Журнал технической физики, 2014, том 84, вып. 12

01

О факторах деполяризации анизотропных эллипсоидов в анизотропной среде

© Л.А. Апресян, Д.В. Власов

Институт общей физики им. А.М. Прохорова РАН,
119991 Москва, Россия
e-mail: lesa@nsc.gpi.ru

(Поступило в Редакцию 16 января 2014 г. В окончательной редакции 22 мая 2014 г.)

Дано определение факторов деполяризации для анизотропного эллипсоида в анизотропной среде. Показано, что обычные факторы деполяризации, справедливые для случая анизотропных сред, можно распространить на анизотропные среды, если ввести понятие „приведенного эллипсоида", в котором учитываются как анизотропия формы эллипсоида, так и анизотропия среды.

Введение

Решение классической задачи об однородном изотропном эллипсоиде, помещенном в однородное внешнее поле в изотропной среде, описано во многих учебниках и широко применяется в приложениях (см., например, [1–3]; назовем этот случай для краткости „изотропным"). Прежде всего это относится к теории композитов и неоднородных сред [4], где это решение используется в базовых для этой теории приближения Максвелла–Гарнетта [5] и эффективной среды Бруггемана [6]. „Второе дыхание" использование этого решения получило в связи с развитием нанотехнологий и, в частности, нанокомпозитов, где модель однородного эллипсоида в настоящее время широко применяется при описании метаматериалов [7] и моделировании электродинамических характеристик композитов, содержащих наночастицы [8–11], в том числе углеродные нанотрубки и графены [12,13]. При этом макроскопическая изотропность композитной среды обычно обеспечивается хаотической ориентацией входящих в нее анизотропных частиц.

Ключевым понятием для этого решения в изотропном случае являются хорошо известные факторы деполяризации или пропонциональные им геометрические факторы эллипсоида.[1] Эти факторы позволяют выразить в явном виде поле внутри, а также, что особенно важно для приложений, тензор поляризуемости эллипсоида.

Менее известно описание общего анизотропного случая, а именно анизотропного эллипсоида, помещенного в однородное внешнее поле в анизотропной среде. Такая модель возникает, в частности, при излучении анизотропных композитных сред [14,15], которые в последние годы привлекают большое внимание в связи с перспективами разнообразных практических приложений (см., например, [16–25]). Кроме того, анизотропные композиты возникают также всякий раз, когда анизотропные включения недостаточно „хаотизированы" по направлениям либо принудительно ориентированы, так что в композите имеется выделенное направление. Учитывая, что в большинстве композитов неоднородные включения, как правило, анизотропны, а в случае нанокомпозитов часто могут считаться даже предельно анизотропными — т. е. одномерными (достаточно указать углеродные нанотрубки [20,23], а также цепочки полимерных макромолекул, содержащие двойные сопряженные связи в случае проводящих полимеров [26,27], либо сополимеров широкозонных и проводящих полимеров [28,29]), можно заключить, что анизотропный случай практически является не менее распространенным, чем изотропный.

Для анизотропной задачи об эллипсоиде в однородном внешнем поле также известен явный вид точного решения, которое легко получить, например, используя результаты работы [30], в которой была предложена общая форма приближения эффективной среды (см. ниже). В работе [31] это решение было выражено с использованием так называемого тензора Эшелби, введенного в [32,33] и широко используемого при рассмотрении задач теории упругости.

В настоящей методической работе мы рассмотрим соотношение между анизотропным и изотропным случаями, введя общее определение факторов деполяризации, а также понятие „приведенного эллипсоида", позволяющее выразить такие факторы в простой форме. Это позволяет описать особенности анизотропной задачи, избежав ошибок, которые допускаются в литературе, когда геометрические факторы эллипсоида, определенные для изотропной задачи, недостаточно обоснованно используются и в анизотропном случае (см., например, [34–36]).

Ниже показано, что в анизотропной среде можно сохранить обычные выражения для факторов деполяризации, если только заменить исходный эллипсоид на „приведенный", зависящий от анизотропии среды. При

[1] Для эллипсоида в свободном пространстве эти понятия совпадают, а в случае среды с отличной от единицы диэлектрической проницаемостью отличаются множителем, см., например, [2,3]. Следуя [1], мы используем термир „факторы деполяризации", поскольку в названии „геометрические факторы" делается акцент на их зависимость лишь от формы эллипсоида, что не отражает возникающую в общем случае зависимость от анизотропии среды.

этом в анизотропном случае факторы деполяризации перестают зависеть лишь от геометрии эллипсоида, но связываются также и с характеристиками анизотропной среды.

В случае сфероида, соосного с одноосной анизотропной средой, для факторов деполяризации получаются аналитические выражения, обобщающие известные из литературы результаты. В этом случае факторы деполяризации зависят от отношения квадрата аспектного отношения эллипсоида к фактору анизотропии среды, который определяется как отношение несовпадающих собственных значений тензора диэлектрической проницаемости среды.

Определение факторов деполяризации эллипсоида в анизотропной среде

Для того чтобы определить поняние факторов деполяризации анизотропного эллипсоида в анизотропной среде, воспользуемся известным решением этой задачи для случая однородного внешнего поля [30]. Для определенности будем рассматривать диэлектрический эллипсоид с анизотропной диэлектрической проницаемостью, хотя окончательные результаты легко переносятся на случай проводящего эллипсоида, а также аналогичных из задач теории магнетизма теплопроводности и диффузии (см., например, [4]). При этом, чтобы избежать загромождения формул, мы не станем специально выделять обозначениями тензорные и векторные величины, считая их характер достаточно ясным из контекста и опуская для простоты символы единичных матриц.

Рассмотрим однородный анизотропный эллипсоид с тензором диэлектрической проницаемости ε_i, помещенный в анизотропную среду с тензором диэлектрической проницаемости ε_0. Матрицы диэлектрических проницаемостей симметричны, т. е. не меняются при транспонировании, $\varepsilon_i = \varepsilon_i^T$, $\varepsilon_0 = \varepsilon_0^T$, и имеют неотрицательные собственные значения. Следуя [30], нетрудно показать, что в случае эллипсоида, помещенного в однородное внешнее поле E^∞, поле E внутри эллипсоида однородно $E = E^{in} = \text{const}$ и выражается через внешнее поле соотношением

$$E^{in} = (1 - \Gamma\delta\varepsilon)^{-1} E^\infty. \tag{1}$$

Здесь $\delta\varepsilon = \varepsilon_i - \varepsilon_0$, ε_i и ε_0 — тензоры диэлектрических проницаемостей эллипсоида и среды соответственно, а матрица Γ определяется интегралом по объему эллипсоида V:

$$\Gamma = \int\limits_V \nabla\nabla G_r dr, \tag{2}$$

где

$$G_r = -\left(\nabla^T \varepsilon_0 \nabla\right)_r^{-1} = +\frac{1}{4\pi\sqrt{|\varepsilon_0| \left(\mathbf{r}^T \varepsilon_0^{-1} \mathbf{r}\right)}} \tag{3}$$

— скалярная функция Грина однородной анизотропной среды (в (3) символ $(\ldots)_r$ означает ядро стоящего в скобках однородного оператора), $|\varepsilon_0|$ — определитель матрицы ε_0, а произведение градиентов понимается в смысле тензорного произведения, $(\nabla\nabla)_{ij} = \nabla_i \nabla_j$. Из (2) видно, что матрица симметрична, т. е. не меняется при транспонировании: $\Gamma = \Gamma^T$, или в компонентах, $\Gamma_{ij} = \Gamma_{ji}$.

Тензор Γ был введен в работе [30] в виде вытекающего из (2) поверхностного интеграла

$$\Gamma = \oint\limits_S \nabla G_r n d^2 r, \tag{4}$$

где S — поверхность эллипсоида, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор внешней нормали к этой поверхности (так что $nd^2r = dS$ — векторный элемент S).

Для того чтобы связать тензор Γ с обычными факторами деполяризации L_j, которые определяются для изотропного эллипсоида в изотропной среде, когда ε_0 сводится к скаляру, сравним выражение (1) с аналогичным выражением для компонент поля внутри эллипсоида в случае изотропной среды [1,2]:

$$E_j^{in} = \left(1 + L_j \frac{1}{\varepsilon_0} \delta\varepsilon\right)^{-1} E_j^\infty \tag{5}$$

или в симметричном виде

$$E^{in} = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} L \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} \delta\varepsilon\right)^{-1} E^\infty, \tag{6}$$

где L — диагональный в главных осях эллипсоида тензор с собственными значениями L_j.

Из сравнения (6) с (1) видно, что в общем случае можно определить тензор деполяризации L соотношением

$$\Gamma = -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} L \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}, \tag{7}$$

так что

$$L = -\sqrt{\varepsilon_0}\, \Gamma \sqrt{\varepsilon_0}. \tag{8}$$

Такое обобщение сохраняет симметричность L и в случае анизотропного тензора ε_0, позволяя определить геометрические факторы как собственные значения L[2]. Для изотропной среды, когда действие тензора ε_0 сводится к умножению на скаляр, (6) упрощается и принимает вид

$$L = -\varepsilon_0 \Gamma. \tag{9}$$

В рассматриваемой задаче при вычислении Γ (4) имеется два источника анизотропии: анизотропия тензора диэлектрической проницаемости среды ε_0 и анизотропия формы эллипсоида. Последнюю можно описать „тензором полуосей“, диагональным в базисе главных осей эллипсоида: в этом базисе $A = \text{diag}\,(a_1, a_2, a_3)$, где

[2] Отметим, что использованный в работе [31] при получении явного вида решения тензор Эшелби выражается как $S = -\Gamma\varepsilon_0$, в общем случае не является симметричным, но совпадает с L в изотропном случае.

a_i — длины полуосей эллипсоида. При этом уравнение поверхности S эллипсоида запишется в виде

$$z^T A^{-2} x \equiv \sum \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1. \qquad (10)$$

Для краткости назовем определяемый (10) эллипсоид „A-эллипсоидом".

Подставляя Γ (4) в (8), после замены переменных $x \Rightarrow \sqrt{\varepsilon_0}x$ и перехода от интеграла по поверхности к интегрированию по элементу телесного угла $d\Omega_x$ вблизи направления вектора x, так что $dS = nx^2 d\Omega_x/(x^T n_x)$, для тензора деполяризации L нетрудно получить простое выражение

$$L = \left\langle \frac{x n_x}{(x^T \cdot n_x)} \right\rangle \equiv \int \frac{x n_x}{(x^T \cdot n_x)} \frac{d\Omega}{4\pi}, \qquad (11)$$

где диада $x n_x$ понимается в смысле тензорного произведения (т. е. как тензор второго ранга с компонентами $x_i n_{xj}$), $(x^T \cdot n_x)$ — скалярное произведение, а n_x — внешняя нормаль к „приведенному" эллипсоиду, поверхность которого описывается уравнением

$$x^T A_\varepsilon^{-2} x \equiv x^T \sqrt{\varepsilon_0} A^{-2} \sqrt{\varepsilon_0} x = 1. \qquad (12)$$

Выражение (11) представляет собой обобщение фактора деполяризации на случай анизотропной среды, причем учет анизотропии среды фактически сводится к замене исходного эллипсоида на „приведенный эллипсоид" (12). Из (11) видно, что тензор L не зависит от нормировки векторов x и n_x, так что в качестве x и n_x можно взять как единичные векторы соответствующих направлений, так и любые параллельные им векторы. При этом „приведенному" эллипсоиду (12) отвечает симметричный тензор полуосей A_ε, определяемый соотношением

$$A_\varepsilon^2 = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} A^2 \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}}. \qquad (13)$$

Выражение (11) позволяет придать тензору деполяризации L простой геометрический смысл. Действительно, согласно (11), тензор L можно трактовать как номированную условием (15) (см. ниже) „корреляцию" единичного вектора направления луча, выходящего из начала координат, с соответствующим единичным вектором нормали к поверхности „приведенного эллипсоида" n_x, полученную усреднением по всевозможным направлениям x (или иначе по поверхности „приведенного" эллипсоида) в соответствии с правой частью (11).

В случае изотропной среды (11) можно рассматривать как нетрадиционную форму записи обыного тензора деполяризации. В этом случае ε_0 сводится к скаляру, и из (13) имеем

$$A_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0}} A, \qquad (14)$$

так что направления главных осей тензоров A_ε и A совпадают, собственные значения отличаются лишь множителем и определяемые ими эллипсоиды подобны. Поскольку нормали к таким эллипсоидам для каждого направления вектора x одинаковы, при вычислении (11) вместо „приведенного" A_ε-эллипсоида можно использовать исходный A-эллипсоид. Для этого эллипсоида каноническое представление (14) можно считать известным (собственные векторы A направлены вдоль главных осей эллипсоида), так что тензор депляризации (11) определяется лишь георметрией эллипсоида и не зависит от диэлектрической проницаемости изотропной среды (что оправдывает использование альтернативного названия „геометрический фактор" [2]).

В отличие от этого в общем случае в анизотропной среде тензор деполяризации L (11) становится зависящим не только от формы эллипсоида, но и от описывающего свойства среды тензора ε_0. При вычислении L эта зависимость полностью учитывается заменой исходного эллипсоида на „приведенный эллипсоид" (12). Направления главных осей определяющего этот эллипсоид тензора A_ε не совпадают ни с направлениями главных осей эллипсоида (тензора A), ни с направлениями главных осей среды (тензора ε_0), а выражаются лишь как некоторая их комбинация. Таким образом, „приведенный" тензор A_ε учитывает анизотропию формы эллипсоида и анизотропию среды, причем фактор деполяризации L зависит лишь от A_ε (13), $L = L(A_\varepsilon)$, но не от ε_0 и A в отдельности.

Некоторые следствия

Рассмотрим некоторые простые следствия общего выражения (11) для фактора деполяризации эллипсоида в анизотропной среде.

Поскольку след диады равен скалярному произведению $\mathrm{Sp}\, x n_x = (x^T \cdot n_x)$, из (11) следует, что, как и для изотропной среды, в общем анизотропном случае след тензора L равен единице:

$$\mathrm{Sp}\, L = \left\langle \frac{(x^T \cdot n_x)}{(x^T \cdot n_x)} \right\rangle = 1. \qquad (15)$$

Этот факт можно использовать для упрощения вычислений (отметим, что исходный тензор Γ этим свойством не обладает).

Если считать известными собственные значения a_{ε_i} и направления собственных осей e_i тензора A_ε, так что задано каноническое представление

$$A_\varepsilon = \sum a_{\varepsilon_i} e_i e_i, \qquad (16)$$

то тензор L в базисе e_i будет диагональным с вытекающими из (11) собственными значениями

$$L_i = \left\langle \frac{x_i n_{xi}}{(x^T \cdot n_x)} \right\rangle. \qquad (17)$$

Поскольку (11) очевидно не зависит от абсолютной величины вектора нормали n_x, вместо n_x в (11) можно использовать пропорциональный n_x вектор градиента $\nabla(x^T \cdot A_\varepsilon^2 \cdot x)$ с компонентами $x_i/a_{\varepsilon_i}^2$, причем тогда знаменатель в (11) обращается в единицу. В результате получаем

$$L_i = \left\langle x_i^2/a_{\varepsilon_i}^2 \right\rangle \equiv \frac{1}{a_{\varepsilon_i}^2} \int x_i^2 \frac{d\Omega_x}{4\pi}. \tag{18}$$

Входящий сюда двукратный интеграл по направлениям легко преобразуется в однократный, для чего достаточно перейти к сферическим координатам с осью z, ориентированной вдоль e_i, и выполнить интегрирование по азимуту. В результате получаем

$$L_i = \int\limits_0^1 \frac{\mu^2 d\mu}{\left[\left(\mu^2 + (1-\mu^2)a_{\varepsilon_i}^2/a_{\varepsilon_j}^2\right)\left(\mu^2 + (1-\mu^2)a_{\varepsilon_i}^2/a_{\varepsilon_k}^2\right)\right]^{1/2}}, \tag{19}$$

где μ — косинус полярного угла, а несовпадающие индексы i, j, k нумеруют базисные векторы.

Соотношение (19) обобщает на анизотропный случай хорошо известные факторы деполяризации для эллипсоида в изотропной среде, которые записываются в виде интеграла, полученного Дирихле в середине 19 века и зависящего лишь от формы эллипсоида [1,2],

$$L_i = \frac{a_1 a_2 a_3}{2} \int\limits_0^\infty \frac{ds}{(s + a_i^2)\left[(s + a_1^2)(s + a_2^2)(s + a_3^2)\right]^{1/2}}, \tag{20}$$

где a_i — полуоси эллипсоида. Несобственный интеграл (20) совпадает с (19), если только в (20) вместо a_i использовать полуоси приведенного эллипсоида a_{ε_i}. Другими словами, обычное выражение для факторов деполяризации (20) становится применимым в общем анизотропном случае, если исходный эллипсоид (10) заменить приведенным эллипсоидом (12).

В случае изотропных сред факторы деполяризации зависят лишь от геометрии эллипсоида (с этим связано использование альтернативного их названия „геометрические факторы"), так что симметрия этих факторов определяется симметрией эллипсоида. В частности, для однократно вырожденного эллипсоида (сфероида) тензор деполяризации также однократно вырожден и имеет в плоскости кругового сечения эллипсоида два совпадающих собственных значения. В отличие от этого для эллипсоида в анизотропной среде тензор деполяризации определяется формой приведенного эллипсоида (12), которая зависит от ориентации исходного эллипсоида относительно главных осей среды. При этом приведенный эллипсоид и, как следствие, тензор деполяризации могут быть вырожденными (т.е. иметь совпадающие собственные значения) и в отсутствие вырождения у эллипсоида, и у среды в отдельности.

Так, если главные оси эллипсоида ориентированы вдоль главных осей среды, то „приведенный" эллипсоид также ориентирован вдоль указанных осей и, как следует из (13), имеет полуоси

$$a_{\varepsilon_i} = \frac{a_i}{\sqrt{\varepsilon_i}}. \tag{21}$$

Вырождению „приведенного" эллипсоида отвечает случай совпадения двух собственных значений, скажем $a_{\varepsilon_1} = a_{\varepsilon_2}$, что отвечает равенству отношений

$$\frac{a_1}{a_2} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}}. \tag{22}$$

При этом как форма эллипсоида, так и анизотропная среда в отдельности могут быть невырожденными (т.е. обе части (20) отличны от единицы). Напротив, вырожденный эллипсоид в анизотропной среде в общем случае обладает невырожденным тензором деполяризации. Так, в случае шара (полностью вырожденного эллипсоида) симметрия тензора деполяризации совпадает с симметрией анизотропной среды.

В случае вырождения приведенного эллипсоида $a_{\varepsilon_1} = a_{\varepsilon_2} = a_{\varepsilon_\perp}$ интегралы (17) берутся в явном виде, причем для фактора деполяризации вдоль оси симметрии приведенного эллипсоида имеем выражение, совпадающее по форме с аналогичным выражением для фактора деполяризации в изотропной среде [1],

$$L_3 = g \int\limits_0^1 \frac{\mu^2}{1 - (1-g)\mu^2} d\mu = \frac{g}{g-1}\left(1 - \frac{\operatorname{arctg}\sqrt{g-1}}{\sqrt{g-1}}\right). \tag{23}$$

Отличие этого выражения от аналогичного для изотропной среды [1] заключается лишь в форме фактора g, равного отношению квадратов несовпадающих полуосей не исходного, а приведенного эллипсоида $g = \left(\frac{a_{\varepsilon_\perp}}{a_{\varepsilon_3}}\right)^2$ (для определенности при вычислении интеграла в (17) считается, что приведенный эллипсоид сплюснутый, $g > 1$; отметим, что при численных расчетах бывает удобней непосредственно использовать входящий в (23) интеграл, который единообразно определен при любых g). Оставшиеся собственные значения $L_{1,2}$ выражаются с учетом условия нормировки (9), $L_1 + L_2 + L_3 = 1$, что дает $L_1 = L_2 = (1 - L_3)/2$.

В общем случае величина g сложным образом зависит от полуосей эллипсоида и тензора проницаемости среды. В случае вырожденных эллипсоида и среды с одинаковыми ориентациями главных осей $g = \nu_a^2/\nu_\varepsilon$ и выражается как отношение двух факторов анизотропии: эллипсоида $\nu_a^2 = \left(\frac{a_\perp}{a_z}\right)^2$ и среды $\nu_\varepsilon = \frac{\varepsilon_\perp}{\varepsilon_z}$. В частности, для шара в вырожденной анизотропной среде $\nu_a = 1$, так что $g = 1/\nu_\varepsilon$. При этом с учетом (7) для собственного значения $\Gamma_3 = -L_3/\varepsilon_3$ из (23) получается выражение, эквивалентно приведенному в [30], а оставшиеся диагональные компоненты $\Gamma_{1,2}$ вполне аналогично выражаются через компоненты $L_{1,2} = (1 - L_3/2)$. Таким образом, использование факторов деполяризации (11) позволяет распространить известные результаты [1,30] на общий случай анизотропного эллипсоида в анизотропной среде.

В приложениях часто требуется знать тензор поляризуемости эллипсоида α. Используя результаты работы [30], нетрудно показать, что в общем случае анизотропной среды тензор поляризуемости однородного эллипсоида в однородном внешнем поле E^∞ выражается как

$$\alpha = \frac{V}{4\pi}\,\delta\varepsilon(1-\Gamma\delta\varepsilon)^{-1}$$

$$= \frac{V}{4\pi}\sqrt{\varepsilon_0}\left(\sqrt{\varepsilon_0}\,\frac{1}{\delta\varepsilon}\,\sqrt{\varepsilon_0}+L\right)^{-1}\sqrt{\varepsilon_0}, \qquad (24)$$

где V — объем эллипсоида, так что дипольный момент эллипсоида равен $P=\alpha E^\infty$ (здесь тензор Γ выражен через L согласно (7) и учтено справедливое для некоммутирующих матриц A и B соотношение $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$).

В соотношении (24) учитывается, что в общем случае анизотропных среды ε_0 и заполнения эллипсоида ε_i тензоры ε_0 и $\delta\varepsilon=\varepsilon_i-\varepsilon_0$ некоммутативны. Если же либо среда, либо заполнение изотропны, то ε_0 и $\delta\varepsilon$ коммутируют, и (24) можно записать в упрощенном виде

$$\alpha = \frac{V}{4\pi}\sqrt{\varepsilon_0}\left(\frac{\varepsilon_0}{\delta\varepsilon}+L\right)^{-1}\sqrt{\varepsilon_0}, \qquad (25)$$

где порядок следования матриц ε_0 и $(\delta\varepsilon)^{-1}$ оказывается несущественным.

Использование выражения для поляризуемости α через тензор деполяризации L в виде (24) или (25) позволяет в некоторых случаях упростить нахождение явного вида тензора поляризуемости α, т.е. выполнить обращение входящих в (24) или (25) матриц. Чтобы показать это, рассмотрим два примера.

Первый из них — это случай эллипсоида с анизотропным заполнением в изотропной среде, когда тензор деполяризации L не зависит от ε_0 и отвечает известным для изотропной среды выражениям (20). Если при этом направления главных осей заполнения ε_i совпадают с направлениями главных осей эллипсоида, то в этих главных осях тензорное выражение (25) распадается на три независимых выражения для собственных значений, так что обращение матрицы в (25) становится тривиальным и сводится к обращению собственных значений.

Имеется, однако, и менее тривиальный случай, допускающий в случае изотропной среды простое обращение матрицы в (25), а именно случай сфероида с вырожденным осесимметричным заполнением ε_i, произвольно ориентированным относительно осей сфероида. В этом случае тензоры L и ε_i имеют одинаковую структуру

$$L = L_\perp + (L_z - L_\perp)zz, \qquad (26)$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{i\perp} + (\varepsilon_{iz} - \varepsilon_{i\perp})z'z', \qquad (27)$$

где z и z' — единичные векторы соответствующих осей симметрии, zz и $z'z'$ — диады, а символы единичных тензоров, как и ранее, опускаются. При этом обращение матрицы, входящей в (25), легко выполняется в явном виде.

Действительно, в случаях (26), (27) входящий в (25) под знаком обращения тензор имеет вид

$$\frac{\varepsilon_0}{\delta\varepsilon} + L = a + bzz + cz'z', \qquad (28)$$

где явный вид скалярных коэффициентов a, b и c нетрудно получить непосредственно. Обращение (28) можно выполнить методом неопределенных коэффициентов, что дает

$$(a+bzz+cz'z')^{-1} = \frac{1}{a}\Bigg\{1+\frac{1}{b'c'\mu^2-1}$$

$$\times\left[b'zz + c'z'z' - b'c'\mu(zz'+z'z)\right]\Bigg\}, \qquad (29)$$

где $b'=b/(b+a)$, $c'=c/(c+1)$, $\mu=(zz')$ — косинус угла между осями симметрии. Использование (28) и (29) позволяет записать обратную матрицу из (25) в явном виде.

Еще один пример, допускающий упрощение, это случай эллипсоида с изотропным заполнением в анизотропной среде, который также отвечает выражению (25). При этом даже в случае осесимметричных среды и эллипсоида приведенный эллипсоид уже не является осесимметричным, так что при этом соображения симметрии не облегчают обращения матрицы, входящей в (25). Однако для шара (полностью вырожденного эллипсоида) симметрия приведенного эллипсоида совпадает с симметрией среды, так что в главных осях тензора среды ε_0 левая часть (27) будет диагональна, и в этих осях обращение (25) снова становится тривиальным (при этом, если среда является осесимметричной, то приведенный эллипсоид оказывается вырожденным и интегралы (19), выражающие собственные значения L, вычисляются в явном виде).

Заключение

В настоящей работе мы рассмотрели обобщение факторов деполяризации эллипсоида, определяемых обычно лишь для случая изотропных сред, на случай анизотропных сред с тензорными диэлектрическими характеристиками. Мы показали, что при переходе к анизотропной среде при расчете факторов деполяризации вместо исходного эллипсоида (10) необходимо использовать приведенный эллипсоид (12), который кроме геометрии эллипсоида зависит также от характера анизотропии среды. Введение таких факторов помогает в ряде случаев упростить вычисления, позволяя лучше понять структуру решения и избежать ошибок, связанных с неправомерным применением факторов деполяризации из изотропной задачи в случае анизотропных сред.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
[2] *Борен К., Хафмен Д.* Поглощение и рассеяние света малыми частицами. М.: Мир, 1986. 660 с.
[3] *Стрэттон Дж.А.* Теория электромагнетизма. М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. 540 с.
[4] *Milton G.W.* The Theory of Composites. Cambridge Univ. Press, 2004. 749 p.
[5] *Maxwell Garnett J.C.* // Philos. Trans. R. Soc. 1904. Vol. A203. P. 385.
[6] *Bruggeman D.A.G.* // Ann. Phys. 1935. Vol. 23. P. 23 636.
[7] *Sarychev A.K., Shalaev V.M.* Electrodynamics of metamaterials, Singapore: World Scientific, 2007. 247 p. (Перевод: А.К. Сарычев, В.М. Шалаев. Электродинамика метаматериалов. Научный мир, 2011. 224 с.)
[8] *Петров Ю.А.* Физика малых частиц. М.: Наука, 1982. 359 с.
[9] *Sattler K.D.* Handbook of Nanophysics: Nanoparticles and Quantum Dots. CRC Press, 2011. 716 p.
[10] *Lagarkov A.N., Sarychev A.K.* // Phys. Rev. B. 1996. Vol. 53. P. 6318.
[11] *Garboczi E.J.* et al. // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 52. P. 819–828.
[12] *Hasan T.* et al. // Ch. 9 in Molecular- and Nano-Tubes, O. Hayden, K. Nielsch (eds). Springer, 2011.
[13] *Kim H.* et al. // Macromolecules. 2010. Vol. 43. P. 6515.
[14] *Goncharenko A.V., Vender E.F.* // Phys. Rev. E. 2004. Vol. 70. P. 057 102.
[15] *Doaz-Giolera A., Tremblay A.-M.S.* // J. Appl. Phys. 1991. Vol. 69. P. 379.
[16] *Jin S.* et al. Anisotropically conductive composite medium, 1986, Patent US 4737112A.
[17] *Koledintseva M.Y.* et al. // Progr. Electromagn. Res. 2009. Vol. 99. P. 131–148.
[18] *Giordano S., Rocchia W.* // J. Phys.: Cond. Matt. 2006. Vol. 18. P. 10 585.
[19] *Elser J.* et al. // Appl. Phys. Lett. 2006. Vol. 89. P. 261 102.
[20] *Du F.* et al. // Phys. Rev. B. 2005. Vol. 72. P. 121 404.
[21] *White S.* et al. // Phys. Rev. B. 2009. Vol. 79. P. 024 301.
[22] *Bao W.S.* et al. // Nanotechnology. 2011. Vol. 22. P. 485 704.
[23] *Ahir S.V.* et al. // Phys. Rev. B. 2006. Vol. 73. P. 085 420.
[24] *Gillman A.* et al. // Phis. Rev. E. 2013. Vol. 87. P. 022 208.
[25] *Wei E.-B.* et al. // Phys. Rev. B. 2008. Vol. 77. P. 104 204.
[26] *Wan M.* Conducting Polymers with Micro or Nanometer Structure. Springer, 2008. 307 p.
[27] *Barford W.* Electronic and Optical Properties of Conjugated Polymers, Clarendon, Oxford, 2005. 262 p.
[28] *Vlasov D.V.* et al. // arXiv:1312.3435 [pdf]
[29] *Vlasov D.V., Apresyan L.A.* // Adv. Mater. Sci. Appl. 2013. Vol. 2. P. 60.
[30] *Stroud D.* // Phys. Rev. B. 1975. Vol. 12. P. 3368.
[31] *Giordano S., Palla P.L.* // J. Phys. A. Math. Theor. 2008. Vol. 41. P. 415 205.
[32] *Eshelby J.D.* // Proc. R. Soc. A Lond. 1957. Vol. 241. P. 376.
[33] *Eshelby J.D.* // Proc. R. Soc. A Lond. 1959. Vol. 252. P. 561.
[34] *Smith G.B.* // Opt. Commun. 1989. Vol. 71. P. 279.
[35] *Grandvist.C.G.* et al. // Renewable Energy. 1996. Vol. 8. P. 530.
[36] *Jones R.C.* // Phys. Rev. 1945. Vol. 68. P. 93.