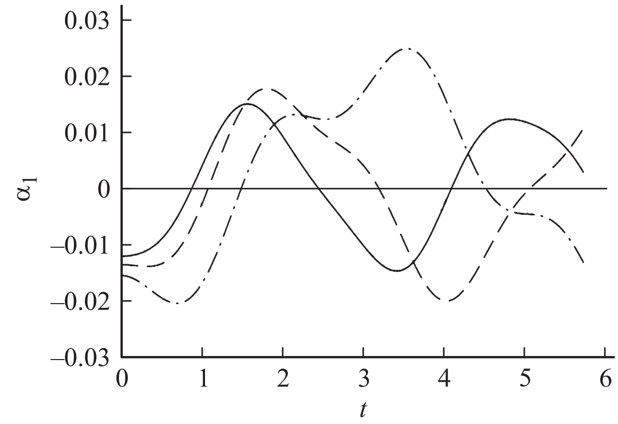

Рис. 4. Временная зависимость амплитуды нулевой моды осцилляций при амплитуде изначально возбужденной 2-й моды и при различных значениях параметра Рэлея (сплошная — $W = 0.1$, штриховая — $W = 0.2$, штрихпунктирная — $W = 0.3$).

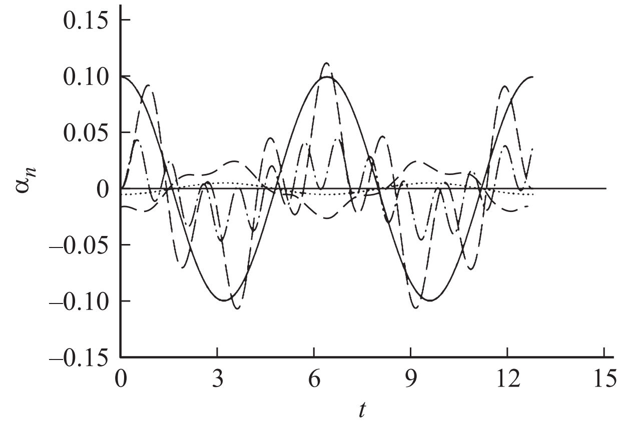

Рис. 5. Временная зависимость амплитуд мод осцилляций при параметре Тейлора $\omega = 0.03$, параметре Рэлея $W = 0.3$, амплитуде изначально возбужденной 2-й моды $\xi = 0.1$. Кривые соответственно: пунктир — $n = 0$, сплошная тонкая — $n = 1$, сплошная толстая — $n = 2$, штриховая тонкая — $n = 3$, штрихпунктирная толстая — $n = 4$.

На рис. 4 показан временной ход первой моды осцилляций, полученный из условия неподвижности ее центра масс (см. (5)). В расчетах первого порядка малости первая мода не возбуждается [18, с. 345], так как ее возбуждение соответствовало бы трансляционным осцилляциям, невозможным в системе отсчета, связанной с центром масс капли. В нелинейных расчетах первая мода возбуждается во втором порядке малости, когда в спектре мод, определяющих начальную деформацию поверхности капли имеются две или несколько мод с последовательными номерами [20,21]. Возбуждение первой моды, так же как и нулевой, имеет компенсационный характер — компенсирует импульс, связанный с нелинейным взаимодействием колебательных мод поверхности, и обеспечивает, таким образом, неподвижность центра масс капли. В рассматриваемом случае заряженной капли в однородном электростатическом поле возбуждение первой моды компенсирует импульс, возникающий вследствие взаимодействия равновесной деформации и возмущения ξ. Таким образом, расчеты выполняются во втором порядке малости с учетом наличия двух малых параметров. Из рис. 4 видно, что амплитуда и период осцилляций первой моды увеличиваются с ростом зарядового параметра.

На рис. 5 показаны все моды, возбуждающиеся при задании в начальный момент времени второй моды осцилляций: возбуждаются четыре ближайшие моды (по две с каждой стороны). Амплитуды колебательных мод: третьей и четвертой сравнимы с амплитудой второй моды, а амплитуды компенсационных мод нулевой и первой (пропорциональные произведению двух малых параметров задачи) примерно на порядок меньше.

Заключение

В рассмотрении, проведенном во втором порядке малости по двум малым параметрам, обнаружилось, что критические значения параметра Тейлора для заряженной или незаряженной капли во внешнем однородном электростатическом поле с увеличением номера моды выходят на насыщение. Этим критерий неустойчивости капли в поле отличается от критерия неустойчивости для сильно заряженной капли, для которой критическое значение параметра Рэлея стремится к бесконечности пропорционально полуторной степени номера моды. Показано, что зависимость критической величины полевого параметра (параметра Тейлора) от номера моды n выходит на насыщение при $n \approx 50$, и можно указать значение w (снижающееся при наличии на капле заряда), при котором все моды неустойчивы. В этом случае капля выбросит струю, как это отмечено в экспериментах Ким и Дана [13].

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00170 и 14–08-00240.

Приложение

Выражения для коэффициентов эволюционного уравнения $C_j^f(n)$, $C_j^d(n)$.

$$C_{-2}^f(n) = -\Big(-36wn^2K^s_{1,-2+n,-1+n}K^s_{1,-1+n,n}$$

$$+\frac{e^2}{3}n(-2n(1+n)+4(4+(7-5n)W$$

$$+(1+n)W^2))K^s_{2,-2+n,n}-\frac{e^2}{3}n(6+4W)K^\theta_{2,-2+n,n}\Big),$$

$$C_{-1}^f(n) = 12n(2n-3)\sqrt{wW}K^s_{1,-1+n,n},$$

$$C_1^f(n) = 12n(2n-1)\sqrt{wW}K^s_{1,1+n,n},$$

$$C_2^f(n) = -\Big(-36wn(2+n)K^s_{1,1+n,n}K^s_{1,2+n,1+n}$$

$$-\frac{e^2}{3}n(2n(1+n)-4(4-(9+5n)W$$

$$+(1+n)W^2))K^s_{2,2+n,n}-\frac{e^2}{3}n(6+4W)K^\theta_{2,2+n,n}\Big),$$

$$C_{-2}^d(n) = -\frac{e^2}{3}\left(3K^s_{2,-2+n,n}+\frac{K^\theta_{2,-2+n,n}}{(n-2)}\right),$$

$$C_{-1}^d(n) = C_1^d(n) = 0;$$

$$C_2^d(n) = -\frac{e^2}{3}\left(-K^s_{2,2+n,n}+\frac{K^\theta_{2,2+n,n}}{(n+2)}\right).$$

Список литературы

[1] *Doyle A., Moffet D.R., Vonnegut B.* // J. Coll. Sci. 1964. Vol. 19. P. 136–143.
[2] *Berg T.G.O., Trainor R.J., Vaughan U.* // J. Atmosph. Sci. 1970. Vol. 27. N 11. P.1173–1181.
[3] *Schweizer J.D., Hanson D.N.* // J. Coll. Int. Sci. 1971. Vol. 35. N 3. P. 417–423.
[4] *Roulleau M., Desbois M.* // J. Atmosph. Sci. 1972. Vol. 29. N 4. P. 565–569.
[5] *Duft D., Lebbeus H., Huber B.A.* // Phys. Rev. Lett. 2002. Vol. 89. N 8. P. 1–4.
[6] *Duft D., Achtzehn T., Muller R.* et al. // Nature. 2003. Vol. 421. N 6919. P. 128.
[7] *Grimm R.L., Beauchamp J.L.* // J. Phys. Chem. B. 2005. Vol. 109. P. 8244–8250.
[8] *Rayleigh (Strutt J.W.)* // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
[9] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 5. С. 50–60.
[10] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. Вып. 11. С. 44–51.
[11] *Григорьев А.И., Ширяев А.А., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 2013. № 5. С. 127– 140.
[12] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Ширяев А.А.* // ЖТФ. 2013. Т. 84. Вып. 2. С. 8–16.
[13] *Kim O.V., Dunn P.F.* // Langmuir. 2010. Vol. 26. P. 15 807–15 813.
[14] *Григорьев А.И., Шриаева С.О., Белавина Е.И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
[15] *Ширяевва С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 10. С. 32–40.
[16] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
[17] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Хресонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
[18] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* // Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
[19] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 2. С. 27–35.
[20] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 4. С. 15–19.
[21] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Жаров А.Н.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 60–63.