01

Ядра интеграла столкновений скалярного нелинейного уравнения Больцмана для псевдостепенных потенциалов

© Л.А. Бакалейников,[1] Э.А. Тропп,[1] Е.Ю. Флегонтова,[1] А.Я. Эндер,[1] И.А. Эндер[2]

[1] Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
[2] Санкт-Петербургский государственный университет,
199164 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: bakal.ammp@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 29 апреля 2014 г.)

Получены аналитические выражения для ядер интеграла столкновений изотропного нелинейного уравнения Больцмана в случае псевдостепенных потенциалов взаимодействия. Показано, что для произвольного показателя степени ядра выражаются через гипергеометрические функции. В ряде случаев ядра удается выразить через элементарные функции.

Разработка методов решения нелинейного уравнения Больцмана является актуальной для широкого класса современных прикладных и технических проблем. Информация о поведении функции распределения (ФР) в области больших скоростей оказывается определяющей при изучении химических реакций, процессов возбуждения, диссоциации, ионизации и других неупругих процессов. В то же время решение нелинейного кинетического уравнения при сильном отклонении ФР от равновесия сопряжено со значительными трудностями. Основной из них является расчет интеграла столкновений, который представляет собой билинейный интегральный оператор. Ядро этого оператора зависит от векторных скоростей сталкивающихся частиц.

В середине 70-х годов для однородного изотропного по скоростям случая было найдено одно аналитическое решение нелинейного уравнения Больцмана, которое получило название BKW-решения [1,2]. Само уравнение Больцмана для однородной изотропной ФР принято называть скалярным кинетическим уравнением. Вследствие изотропности ФР по скоростям структура интеграла столкновений скалярного уравнения существенно упрощается, и ядро интеграла столкновений оказывается зависящим только от модулей скоростей частиц. Открытие аналитического решения нелинейного кинетического уравнения привело к появлению целой серии работ, посвященных изучению скалярного уравнения Больцмана. В частности были получены аналитические выражения для ядра интеграла столкновений скалярного уравнения для случая твердых шаров и псевдомаксвелловских молекул [3–5]. На основе этих выражений были предложены и разработаны методы решения релаксационных задач как для одного газа, так и для смеси газов с разными массами [6–8].

Знания скалярного ядра, конечно же, недостаточно для решения уравнения Больцмана в общем неизотропном и пространственно неоднородном случае. Использование скалярного уравнения оказывается невозможным в таких задачах, как взаимодействие сильных ударных волн, тепло- и массо-перенос в особо напряженных режимах, поведение заряженных частиц при наличии сильных электрических и магнитных полей.

Для построения точных решений общего уравнения Больцмана, особенно ФР в области больших скоростей, необходимо дальнейшее развитие аналитических и полуаналитических методов. К ним относятся моментный метод с разложением ФР по сферическим полиномам Эрмита и метод, основанный на разложении ФР по сферическим функциям.

В последнее десятилетие значительного прогресса удалось добиться путем развития моментного метода. В [9] было показано, что нелинейные матричные элементы (МЭ), к которым сводится в этом методе интеграл столкновений, связаны между собой большим числом соотношений. Это позволило построить МЭ с очень большими индексами. В [10–12] с помощью моментного метода была найдена ФР примеси ионов в достаточно сильном электрическом и скрещенных электрическом и магнитном полях.

Одним из недостатков моментного метода является то, что не всякая ФР может быть разложена по сферическим полиномам Эрмита из-за присутствия в них полиномов Сонина. От этого недостатка можно избавиться при переходе к разложению по сферическим гармоникам. Если скалярное уравнение Больцмана представляет собой одно интегро-дифференциальное уравнение, то при разложении по сферическим гармоникам уравнение Больцмана переходит в систему связанных интегро-дифференциальных уравнений. Эффективность использования такой системы была подтверждена в [13], правда, только для линейных задач вблизи границ. Связано это с тем, что к моменту написания работы [13] в неизотропном случае были известны только ядра линейного интеграла столкновений для модели твердых шаров, построенные в работах [14,15]. Позднее эти ядра были получены заново в работе [16].

Таким образом, появляется актуальная задача построения ядер $G^{l,m}_{l_1,m_1,l_2,m_2}(v, v_1, v_2)$ интегральных операторов, возникающих при разложении нелинейного неизотропного интеграла столкновений по сферическим гармоникам для различных сечений взаимодействия. Эти ядра, зависящие только от модулей скоростей, представляют собой проекции ядра, зависящего от векторных скоростей $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$, на сферические гармоники $Y_{l,m}(\mathbf{v}/|\mathbf{v}|)$, $Y_{l_1,m_1}(\mathbf{v}_1/|\mathbf{v}_1|)$, $Y_{l_2,m_2}(\mathbf{v}_2/|\mathbf{v}_2|)$. Как показано в [9,17], в самом общем случае ядра $G^{l,m}_{l_1,m_1,l_2,m_2}(v, v_1, v_2)$ пропорциональны ядрам $G^{l,0}_{l_1,0,l_2,0}(v, v_1, v_2) \equiv G^{l}_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$. Важно отметить, что коэффициенты пропорциональности являются простыми линейными комбинациями коэффициентов Клебша–Гордана и не зависят от сечения взаимодействия. Некоторые фундаментальные свойства ядер $G^{l}_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$ исследованы в [18].

В [17,19] для ядер $G^{l}_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$ построен набор рекуррентных соотношений, связывающих ядра с соседними индексами. Эти рекуррентные соотношения содержат дифференциальные операторы. Стартовыми для них являются изотропные ядра $G^{0}_{0,0}(v, v_1, v_2)$, которые как раз и представляют собой ядра скалярного уравнения. Таким образом, построение скалярных ядер имеет особое значение.

В [20,21] показано, как с помощью преобразования Лапласа нелинейные ядра $G^{l}_{l,0}(v, v_1, v_2)$ для произвольных l можно построить, если известны линейные ядра. Для модели твердых шаров и псевдомаксвелловских молекул получены аналитические формулы. При $l = 0$ из [21] можно получить ядра $G^{0}_{0,0}(v, v_1, v_2)$ для этих двух случаев. Несложные преобразования демонстрируют полное совпадение этих ядер с выражениями для скалярных ядер для твердых шаров и псевдомаксвелловских молекул в энергетическом представлении, приведенными в [22]. Таким образом, к настоящему времени ядра $G^{0}_{0,0}(v, v_1, v_2)$ известны только для случаев твердых шаров и псевдомаксвелловских молекул.

В кинетической теории иногда рассматривают псевдостепенные потенциалы взаимодействия. При этом зависимость полного сечения от относительной скорости соответствует некоторому степенному потенциалу ($V \propto 1/r^{\kappa}$), а соответствующее дифференциальное сечение не зависит от угла рассеяния, т. е. считается изотропным. В настоящей работе получены выражения для ядер $G^{0}_{0,0}(v, v_1, v_2)$ интеграла столкновений скалярного уравнения в случае псевдостепенных потенциалов для произвольных значений κ.

Ядра построены в аналитическом виде, что особенно важно для построения ядер $G^{l}_{l_1,l_2}(v, v_1, v_2)$ по рекуррентным соотношениям, содержащим дифференциальные операторы.

Перейдем к выводу выражений для ядер. Нелинейное уравнение Больцмана для однородного газа при отсутствии внешних сил имеет вид

$$n_0 \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{v}, t) = n_0^2 \hat{I}(f, f). \tag{1}$$

Здесь n_0 — концентрация частиц в единице объема, $f(\mathbf{v}, t)$ — нормированная на единицу ФР.

Пятикратный интеграл столкновений $\hat{I}(f, f)$ имеет вид

$$\hat{I}(f, f) = \iint f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) g\sigma(g, \theta) d\mathbf{v}' d\mathbf{k} - \iint f(\mathbf{v}) f(\mathbf{v}') g\sigma(g, \theta) d\mathbf{v}' d\mathbf{k}, \tag{2}$$

где $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — скорости сталкивающихся частиц до и после взаимодействия, $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v} + \mathbf{v}' + \mathbf{k}g)/2$, $\mathbf{v}_2 = (\mathbf{v} + \mathbf{v}' - \mathbf{k}g)/2$, $\mathbf{g} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'$ — вектор относительной скорости, $\mathbf{k}$ — единичный вектор, направленный вдоль вектора относительной скорости частиц после столкновения. Угол рассеяния θ определяется соотношением $\cos\theta = \mathbf{k} \cdot \mathbf{g}/|\mathbf{g}|$. Величина $\sigma(g, \theta)$ представляет собой дифференциальное сечение рассеяния. Интеграл столкновений (1) может быть записан как интегральный оператор [23,24]

$$\hat{I}(f, f) = \iint G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) f(\mathbf{v}_1) f(\mathbf{v}_2) d\mathbf{v}_1 d\mathbf{v}_2, \tag{3}$$

где $G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ — ядро интеграла столкновений, зависящее от векторных скоростей. Такая форма записи оказывается удобной для анализа и преобразования уравнения (1). Ядро $G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ может быть представлено в виде разности ядер интегралов обратных $G^{+}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ и прямых $G^{-}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ столкновений,

$$G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = G^{+}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) - G^{-}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2), \tag{4}$$

которые тесно связаны с введенной в [25] функцией $W(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2|\mathbf{v}, \mathbf{v}')$, описывающей вероятность того, что частицы со скоростями $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ после столкновения приобретают скорости $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$. Согласно [25], $W(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2|\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ имеет вид

$$W(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2|\mathbf{v}, \mathbf{v}') = \sigma\left(|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|, \arccos\left(\frac{((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)(\mathbf{v} - \mathbf{v}'))}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2||\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}\right)\right) \times \delta\left(\frac{\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v} - \mathbf{v}'}{2}\right) \delta\left(\frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 - (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^2}{2}\right). \tag{5}$$

Здесь использовано явное выражение для угла рассеяния θ через относительные скорости частиц до и после взаимодействия, $\theta = \arccos\left(\frac{((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)(\mathbf{v} - \mathbf{v}'))}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2||\mathbf{v} - \mathbf{v}'|}\right)$. Очевидно, что интегрирование (5) по $\mathbf{v}'$ дает выражение для $G^{+}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$:

$$G^{+}(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = 8\sigma\left(|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|, \arccos\left(\frac{((\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)(2\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2))}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2||2\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}\right)\right) \times \frac{\delta(|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2| - |2\mathbf{v} - \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|)}{|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|}. \tag{6}$$

Легко показать, что ядро интеграла прямых столкновений связано с $W(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2|\mathbf{v}, \mathbf{v}')$ соотношением

$$G^-(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}) \iint W(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2|\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2) d\mathbf{v}'_2 d\mathbf{v}'_1, \quad (7)$$

и, следовательно, имеет вид

$$G^-(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \delta(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v})|\mathbf{v} - \mathbf{v}_2|\Sigma(|\mathbf{v} - \mathbf{v}_2|), \quad (8)$$

где $\Sigma(\mathbf{v})$ — полное сечение рассеяния.

В изотропном случае ФР в (1) зависит лишь от модуля скорости, и интеграл столкновений может быть записан через скалярное ядро. Его легко получить, усредняя (1) по направлениям скорости $\mathbf{\Omega} = \mathbf{v}/v$, $\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{v}_1/v_1$, $\mathbf{\Omega}_2 = \mathbf{v}_2/v_2$. Это дает

$$n_0 \frac{\partial}{\partial t} f(v, t) = n_0^2 \iint G_{00}^0(v, v_1, v_2) f(v_1) f(v_2) v_1^2 v_2^2 dv_1 dv_2, \quad (9)$$

$$G_{00}^0(v, v_1, v_2) = \frac{1}{4\pi} \iiint G(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) d\mathbf{\Omega} d\mathbf{\Omega}_1 d\mathbf{\Omega}_2. \quad (10)$$

Можно показать, что ядро интеграла прямых столкновений, $G_{00}^{-0}(v, v_1, v_2)$, легко вычисляется, если известно $G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2)$:

$$G_{00}^{-0}(v, v_1, v_2) = \frac{\delta(v_1 - v)}{v^2} \int G_{00}^{+0}(v', v_1, v_2)(v')^2 dv'. \quad (11)$$

Расчет скалярного ядра $G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2)$ для псевдостепенных потенциалов и является целью настоящей работы. Отметим, что скалярное ядро рассеяния $G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2)$ для модели твердых шаров было рассчитано в работе [4]. При этом использовалась инвариантность относительно вращения, вследствие которой для любой модели рассеяния функция $G^+(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ зависит только от модулей скоростей $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ и углов между этими скоростями $\theta_1 = \angle(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1)$, $\theta_2 = \angle(\mathbf{v}, \mathbf{v}_2)$, $\theta' = \angle(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$.

В сферической системе координат с осью $\mathbf{e}_z$ интеграл (10) перепишется

$$G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{1} d(\cos\xi_1) \int_0^{2\pi} d\omega_1 \int_{-1}^{1} d(\cos\xi) \int_0^{2\pi} d\omega \times \int_{-1}^{1} d(\cos\xi_2) \int_0^{2\pi} d\omega_2 G^+(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2). \quad (12)$$

Здесь (ξ, ω), (ξ_1, ω_1), (ξ_2, ω_2) — сферические координаты векторов $\mathbf{\Omega} = \mathbf{v}/v$, $\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{v}_1/v_1$, $\mathbf{\Omega}_2 = \mathbf{v}_2/v_2$ соответственно. Косинусы углов θ_1, θ_2, θ' выражаются через координаты векторов скорости в сферической системе координат следующим образом:

$$\cos\theta_1 = \cos\xi \cos\xi_1 + \sin\xi \sin\xi_1 \cos(\omega - \omega_1), \quad (13)$$

$$\cos\theta_2 = \cos\xi \cos\xi_2 + \sin\xi \sin\xi_2 \cos(\omega - \omega_2), \quad (14)$$

$$\cos\theta' = \cos\xi_1 \cos\xi_2 + \sin\xi_1 \sin\xi_2 \cos(\omega_1 - \omega_2). \quad (15)$$

В работе [4] показано, что внутренний четырехкратный интеграл сводится к трехкратному, и выражение для ядра (12) может быть записано в виде

$$G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{1} d(\cos\xi_1) \int_0^{2\pi} d\omega_1 I, \quad (16)$$

$$I = 4\pi \int_{-1}^{1} d(\cos\theta') \int_{-1}^{1} d(\cos\theta_1) \times \int_{\cos(\theta_1+\theta')}^{\cos(\theta_1-\theta')} \frac{G^+(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) d(\cos\theta_2)}{(\cos(\theta_1-\theta') - \cos\theta_2)^{1/2}(\cos\theta_2 - (\cos(\theta_1+\theta'))^{1/2}}. \quad (17)$$

Рассмотрим ядро (16) для псевдостепенных потенциалов. В случае степенной зависимости потенциала V от расстояния r $(V \sim 1/r^\kappa)$ зависимость дифференциального сечения от угла рассеяния и от относительной скорости частиц может быть разделена, т. е. сечение рассеяния $\sigma(g, z)$ может быть представлено в виде

$$\sigma(g, \theta) = \frac{1}{4\pi} g^{2\mu-1} F_\mu(z), \quad z = \sin^2(\theta/2),$$

$$\mu = (\kappa - 4)/2\kappa, \quad (18)$$

где θ — угол рассеяния, $g = |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ — относительная скорость сталкивающихся частиц, а $F_\mu(z)$ связано с полным сечением $\Sigma(g) = \iint \sigma(g, \theta) \sin\theta d\theta d\chi$ соотношением

$$\frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} F_\mu(z) d\mathbf{\Omega} = \Sigma(g)/g^{2\mu-1}. \quad (19)$$

В случае псевдостепенных потенциалов, как уже отмечалось, дифференциальное сечение рассеяния изотропно, а полное сечение зависит от модуля относительной скорости степенным образом, т. е.

$$\sigma(g, \theta) = A_\mu g^{2\mu-1} \frac{1}{4\pi}, \quad A_\mu = \frac{1}{4\pi} \int_{4\pi} F_\mu(z) d\mathbf{\Omega}. \quad (20)$$

Подстановка (20) в (6) после некоторых преобразований дает

$$G^+(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) = \frac{A_\mu}{\pi v v_2} \times \frac{\delta\left(-\frac{v_1}{v}\cos\theta' + \frac{v_1}{v_2}\cos\theta_1 + \cos\theta_2 - \frac{v}{v_2}\right)}{|v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\theta'|^{1/2-\mu}}. \quad (21)$$

Вычисление двукратного внутреннего интеграла в (17) проводится так же, как в работе [23]. Интеграл (17) не зависит от $\mathbf{\Omega}_1 = \mathbf{v}_1/v_1$, и ядро $G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2)$ может быть записано в виде

$$G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2) = 4\pi \frac{A_\mu}{v} \int\limits_{-1}^{1} \frac{d(\cos\theta')}{(v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\theta')^{1/2-\mu}}$$

$$\times \frac{\theta\left(v_1^2 + v_2^2 - v^2 - \left(\frac{v_1v_2}{v}\right)^2 \cos^2\theta'\right)}{(v_1^2 + v_2^2 + 2v_1v_2\cos\theta')^{1/2}}. \qquad (22)$$

Пределы интегрирования в (22) определяются аргументом θ-функции. Если $v^2 > v_1^2 + v_2^2$, то аргумент в θ-функции меньше нуля при всех значениях $\cos\theta'$, и интеграл равен нулю. Если $\frac{v}{v_1v_2}\sqrt{v_1^2 + v_1^2 - v^2} > 1$, то ограничений на $|\cos\theta'|$ нет, и пределы в (22) не меняются. Это неравенство выполняется при $v_1 > v$, $v_2 < v$ или $v_1 < v$, $v_2 > v$. В том случае, когда $\frac{v}{v_1v_2}\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v^2} < 1$, т.е. $v_1 > v$, $v_2 > v$ или $v_1 < v$, $v_2 < v$, величина $|\cos\theta'|$ оказывается ограниченной, и пределы интеграла необходимо заменить

$$-\frac{vv'}{v_1v_2} \le \cos\theta' \le \frac{vv'}{v_1v_2}, \quad v' = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - v^2}. \qquad (23)$$

Интеграл в (22) может быть выражен через гипергеометрические функции. Представим его в виде

$$G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2) = 4\pi \frac{A_\mu(v_1^2 + v_2^2)^\mu}{2vv_1v_2}$$

$$\times \left[\int\limits_{-1/b}^{a} \frac{bdx}{(1 - bx)^{1/2-\mu}(1 + bx)^{1/2}} + \int\limits_{1/b}^{a} \frac{bdx}{(1 + bx)^{1/2-\mu}(1 - bx)^{1/2}}\right], \qquad (24)$$

где $x = \cos\theta'$, $b = 2v_1v_2/(v_1^2 + v_2^2)$, $a = 1$ при $v_1 > v$, $v_2 < v$ или $v_1 < v$, $v_2 > v$, $a = vv'/(v_1v_2)$ при $v_1 > v$, $v_2 > v$ или $v_1 < v$, $v_2 < v$. Сделаем в первом из интегралов (24) замену переменной $y = (1 + bx)/(1 + ab)$, а во втором — замену $y = (1 - bx)/(1 - ab)$. После этого (24) принимает вид

$$G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2) = 4\pi \frac{A_\mu 2^{\mu-1/2}(v_1^2 + v_2^2)^\mu}{2vv_1v_2}$$

$$\times \left[(1 + ab)^{1/2} \int\limits_0^1 \frac{dy}{\left(1 - (1 + ab)y/2\right)^{1/2-\mu} y^{1/2}} - (1 - ab)^{1/2} \int\limits_0^1 \frac{dy}{\left(1 - (1 - ab)y/2\right)^{1/2-\mu} y^{1/2}}\right]. \qquad (25)$$

Используя формулу Эйлера для гипергеометрической функции

$$F(\alpha, \beta; \gamma; z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma - \beta)} \times \int\limits_0^1 y^{\beta-1}(1 - y)^{\gamma-\beta-1}(1 - yz)^{-\alpha}dy, \qquad (26)$$

можно переписать (25) в виде

$$G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2) = 4\pi \frac{A_\mu 2^{\mu-1/2}(v_1^2 + v_2^2)^{\mu-1/2}}{vv_1v_2}$$

$$\times \left[|v_1 + v_2| F\left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{(v_1 + v_2)^2}{2(v_1^2 + v_2^2)}\right) - |v_1 - v_2| F\left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{(v_1 - v_2)^2}{2(v_1^2 + v_2^2)}\right)\right] \qquad (27)$$

при $v_1 > v$, $v_2 < v$ или $v_1 < v$, $v_2 > v$,

$$G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2) = 4\pi \frac{A_\mu 2^{\mu-1/2}(v_1^2 + v_2^2)^{\mu-1/2}}{vv_1v_2}$$

$$\times \left[|v + v'| F\left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{(v + v')^2}{2(v_1^2 + v_2^2)}\right) - |v - v'| F\left(\frac{1}{2} - \mu, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{(v - v')^2}{2(v_1^2 + v_2^2)}\right)\right] \qquad (28)$$

при $v_1 > v$, $v_2 > v$ или $v_1 < v$, $v_2 < v$.

При $\mu = 1/2, 0, -1/2, -1, -3/2$, т.е. при показателях степени в степенной зависимости потенциала от расстояния $\kappa = \infty, 4, 2, 4/3, 1$ ядра (27), (28) могут быть выражены через элементарные функции. Результаты при $\mu = 1/2, 0$, соответствуют известным случаям твердых шаров и максвелловских молекул. Ядра для остальных случаев приводятся ниже.

1. $\mu = -1/2$

$$G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2) = \frac{2\sqrt{2}\pi A_{-1/2}}{vv_1v_2\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$$

$$\times \begin{cases} \ln\left(\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}+\sqrt{2}v'}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}-\sqrt{2}v'}\right) & v_1 < v \quad v_2 < v, \\ \ln\left(\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}+\sqrt{2}v}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}-\sqrt{2}v}\right) & v_1 > v \quad v_2 > v, \\ \ln\left(\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}+\sqrt{2}v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}-\sqrt{2}v_2}\right) & v_1 > v \quad v_2 < v, \\ \ln\left(\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}+\sqrt{2}v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}-\sqrt{2}v_1}\right) & v_1 < v \quad v_2 > v. \end{cases}$$

2. $\mu = -1$

$$G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2) = \frac{8\pi A_{-1}}{v v_1 v_2 (v_1^2 + v_2^2)}$$

$$\times \begin{cases} \frac{vv'}{v^2 - v'^2} & v_1 < v \quad v_2 < v, \\ \frac{vv'}{v'^2 - v^2} & v_1 > v \quad v_2 > v, \\ \frac{v_1 v_2}{v_1^2 - v_2^2} & v_1 > v \quad v_2 < v, \\ \frac{v_1 v_2}{v_2^2 - v_1^2} & v_1 < v \quad v_2 > v. \end{cases}$$

3. $\mu = -3/2$

$$G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2) = \frac{\pi A_{-3/2}}{v v_1 v_2 (v_1^2 + v_2^2)}$$

$$\times \begin{cases} \left(\frac{2v'(v^2+3v'^2)}{(v^2-v'^2)^2} + \frac{1}{\sqrt{2(v_1^2+v_2^2)}} \ln \left(\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}+\sqrt{2}v'}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}-\sqrt{2}v'} \right) \right) \\ v_1 < v \quad v_2 < v, \\ \\ \left(\frac{2v(3v^2+v'^2)}{(v^2-v'^2)^2} + \frac{1}{\sqrt{2(v_1^2+v_2^2)}} \ln \left(\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}+\sqrt{2}v}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}-\sqrt{2}v} \right) \right) \\ v_1 > v \quad v_2 > v, \\ \\ \left(\frac{2v_2(3v_1^2+v_2^2)}{(v_1^2-v_2^2)^2} + \frac{1}{\sqrt{2(v_1^2+v_2^2)}} \ln \left(\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}+\sqrt{2}v_2}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}-\sqrt{2}v_2} \right) \right) \\ v_1 > v \quad v_2 < v, \\ \\ \left(\frac{2v_1(v_1^2+3v_2^2)}{(v_1^2-v_2^2)^2} + \frac{1}{\sqrt{2(v_1^2+v_2^2)}} \ln \left(\frac{\sqrt{v_1^2+v_2^2}+\sqrt{2}v_1}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}-\sqrt{2}v_1} \right) \right) \\ v_1 < v \quad v_2 > v. \end{cases}$$

Заметим, что ядра (25) обладают свойством подобия, т. е. являются однородными функциями своих аргументов с показателем однородности $\rho = 2\mu - 3$, что находится в соответствии с результатами [18]. Кроме того, ядра $G_{00}^{+0}(v, v_1, v_2)$ имеют особенность в точке $v = v_1 - v_2$ при $-3/2 \leq \mu \leq -1/2$.

Работа выполнена частично при поддержке гранта СПбГУ 6.0.24.2010.

Список литературы

[1] *Бобылев А.В.* // Докл. АН СССР. 1975. Т. 225. Вып. 5. С. 1041.
[2] *Krook M., Wu T.T.* // Phys. Fluid. 1977. Vol. 20. P. 1589.
[3] *Barnsley M., Turchetti G.* // Lett. al Nuovo Cimento. 1981. Vol. 30. P. 359.
[4] *Kugerl G.* // ZAMP. 1989. Vol. 40. P. 816–827.
[5] *Ziff R.M.* // Phys. Rev. Lett. 1980. Vol. 45. P. 306; Phys. Rev. A. 1981. Vol. 23. P. 916.
[6] *Kabin K., Shizgal B.D.* // Exact Evaluation of Collision Integrals for the Nonlinear Boltzmann Equation, in Rarefied Gas Dynamics: 23rd Intern. Symp. Eds. A.D. Ketsdever, E.P. Muntz. American Institute of Physics. 2003. P. 35.
[7] *Sospedra-Alfonso R., Shizgal B.D.* // Hot Atom Populations in the Terrestrial Atmosphere. A Comparison of the Nonlinear and Linearized Boltzmann Equations, in 28th International Symposium on Rarefied Gas Dynamics. AIP Conf. Proc. 2012. Vol. 1501. P. 91–98.
[8] *Kugerl G.* // Phil. Trans. R. Soc. Lond. A. 1993. Vol. 342. P. 413–438.
[9] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* Интеграл столкновений уравнения Больцмана и моментный метод. СПб.: СПбГУ, 2003. 224 с.
[10] *Ender A.Y., Ender I.A., Gerasimenko A.B.* // The Open Plasma Phys. J. 2009. Vol. 2. P. 24–62.
[11] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 2. С. 8–17.
[12] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Герасименко А.Б.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 2. С. 18–28.
[13] *Loyalka S.K.* // Phys. Fluid. A. 1989. Vol. 1. P. 403–408.
[14] *Hilbert D.* // Math. Ann. 1912. Vol. 72. P. 562–577.
[15] *Hecke E.* // Math. Z. 1922. Vol. 12. P. 274–286.
[16] *Pekeris C.L., Alterman Z., Finkelstein L., Frankoowski K.* // Phys. Fluid. 1962. Vol. 5. P. 1608.
[17] *Ender A.Ya., Ender I.A., Bakaleinikov L.A., Flegontova E.Yu.* // Europ. J. Mech. B–Fluid. 2012. Vol. 36. P. 17–24.
[18] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 10. С. 12–21.
[19] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А.* // ДАН. 2011. Т. 437. Вып. 5. С. 1–3.
[20] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 6. С. 1–8.
[21] *Эндер А.Я., Эндер И.А., Бакалейников Л.А., Флегонтова Е.Ю.* // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. Вып. 15. С. 40–47.
[22] *Kugerl G., Shurrer F.* // Phys. Lett. A. 1990. Vol. 148. N 3–4. P. 158–163.
[23] *Kugerl G., Schurrer F.* // Phys. Rev. A. 1989. Vol. 39. P. 1429.
[24] *Эндер А.Я., Эндер И.А.* // Сиб. журн. Инд. Мат. 2003. Т. 6. Вып. 2. Р. 156.
[25] *Вальдман Л.* Явления переноса в газах при среднем давлении. В кн.: Термодинамика газов, М.: Машиностроение, 1970.