

05

Проникновение магнитного поля в трехмерную упорядоченную джозефсоновскую среду и применимость модели Бина

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: marzelik@mail.ru

(Поступило в Редакцию 11 февраля 2014 г.)

Приведены результаты расчета проникновения внешнего магнитного поля внутрь трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды, основанного на анализе видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения ее потенциала Гиббса. При малом превышении внешним полем границы устойчивости мейсснеровская конфигурация переходит в периодическую последовательность линейных вихрей, расположенную параллельно границе на некотором расстоянии от нее. Существует критическое значение I_c , разделяющее два возможных режима проникновения в среду внешнего магнитного поля. При $I > I_c$ при любом значении внешнего поля возникает приграничная токовая конфигурация конечной длины, полностью компенсирующая внешнее поле в глубине образца. При этом у границы поле уменьшается с глубиной почти линейно. Значения коэффициента наклона представляют собой рациональные дроби и остаются постоянными в конечных интервалах I . При выходе I за верхнюю границу такого интервала коэффициент наклона скачком увеличивается и принимает значение другой рациональной дроби. Если же $I < I_c$, то такая ситуация реализуется лишь до некоторого значения внешнего поля H_{\max} . При больших значениях поле проникает внутрь среды на бесконечную глубину. На основании приведенных результатов сделан вывод о нарушении предположений Бина и некорректности использования модели Бина для анализа происходящих процессов.

Введение

Проблема проникновения магнитного поля в сверхпроводник давно привлекает внимание теоретиков и экспериментаторов. В процессах, происходящих в сверхпроводниках II и III рода, находящихся в не очень сильных магнитных полях, важную роль играют вихри. При малых полях вихрей нет, поле выталкивается из образца. При некотором значении поля становится энергетически выгодным возникновение вихрей. В отсутствие пиннинга в образце устанавливается однородная вихревая решетка, соответствующая равномерному проникновению поля, которая по мере роста поля становится более плотной. При наличии пиннинга вихри не могут сразу заполнить весь образец, они возникают сначала возле поверхности и с ростом поля постепенно продвигаются в глубь образца. Это продвижение происходит за счет того, что новые нити, образующиеся у поверхности, как бы „заталкивают“ уже существовавшие вихри внутрь образца. В итоге каждому значению внешнего поля (мы рассматриваем ситуацию, возникающую при монотонном увеличении поля) соответствует некая решетка вихрей вблизи поверхности. Каждый вихрь несет один квант магнитного потока, поэтому магнитная индукция B в каждой точке пропорциональна числу вихрей на единицу площади. Таким образом, профиль магнитного поля, проникающего в образец, определяется распределением вихрей вблизи границы.

Для расчета проникновения магнитного поля в образец часто прибегают к модели Бина [1], согласно которой все вихри в области, в которую проникло магнитное поле, находятся в так называемом „критическом состо-

янии“, т.е. на грани равновесия, когда сила, действующая на каждый вихрь, равна максимальной силе его пиннинга α_m . Расчет показывает, что зависимость B от координаты x внутри образца в критическом состоянии описывается уравнением

$$\left| \frac{B}{\mu_0} \frac{\partial B}{\partial x} \right| = \alpha_m(B). \quad (1)$$

Для нахождения зависимости $B(x)$ необходимо знать зависимость α_m от магнитной индукции B (т.е. от числа вихрей на единицу площади). Первоначально Бин предположил [1], что зависимость $\alpha_m(B)$ линейна, что дает линейную зависимость $B(x)$ (рис. 1, а). Ким и Андерсон [2] на основе анализа экспериментальных данных выдвинули предположение о независимости α_m от B , что приводит к параболическому профилю $B(x)$ (рис. 1, б).

Убедительных логических или математических обоснований модели Бина не существует. Она представляет собой чисто эвристическое предположение. Следует отметить, что прямой проверки ее правильности исследователи избегают. Казалось бы, достаточно задать известной зависимостью $\alpha_m(B)$, вычислить по (1) распределение поля и сверить с экспериментом. Но проблема заключается в том, что зависимость $\alpha_m(B)$ обычно неизвестна, поэтому исследователи проделывают обратную операцию: находят экспериментальную зависимость $B(x)$, а потом вычисляют ту $\alpha_m(B)$, которая обеспечивает найденную $B(x)$ в предположении справедливости модели Бина. Именно из анализа экспериментальных данных возникают и другие виды зависимости $\alpha_m(B)$,

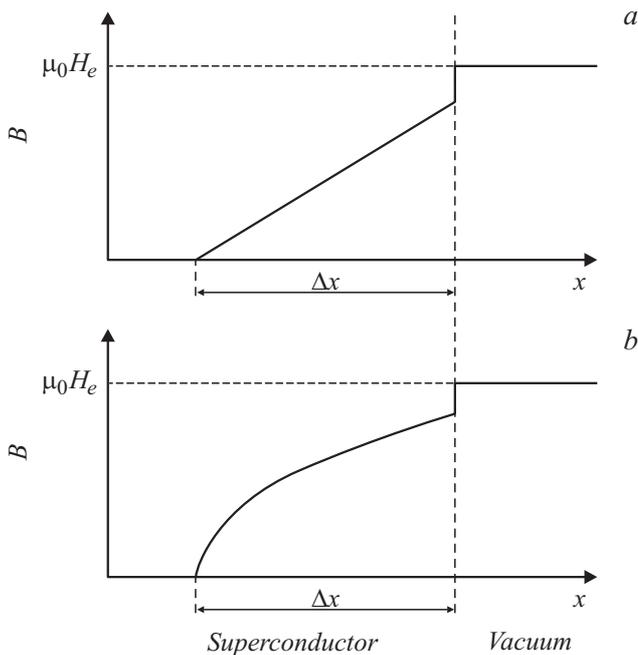


Рис. 1. Зависимость B от координаты x около границы в критическом состоянии.

например, $\alpha_m(B) \propto B/(B + V_0)^\beta$ для различных значений β [3,4] и т.д. Но такие операции не могут служить подтверждением правильности самой модели.

Целью настоящей работы является проверка справедливости модели критического состояния Бина для ситуации, в которой распределение вихрей и магнитного поля внутри образца может быть рассчитано достаточно точно. Такой ситуацией является проникновение магнитного поля в трехмерную упорядоченную джозефсоновскую среду [5–8], представляющую собой кубическую решетку, состоящую из сверхпроводящих проводов, каждый из которых содержит один джозефсоновский контакт, причем все контакты имеют малые размеры и обладают одной и той же величиной критического тока J_C . Образец представляет собой полупространство, ограниченное плоскостью. Внешнее магнитное поле H_e параллельно этой плоскости и направлено вдоль главной оси решетки.

На базе условий квантования флюксоида в ячейках этой среды может быть получена система уравнений в конечных разностях для анализа структуры возможных токовых состояний. Как показали расчеты, такой модели присущи все свойства, характерные для сверхпроводников во внешнем магнитном поле: мейснеровские экранирующие токи, взаимодействующие друг с другом вихри, набор характерных магнитных полей и т.п., причем даже количественные соотношения аналогичны имеющим место в обычных и высокотемпературных сверхпроводниках. Важным достоинством этой модели является изначально присутствующий в ней пиннинг, связанный с ячеистой структурой среды и определяемый конечной величиной энергии, необходимой для

перемещения центра вихря в соседнюю ячейку. Это дает возможность исследовать влияние пиннинга, не вводя дополнительные механизмы зацепления вихрей. Поскольку сама идея модели Бина не основывается на деталях механизма пиннинга, то проверка ее применимости для данного случая может дать информацию относительно ее правильности в целом.

Методика вычислений

При достаточно малых значениях внешнего магнитного поля H_e наблюдается эффект Мейснера. Но начиная с некоторого значения поля $H_e = H_{C1}$ становится энергетически выгодным переход в смешанное состояние, когда магнитное поле частично проникает в толщу сверхпроводника в виде вихревых нитей. Этому переходу препятствует пиннинг, не позволяющий вихрям свободно заполнить все сечение образца. В то же время уравнения электродинамики допускают существование решения мейснеровского типа вплоть до поля $H_{S2} > H_{C1}$. Максимальное поле H_{S1} , до которого возможен этот режим, определяется как граница устойчивости метастабильного мейснеровского состояния по отношению к малым флуктуациям. В [5] рассмотрена устойчивость мейснеровского состояния трехмерной джозефсоновской среды относительно малых флуктуаций скачков фазы на контактах при различных значениях внешнего магнитного поля. Показано, что при любом значении параметра I существует такая величина внешнего поля $H_{S1}(I)$, при которой впервые возникает неустойчивость по отношению к некоторому типу флуктуаций. Анализ формы критических флуктуаций, проведенный в [5], показывает, что они представляют собой быстро затухающие вглубь (на нескольких слоях) периодически повторяющиеся знакопеременные структуры шириной в 1 ячейку. Это дает основания предположить, что в процессе развития неустойчивости распределение скачков фазы будет сохранять такую же геометрию (рис. 2). Нижний ряд соответствует границе образца.

В [6] проведен расчет магнитного поля внутри трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды, основанный на анализе непрерывного видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения ее потенциала Гиббса. Выражение для потенциала Гиббса имеет вид [6]

$$\begin{aligned}
 G = E_0 & \left(0.5 \sum_{k=1}^N (\varphi_k - \varphi_{k+1} + 2\eta_k)^2 \right. \\
 & + 0.5 \sum_{k=1}^N (\xi_k - \xi_{k+1} - 2\eta_k)^2 \\
 & + I \sum_{k=1}^{N+1} (4 - \cos \varphi_k - \cos \xi_k - 2 \cos \eta_k) \\
 & \left. - 2\pi H_e (\varphi_1 + \xi_1) \right), \quad (2)
 \end{aligned}$$

где $E_0 = \Phi_0^2 / 4\pi^2 \mu_0 S$ — нормировочная постоянная, S — площадь ячейки. Будем трактовать величину G как

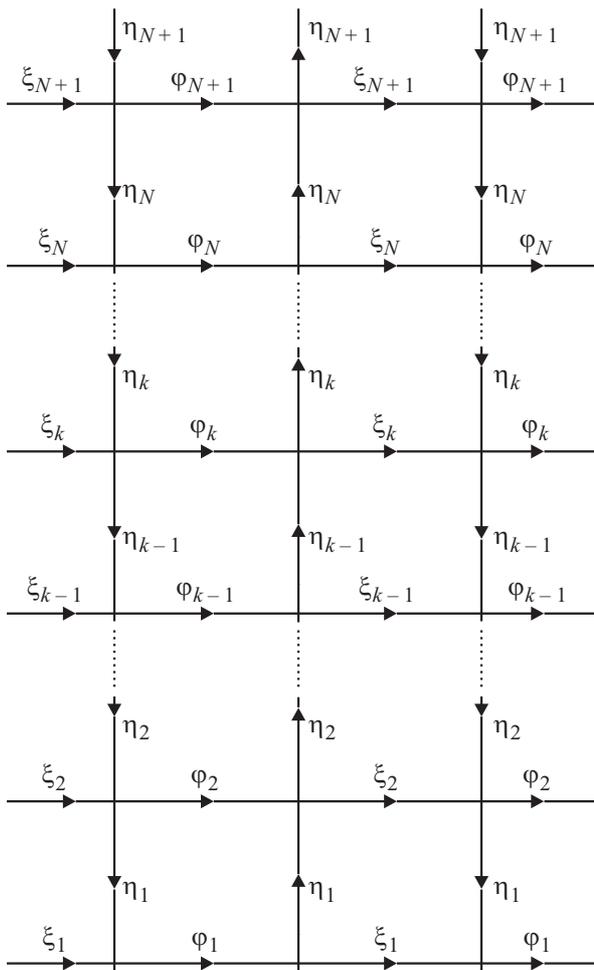


Рис. 2. Распределение скачков фазы в рассматриваемой конфигурации.

высоту (или потенциальную энергию) горного рельефа, заданного на многомерном множестве координат φ_i, ξ_i . Установившаяся при каком-либо значении внешнего поля H_e мейсснеровская конфигурация (набор координат) соответствует минимуму энергии (впадине) в рельефе. С ростом H_e рельеф постепенно изменяется, мейсснеровская конфигурация слегка смещается, но ей продолжает соответствовать локальный минимум. При достижении магнитным полем значения H_{S1} этот минимум становится седловой точкой. Если теперь система „сделает шаг“ в соответствующем направлении, т. е. получит нужную флуктуацию, то она окажется на склоне рельефа. Дальнейшее изменение формы этой конфигурации можно рассматривать как „скатывание“ по рельефу с уменьшением „потенциальной энергии“, в результате которого система окажется в другом минимуме, в котором конфигурация уже не будет мейсснеровской. Пусть этот процесс происходит как результат большого количества маленьких шагов. Логично предположить, что в каждой „точке“ скатывание происходит вдоль линии наискорейшего спуска, т. е. вдоль градиента функции G . Это значит, что при каждом шаге все „координаты“ ψ_i

(т. е. φ_i, ξ_i) получают приращения, пропорциональные соответствующей проекции градиента: $\Delta\psi_i = -\frac{\partial G}{\partial \psi_i} \delta$, где $\delta > 0$ — малый постоянный множитель, задающий величину шага. Далее вычисляем все $\frac{\partial G}{\partial \psi_i}$ в новой точке, т. е. при новых значениях ψ_i , и производим следующий шаг. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не придет к новой устойчивой конфигурации, находящейся в минимуме рельефа.

Процесс проникновения магнитного поля в среду при его адиабатическом увеличении рассматривается как непрерывная трансформация устанавливающегося распределения токов. При этом в каких-то участках конфигурации токи убывают, в каких-то возрастают, т. е. вихри не ведут себя как заталкиваемые полем внутрь жесткие частицы, а как бы „втекают“ внутрь образца. Предложенный в [6] подход позволил найти ту конфигурацию, в которую в результате развития неустойчивости переходит мейсснеровское состояние при малом превышении внешним полем H_e значения H_{S1} . Она представляет собой приграничное распределение экранирующих токов, содержащее периодическую последовательность линейных вихрей с центрами через одну ячейку, расположенную параллельно границе на некотором расстоянии от нее. Величина этого расстояния убывает с ростом параметра пиннинга I . При $I > 2$ центры вихрей располагаются в крайнем ряду. В глубине среды магнитное поле отсутствует. Конфигурации, полученные на базе предложенного алгоритма при $H_e = H_{S1}$ для нескольких значений I , приведены на рис. 3. Нижний ряд соответствует границе образца. Далее напряженность внешнего магнитного поля выражается в единицах H_0 , где $H_0 = \Phi_0/\mu_0 S$ — значение внешнего поля, при котором через каждую ячейку площадью S проходит 1 квант магнитного потока Φ_0 .

На втором этапе анализируется развитие ситуации при дальнейшем увеличении магнитного поля. Если H_e увеличится на какую-то малую величину, это приведет к некоторому видоизменению рельефа, в результате чего конфигурация, соответствовавшая минимуму прежнего рельефа, теперь окажется на склоне нового и „скатится“ в новый минимум. Постепенно увеличивая магнитное поле H_e , можно проследить последовательное изменение профиля проникающего в образец магнитного поля при различных значениях параметра пиннинга. Полу-

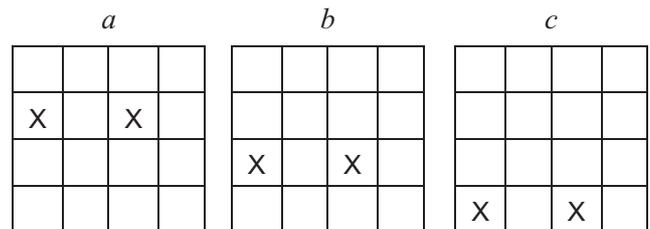


Рис. 3. Распределения скачков фазы в основе при $H_e = H_{S1}$ для разных значений I : (a) $I = 1, H_e = H_{S1} = 0.32$; (b) $I = 1.5, H_e = H_{S1} = 0.42$; (c) $I = 2.5, H_e = H_{S1} = 0.6$.

ченые результаты приводят к выводу о существовании критического значения параметра пиннинга I_C , разделяющего два возможных режима проникновения поля в среду. Это значение находится в диапазоне 0.7–0.8. При $I > I_C$ расчет при любом значении внешнего поля H_e приводит к приграничной конфигурации конечной длины [6]. Эта длина увеличивается с ростом поля H_e . Токи и поля отличаются от нуля только в приграничной области, в глубине образца они остаются равными нулю. Эта ситуация напоминает поведение в магнитном поле сверхпроводников III рода. Если же $I < I_C$, то такая картина сохраняется лишь до некоторого значения $H_e = H_{\max}(I)$. При $H_e > H_{\max}$ длина приграничной конфигурации, рассчитанная по методу, использованному в [6], по ходу расчета все время увеличивается. Это означает, что расчет может продолжаться бесконечно долго, а поле проникает в контакт на бесконечную глубину, как это происходит в сверхпроводниках II рода.

Результаты расчетов и их интерпретация

1. Случай $I > I_C$

Будем далее называть конфигурацию шириной в две ячейки, периодическое повторение которой дает искомые токовые распределения, основой. Основа состоит из двух столбцов.

На рис. 4 изображены основы, возникающие при увеличении внешнего поля от H_{S1} для тех же значений I . Нижний ряд соответствует границе образца. Каждой

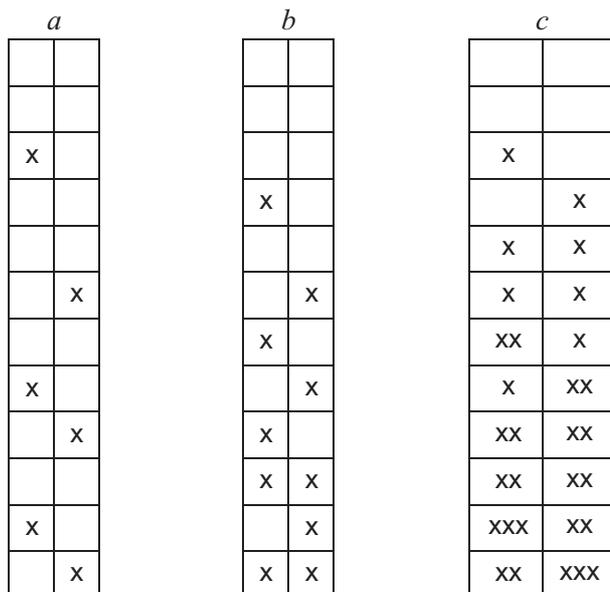


Рис. 4. Распределения скачков фазы в основе, получающиеся на втором этапе при дальнейшем увеличении внешнего поля: (а) $I = 1$, $H_e = 0.48$; (б) $I = 1.5$, $H_e = 1.0$; (с) $I = 2.5$, $H_e = 2.8$.

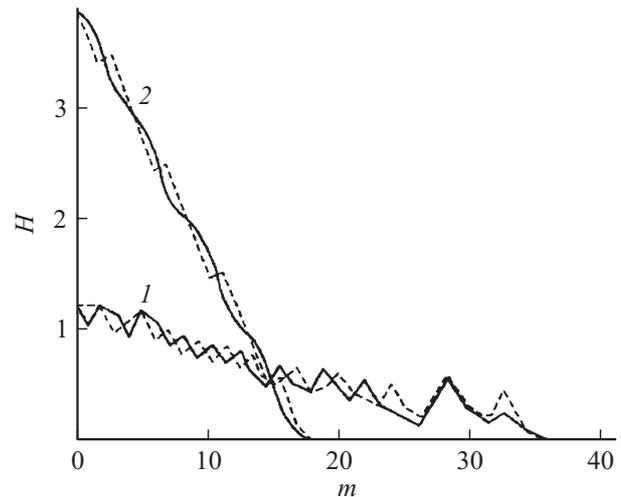


Рис. 5. Зависимости магнитного поля в ячейке от расстояния до границы (в количестве ячеек) в двух столбцах основы для случаев $I = 0.9$ (кривые 1) и $I = 2.5$ (кривые 2).

единице флюксоида в ячейке соответствует крест. Видно, что в обоих столбцах основы от границы вглубь выстраиваются две различные последовательности вихрей, длина которых растет с увеличением поля. При достаточно больших значениях поля при движении из глубины сначала обнаруживаются вихри с флюксоидом, равным единице, затем — двум, а далее — и с большими количествами.

На рис. 5 сплошной и штриховой линиями изображены зависимости магнитного поля в ячейке от расстояния до границы (в количестве ячеек) в двух столбцах основы для случаев $I = 0.9$ (кривые 1) и $I = 2.5$ (кривые 2).

Как видно из рис. 5, магнитное поле у границы уменьшается с глубиной почти линейно, с некоторыми более или менее выраженными осцилляциями. Значение коэффициента наклона k (т.е. усредненного изменения величины H на длине одной ячейки) представляет собой рациональное число и остается постоянным в конечном интервале значений I . При выходе I за верхнюю границу такого интервала коэффициент наклона скачком увеличивается и принимает значение другого рационального числа. Ниже приведены значения крутизны k при разных I .

I	0.9	1	1.5	2	2.5
k	1/47	1/31	1/11	1/7	1/4

2. Случай $I < I_C$

Для исследования было выбрано значение $I = 0.7 < I_C$, при котором $H_{S1} = 0.260$, $H_{\max} = 0.318$. По-

степенно увеличивая значения H_e от $H_{S1} = 0.260$, можно проследить постепенное изменение конфигурации токов. Пока $H_e < H_{max}$, расчет приводит к приграничной конфигурации конечной длины, которая увеличивается с ростом H_e . При $H_e > H_{max}$ токовая конфигурация теряет характер приграничной структуры и распространяется на весь объем образца. В бесконечной среде длина приграничной конфигурации по ходу расчета все время увеличивается [6], что не дает возможности прийти к решению за конечное время. Ограничение длины контакта позволяет найти решение задачи [7], поскольку две симметричные последовательности вихрей, идущие с разных концов контакта, встретившись в его центре, остановятся.

На рис. 6 изображены основы, полученные на базе предложенного в [7] алгоритма при $I = 0.7$ для различных значений H_e , приведенных в нижней строке. Нижний ряд соответствует границе образца, верхний — его середине. Видно, что при $H_e < H_{max} = 0.318$ в обоих столбцах основы от границы вглубь выстраиваются две различные вихревые последовательности, длина которых растет с увеличением поля. При $H_e > H_{max}$ вихри заполняют все сечение образца.

На рис. 7 приведены графики зависимостей полей H_m в ячейках основы от расстояния ячеек до границы. Крайнее левое значение ($m = 0$) на графиках равно внешнему полю H_e . Если поля в соседних ячейках двух рядов основы не одинаковы, то кривая для одного ряда изображена сплошной линией, а для другого — штриховой. При $H_e < 0.260$ наблюдается эффект Мейсснера, т.е. токи и магнитное поле существуют только в приграничной области. При $0.260 < H_e < 0.318$ имеются

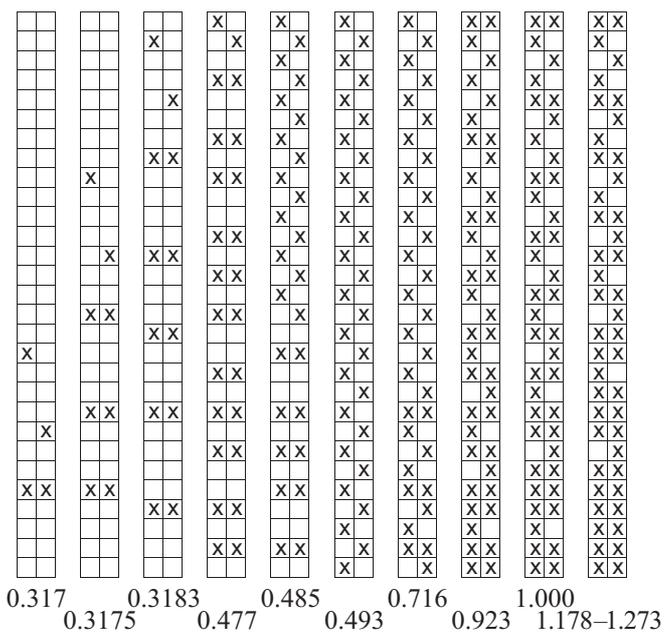


Рис. 6. Вихревые конфигурации основы для $I = 0.7$ при различных значениях внешнего поля H_e (они указаны внизу).

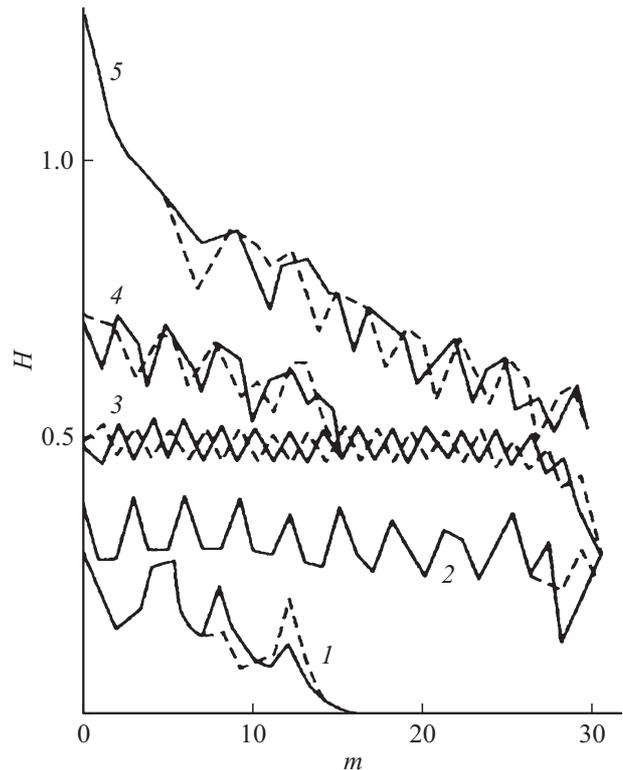


Рис. 7. Зависимости магнитного поля в ячейке от расстояния до границы в двух столбцах основы для различных значений внешнего поля. Сплошные кривые соответствуют одному столбцу основы, штриховые — другому. $H_e = 0.317$ — кривые 1, $H_e = 0.400$ — кривые 2, $H_e = 0.493$ — кривые 3, $H_e = 0.732$ — кривые 4, $H_e = 1.273$ — кривые 5.

приграничные структуры в виде последовательности вихрей вблизи границы. Примером являются кривые 1 на рис. 7 ($H_e = 0.317$). Видно, что вглубь образца вихри не проходят. При $H_e > 0.318$ в процесс вовлекается все сечение образца.

Анализ полученных результатов

Полученные данные позволяют проанализировать, выполняется ли в рассмотренном случае модель Бина.

1. Модель Бина не предсказывает существования критического значения параметра пиннинга I_C . Максимально возможное значение силы пиннинга существует всегда, что по идее Бина должно было бы обеспечить существование приграничной системы вихрей при любых значениях параметров среды и внешнего поля. В рамках этой модели не находит объяснения квазиоднородное заполнение вихрями всего сечения образца при $I < I_C$ и $H_e > H_{max}$.

2. Линейная зависимость напряженности магнитного поля от координаты, казалось бы, подтверждает предположение самого Бина о линейной зависимости максимальной силы пиннинга от поля. Однако исследование сил пиннинга линейных вихрей в трехмерной упоря-

доченной джозефсоновской среде [8] показывает, что наличие по соседству с вихрем параллельных вихрей уменьшает максимальную силу пиннинга. Чем больше магнитная индукция в образце, тем гуще решетка вихрей, тем меньше должна быть максимальная сила пиннинга, что категорически противоречит предположению Бина.

3. Идея Бина о критическом состоянии подразумевает, что все вихри находятся на грани равновесия, т.е. при увеличении внешнего магнитного поля все они одновременно должны прийти в движение и переместиться в новое положение. Однако анализ показывает, что это не так: в каждый момент перемещается какой-то один вихрь, а остальные остаются на месте.

4. Модель Бина никоим образом не объясняет скачкообразного изменения крутизны профиля поля около границы (табл. 1) с изменением величины параметра пиннинга I , а также обязательного равенства этой крутизны рациональному числу.

Из вышеизложенного можно сделать вывод о нарушении предположений Бина и некорректности использования модели Бина для анализа происходящих процессов. Изложенные результаты дают основания сомневаться в правильности модели Бина и в других ситуациях.

Заключение

Приведены результаты расчета проникновения внешнего магнитного поля внутрь трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды, основанного на анализе непрерывного видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения ее потенциала Гиббса. Процесс проникновения магнитного поля в среду при его адиабатическом увеличении рассматривается как непрерывная трансформация устанавливающегося распределения токов. При этом в каких-то участках конфигурации токи убывают, в каких-то возрастают, т.е. вихри не ведут себя как заталкиваемые полем внутрь жесткие частицы, а как бы „втекают“ внутрь контакта.

Предложенный алгоритм позволяет найти ту конфигурацию, в которую в результате развития неустойчивости переходит мейсснеровское состояние при малом превышении внешним полем значения H_{S1} . Она представляет собой приграничное распределение экранирующих токов, содержащее периодическую последовательность линейных вихрей с центрами через одну ячейку, расположенную параллельно границе на некотором расстоянии от нее. Величина этого расстояния убывает с ростом параметра пиннинга I . При $I > 2$ центры вихрей располагаются в крайнем ряду. В глубине среды магнитное поле отсутствует.

Анализ развития ситуации при дальнейшем увеличении поля показал, что существует критическое значение I_C , разделяющее два возможных режима проникновения в среду внешнего магнитного поля. При $I > I_C$ расчет при любом значении внешнего поля H_e приводит

к приграничной токовой конфигурации конечной длины, полностью компенсирующей внешнее поле в глубине контакта. Если же $I < I_C$, то такая ситуация реализуется лишь до некоторого значения внешнего поля H_{max} . При больших значениях поля оно проникает внутрь среды или контакта на бесконечную глубину.

В тех случаях, когда в глубине магнитное поле равно нулю, у границы оно уменьшается с глубиной почти линейно, с некоторыми более или менее выраженными осцилляциями. Значения коэффициента наклона представляют собой рациональные дроби и остаются постоянными в конечных интервалах I . При выходе I за верхнюю границу такого интервала коэффициент наклона скачком увеличивается и принимает значение другой рациональной дроби.

На основании приведенных результатов сделан вывод о нарушении предположений Бина и некорректности использования модели Бина для анализа происходящих процессов.

Список литературы

- [1] *Bean C.P.* // Rev. Mod. Phys. 1964. Vol. 36. P. 31–48.
- [2] *Kim Y.B., Anderson P.W.* // Rev. Mod. Phys. 1964. Vol. 36. P. 39–60.
- [3] *Muller K.-H., Macfarlane J.C., Driver R.* // Rev. Mod. Phys. 1989. Vol. 158. P. 69–84.
- [4] *Lam Q.H., Kim Y., Jeffries C.D.* // Phys. Rev. B. 1990. Vol. 42. P. 4848–4857.
- [5] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. № 8. С. 14–21.
- [6] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. № 9. С. 47–57.
- [7] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. № 3. С. 21–30.
- [8] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. № 9. С. 65–73.