03

Алгоритм решения обратной задачи баллистики для несимметричного объекта

© С.В. Бобашев, Н.П. Менде, А.Б. Подласкин, В.А. Сахаров

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: v.sakharov@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 19 марта 2014 г.)

С использованием методов оценивания параметров нелинейных систем разработан алгоритм идентификации аэродинамических характеристик несимметричного объекта по его траекторным данным, зарегистрированным в наземном баллистическом эксперименте. Методом последовательных приближений найдены коэффициенты полиномиального представления аэродинмиических функций, наилучшим образом описывающие результаты измерений. В основе алгоритма лежит решение прямой задачи динамики движения симметричного объекта с использованием полной системы динамических уравнений Эйлера. В процессе расчета проведена статистическая оценка зависимости искомых параметров. Алгоритм допускаект совместную обработку группы опытов с однотипной моделью, что позволяет увеличить объем обрабатываемых данных и соответственно получить более точный результат.

Введение

Настоящая работа является продолжением ряда публикаций, посвященных решению обратной задачи динамики применительно к экспериментальной баллистике. Предыдущие работы посвящены планированию баллистического эксперимента [1] и решению обратной задачи динамики свободно летящего осесимметричного объекта [2,3]. В настоящей работе описан алгоритм нахождения аэродинамических коэффициентов объекта с асимметрией формы и массы.

Под баллистическим экспериментом понимаются летные испытания аэродинамических объектов в лабораторных или полевых условиях. Баллистическая установка состоит из метателя исследуемых моделей и постов наблюдения, расположенных вдоль направления движения объекта либо в откртой атмосфере, либо вдоль барокамеры, заполненной газом, в котором исследуется движение объекта. Посты оборудованы средствами регистрации (чаще оптической) линейных и угловых координат модели. Траекторные данные представляют собой привязанные ко времени регистрации три линейные координаты центра масс и три угловые координаты, характеризующие в совокупности положение объекта в пространстве.

Целью баллистических исследований, в частности, является определение аэродинамических сил и моментов, возникающих при свободном движении модели в атмосфере с известными параметрами. С этой целью решается обратная задача динамики движения твердого тела с заданием инерционных характеристик модели, параметров газовой среды и траекторных данных.

Наиболее эффективным подходом к решению обратной задачи движения авторам представляется прием, изложенный в работе [4] и дополненный в [5,6] методами статистического оценивания значимости параметров подбираемой математической модели. В настоящей работе для решения задачи о движении объекта в атмосфере используются полная система динамических уравнений Эйлера, общепринятые приемы описания положения летящего объекта по отношению к Земле и вектору скорости набегающего потока, а также кинематические соотношения, вытекающие из способа представления координат объекта [7].

Важной с практической точки зрения особенностью данного алгоритма является возможность совместной обработки траекторных данных нескольких опытов с однотипной моделью. Это позволяет, с одной стороны, увеличить число измерений, что повышает точность конечного результата, с другой стороны, более продуктивно использовать экспериментальные данные, полученные на коротких баллистических трассах. Преимущества использования последних выражается, во-первых, в более низкой стоимости строительства и оборудования самой трассы, в меньших затратах на проведение эксперимента, во-вторых, чем короче трасса, тем меньше отклонение модели в поперечном направлении в конце трассы. Последнее обстоятельство важно для обеспечения регистрации объекта в ограниченном по размеру поле зрения оптического прибора, а также по соображениям сохранности оборудования от механического разрушения моделью при значительных ее отклонениях в полете.

Прямая задача

Алгоритм основан на решении прямой задачи динамики движения объекта, заключающейся в расчете траектории движения по заданным характеристикам объекта и параметрам среды, в которой происходит движение. Траектория модели задается положением ее центра масс и ориентацией ее оси относительно земной системы координат. Вращательное движение модели вокруг центра масс описывается уравнениями Эйлера в системе координат, связанной с моделью. Уравнения движения объекта в земной системе координат имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{A} \times \dfrac{\mathbf{F}}{m} - \mathbf{g}, \\ \dfrac{d(\mathbf{J\Omega})}{dt} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{J} \cdot \mathbf{\Omega}) = \mathbf{M}, \\ \dfrac{d\mathbf{\Psi}}{dt} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{\Omega}, \end{cases} \tag{1}$$

где $\mathbf{R} = (x, y, z)^T$, $\mathbf{\Psi} = (\theta, \psi, \gamma)^T$ — векторы линейного положения центра масс и угловой ориентации оси модели в земной системе координат; $\mathbf{F}, \mathbf{M}$ — векторы аэродинамических силы и момента в системе координат, связанной с моделью, $\mathbf{g} = (0, 9.81, 0)^T$ — вектор ускорения силы тяжести, m — масса объекта исследования, $\mathbf{\Omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)^T$ — вектор угловой скорости в связанной системе координат, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\theta, \psi, \gamma)$ — матрица направляющих косинусов при переходе от связанной системы координат к земной, $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\theta, \psi, \gamma)$ — матрица связи угловых скоростей при повороте системы координат, $\mathbf{J}$ — тензор инерции объекта относительно центральных осей, проходящих через центр масс. В совокупности с четырьмя граничными условиями

$$\mathbf{R}(0) = \mathbf{R}_0, \ \ \frac{d\mathbf{R}(0)}{dt} = \mathbf{R}_1, \ \ \mathbf{\Psi}(0) = \mathbf{\Psi}_0, \ \ \frac{d\mathbf{\Psi}(0)}{dt} = \mathbf{\Psi}_1 \tag{2}$$

система уравнений (1) описывает движение объекта в земной системе координат.

Если в качестве осей координат, связанных с объектом, использовать главные центральные оси инерции, то в этом случае матрица тензора инерции $\mathbf{J}$ имеет диагональный вид. Это позволяет преобразовать второе и третье векторные уравнения системы (1) к системе трех дифференциальных уравнений второго порядка вида

$$\frac{d^2\Psi_k}{dt^2} = \Psi_k\left(\frac{d\mathbf{\Psi}}{dt}, \mathbf{\Psi}, \mathbf{M}\right), \quad k = 1\ldots 3, \tag{3}$$

что существенно облегчает решение обратной задачи.

В баллистическом эксперименте угловые координаты объекта задаются положением его оси, которая назначается из соображения однозначной ее идентификации на теневых изображениях или фотографиях исследуемых объектов. Для объектов в форме тела вращения таковой является ось симметрии, которая для моделей, обладающих также и массовой симметрией, является главной центральной осью инерции. Для объекта с массовой асимметрией, например при смещении центра тяжести модели относительно оси вращения, в тензоре инерции появляются недиагональные компоненты — центробежные моменты инерции.

Следуя общепринятому подходу, будем представлять векторы силы и момента в главных центральных осях инерции, приведя матрицу тензора инерции к диагональному виду. Эта задача решается методами линейной алгебры и сводится к определению собственных значений и собственных векторов матрицы линейного оператора. Найденное угловое расхождение между осью измерений и главными центральными осями следует учесть при вычислении векторов угловых невязок — разницы между рассчитанными и измеренными значениями угловых координат. Таким образом, задача идентификации аэродинамических характеристик несимметричного объекта сводится к решению задачи для симметричного объекта с предварительным определением направления главных центральных осей и вычислению диагональных компонентов матрицы тензора инерцию объекта исследованию.

Действующие на модель векторы аэродинамической силы и момента задаются в системе координат, связанной с объектом в виде полиномов от независимых переменнхы α, β — углов атаки и скольжения, и M — числа Маха:

$$\mathbf{F} = \frac{\rho V^2}{2} S \begin{Bmatrix} c_0 + \sum\limits_{k=1} a_k\alpha^k + \sum\limits_{k=1} b_k\beta^k + \sum\limits_{k=1} c_k M^k \\ a_0 + \sum\limits_{k=1} a_k\alpha^k + \sum\limits_{k=1} c_k M^k + \dfrac{\omega_3 L}{V} d \\ b_0 + \sum\limits_{k=1} b_k\beta^k + \sum\limits_{k=1} c_k M^k + \dfrac{\omega_2 L}{V} d \end{Bmatrix},$$

$$\mathbf{M} = \frac{\rho V^2}{2}$$

$$\times SL \begin{Bmatrix} c_0 + \sum\limits_{k=1} a_k\alpha^k + \sum\limits_{k=1} b_k\beta^k + \sum\limits_{k=1} c_k M^k + \dfrac{\omega_1 L}{V} d \\ b_0 + \sum\limits_{k=1} b_k\beta^k + \sum\limits_{k=1} c_k M^k + \dfrac{\omega_2 L}{V} d \\ a_0 + \sum\limits_{k=1} a_k\alpha^k + \sum\limits_{k=1} c_k M^k + \dfrac{\omega_3 L}{V} d \end{Bmatrix}. \tag{4}$$

Здесь L, S — длина и площадь миделя объекта соответственно, V — модуль абсолютной скорости объекта, ρ — плотность среды, в которой движется объект.

Набор независимых переменных типичен для таких задач: углы атаки и скольжения определяют положение вектора скорости набегающего потока относительно связанных осей, число Маха характеризует зависимость векторов силы и момента от скорости движения. В выражениях выделены постоянные составляющие с индексом 0, введение которых обусловлено рассмотрением движения объекта, несимметричного по форме и(или) обладающего асимметрией распределения массы. Несмотря на одинаковые обозначения в (4), коэффициенты a_k, b_k, c_k, d_k индивидуальны для каждой компоненты силы и момента. Совокупность указанных коэффициентов составляет математическую модель движения объекта.

Обратная задача

Суть обратной задачи динамики движения состоит в подборе названных выше коэффициентов таким образом, чтобы решенная с их использованием прямая задача давала результаты, наилучшим образом соответствующие траекторным данным, зарегистрированным в эксперименте. Подробно алогритм решения рассмотрен в [2,3], здесь лишь остановимся на существенных его моментах.

Поскольку траектория движения не может быть выражена в явном виде (она является результатом численного интегрирования дифференциальных уравнений), то решение осуществляется методом последовательных приближений. На каждом шаге итераций вычисляется траектория движения при некотором приближенном значении вектора искомых параметров $\mathbf{X}_0$ с последующим его уточнением.

В качестве компонентов искомого вектора $\mathbf{X}$ последовательно назначаются коэффициенты одной из составляющих векторов аэродинамических силы или момента (4) и соответствующие им начальные условия. Это позволяет несколько упростить поиск решения, поскольку число искомых параметров ограничивается количеством коэффициентов только одной функции и шестью (вместо 12) граничными условиями для линейных координат, если подбирается компонента аэродинамической силы, либо шестью граничными условиями для угловых координат, если подбирается компонента аэродинамического момента.

По рассчитанной траектории вычисляется вектор невязок, компоненты которого равны разности значений рассчитанных и измеренных координат, например, вектор невязок линейных координат равен $\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{exp}} - \mathbf{R}(\mathbf{X}_0)$. Система линейных алгебраических уравнений, удовлетворяющая условию локального минимума для функции $\Delta\mathbf{R}$, имеет вид

$$(\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P})\,\Delta\mathbf{X} = \mathbf{P}^T\,\Delta\mathbf{R}, \tag{5}$$

где $\mathbf{P}$ — матрица размером $3N \times L$, компоненты которой $P_{kj} = \frac{dR_k}{dX_j}\big|_{\bar{x}_0}$ вычисляются при значении $\mathbf{X}_0$, N — число точек измерения, L — число искомых параметров, включающее коэффициенты a_k, b_k, c_k, d и начальные условия, $\Delta\mathbf{X} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0$ — искомый вектор поправок.

В случае невырожденной матрицы $\mathbf{P}$ в уравнении (5) вектор поправок равен

$$\Delta\mathbf{X} = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P})^{-1} \cdot \mathbf{P}^T \cdot \Delta\mathbf{R}. \tag{6}$$

Таким образом, процесс нахождения решения заключается в поэтапном уточнении значения искомого вектора $\mathbf{X}_0^{k+1} = \mathbf{X}_0^k + \Delta\mathbf{X}$ до тех пор, пока все коэффициенты системы (4) не достигнут заданной точности. Дисперсионная матрица $\mathbf{D} = (\mathbf{P}^T \cdot \mathbf{P})^{-1}$ размером $L \times L$ используется для расчета доверительных интервалов искомых параметров [3].

Особенности алгоритма

В целях уменьшения ошибки вычислений целесообразно интегрирование уравнений движения начинать с середины временного интервала. При этом число искомых параметров не увеличивается, поскольку начальные условия являются общими для двух интервалов интегрирования, лежащих по разные стороны от средней точки.

Подбор математической модели осуществляется поэтапным добавлением новых коэффициентов в выражения векторов силы и момента — усложнением некоторой начальной математической модели. В качестве последней принимается линейная зависимость от углов поперечных составляющих векторов силы (коэффициенты C_Y^α, C_Z^β) и момента (коэффициенты M_Y^β, M_Z^α) и постоянная составляющая осевой силы (коэффициент C_X)

$$\mathbf{F} = \frac{\rho V^2}{2}\,S\begin{pmatrix} C_X \\ C_Y^\alpha\,\alpha \\ C_Z^\beta\,\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{\rho V^2}{2}\,SL\begin{pmatrix} 0 \\ M_Y^\beta\,\beta \\ M_Z^\alpha\,\alpha \end{pmatrix}. \tag{7}$$

В данном выражении использованы традиционные для баллистических исследований обозначения аэродинамических коэффициентов силы и момента. Верхний индекс при коэффициенте обозначает принадлежность к независимой переменной, нижний — к оси.

Исход решения методом итераций во многом определяется правильным выбором начальных приближений искомых параметров. Как показал опыт, сходимость итераций существенно зависит от выбора начального приближения коэффициентов момента M_Y^β, M_Z^α. Их начальные значения легко вычислить по величине периода колебаний объекта в соответствующей плоскости. Начальные приближения остальных коэффициентов силы, будучи назначенными из диапазона возможных значений, например, равные нулю, влияния на сходимость итераций и конечный результат практически не оказывают.

Важной составной частью алгоритма является блок статистических оценок, позволяющий построить адекватную математическую модель движения исследуемого объекта. Математическая модель подбирается путем поэтапного усложнения начальной модели (7) с последующей проверкой статистической значимости найденных параметров с использованием критерия Стьюдента. Незначимые параметры исключаются из математической модели. Усложнение математической модели движения приводит к минимизации невязок координат, однако при этом необходимо соблюдение условия — остаточная дисперсия (дисперсия аппроксимации) не должна стать меньше дисперсии измерений. Дисперсия измерений определяется по результатам метрологической аттестации измерительной системы баллистической установки и считается известной. Таким образом, адекватной считается модель, которая состоит из значимых парметров и доставляет минимум остаточной дисперсии, остающейся статистически больше дисперсии измерений. Проверка последнего условия осуществляется при помощи критерия Фишера.

Поскольку вышеназванные процедуры предполагают нормальный закон распределения невязок линейных и угловых координат, то алгоритм включает также проверку гипотезы о соответствии распределения невязок нормальному закону с помощью критерия χ-квадрат.

Необходимо также заметить, что рассматриваемая обратная задача не исключает появление двух и более адекватных решений для одного и того же набора данных. Выбор „лучшего" в таком случае осуществляется исследователем, исходя из каких-либо иных соображений.

Тестирование алгоритма

Тестирование алгоритма проводилось с использованием траекторий движения модели с известными параметрами. Расчет тестовых траекторий производился специальной программой, которая позволяла задать размеры объекта и его инерционные характеристики, начальные условия движения, а также произвольный набор и величину коэффициентов векторов силы и момента. Кроме этого, в программе задавались параметры баллистической трассы (длина и количество постов регистрации), а также проводилось искажение координат центра тяжести модели и ее угловых координат в точках, соответствующих расположению постов регистрации. Искажение координат осуществлялось генератором случайного числа по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и заданной дисперсией. Поскольку математическая модель движения априори известна, то дисперсия аппроксимации в этом случае соответствует дисперсии нормального распределения, которая в данном случае моделирует погрешности измерения координат объекта.

В качестве тестового объекта была выбрана осесимметричная модель массой 0.3 kg, длиной 0.25 m и диаметром миделя 0.06 m. Длина трассы задавалась равной 120 m, число постов регистрации 42. Начальные условия движения модели составляли: скорость объекта 1200 m/s, углы тангажа и рысканья в диапазоне не более 4°. Скорость осевого вращения модели задавалась равной нулю. При расчете траекторий погрешности измерений координат задавались так: линейные 0.1 mm, углы тангажа и рысканья 0.1° и угол крена 0.8°. Назначение большей погрешности угла крена связано со способом измерения этих углов в эксперименте. Углы тангажа и рысканья определяются на фотографическом изображении по отклонению оси объекта от линии визирования. Погрешность измерения угла при этом обратно пропорциональна длине объекта. Угол крена, как правило, измеряется по смещению маркеров на боковой поверхности модели, и в этом случае погрешность измерения обратно пропорциональна радиусу окружности, на которой расположены маркеры. Для повышения точности измерений угла крена целесообразно наносить маркеры в миделевом сечении объекта. Погрешность угла крена рассчитывалась по соотношению длины модели ее миделя.

Траектории рассчитывались с различным набором коэффициентов векторов силы и момента, в том числе задавались нелинейные члены разложения (4). Идентификация аэродинамических характеристик модели с использованием этих траекторий показала, что доверительные интервалы демпфирующих и нелинейных членов в разложении силы и момента главным образом зависят от погрешностей измерения координат объекта.

Важным преимуществом предлагаемого алгоритма является возможность совместной обработки нескольких опытов с однотипной моделью, что позволяет использовать в эксперименте преимущества баллистических трасс. Это, во-первых, более низкая стоимость строительства и оборудования самой трассы, меньшие затраты на проведение эксперимента, во-вторых, чем короче трасса, тем меньше отклонение модели в поперечном направлении в конце полета. Последнее обстоятельство важно по соображениям обеспечения регистрации объекта в ограниченном по размеру поле зрения оптического прибора и сохранности оборудования от механического разрушения при значительных поперечных отклонениях модели в полете.

Продемонстрируем возможности обработки группы опытов на примере одной и той же траектории для трех вариантов обработки. Первый вариант будет представлен результатом обработки одной траектории длиной 120 m, второй — совместной обработкой двух половин этой траектории длиной 60 m каждая, а третий — составит результат совместной обработки четырех ее частей длиной 30 m каждая.

Математическая модель для этого случая задавалась аналогично (7) с добавлением демпфирующих слагаемых поперечных моментов (коэффициенты M_Y^{ω} и M_Z^{ω})

$$\mathbf{F} = \frac{\rho V^2}{2} S \begin{pmatrix} C_X \\ C_Y^{\alpha}\,\alpha \\ C_Z^{\beta}\,\beta \end{pmatrix}, \quad \mathbf{M} = \frac{\rho V^2}{2} SL \begin{pmatrix} 0 \\ M_Y^{\beta}\,\beta + M_Y^{\omega}\,\omega_y \\ M_Z^{\alpha}\,\alpha + M_Z^{\omega}\,\omega_z \end{pmatrix}. \tag{8}$$

При заданных параметрах объекта на длине трассы 120 m модель совершает примерно 3.5 колебания по тангажу и рысканью. Соответственно при делении траектории на две части каждая содержит чуть более полутора периода колебаний в поперечном направлении, а при делении на четыре части — менее одного. Результаты идентификации для трех указанных вариантов показаны в табл. 1.

Из таблицы видно, что данные расчета для трех рассматриваемых вариантов практически совпадают с точным решением. Доверительные интервалы искомых параметров (столбец $\Delta, \%$) увеличиваются примерно в 4 раза по мере сокращения длины трассы, и даже коэффициенты демпфирования, характеризуемые, как правило, большим доверительным интервалом, оказались статистически значимы.

Таблица 1.

Параметр	Точное решение	Результаты расчета					
		длина, m					
		120		60		30	
		значение	$\Delta, \%$	значение	$\Delta, \%$	значение	$\Delta, \%$
M_Z^α	-0.1000	-0.1001	0.8	-0.0998	1.5	-0.0991	3.5
M_Z^ω	-0.1000	-0.1004	17.3	-0.1054	36.1	-0.1099	61.1
M_Y^β	-0.1000	-0.1002	0.6	-0.1003	1.1	-0.1000	2.2
M_Y^ω	-0.1000	-0.1007	12.2	-0.1089	29.4	-0.0963	34.6
C_X	0.600	0.600	0	0.600	0	0.600	0.1
C_Y^α	1.800	1.781	0.4	1.777	0.5	1.773	1.2
C_Z^β	1.800	1.795	0.3	1.798	0.4	1.790	0.5

Таблица 2.

Ошибка	Результаты расчета		
	длина, m		
	120	60	30
$\Delta\gamma$, deg	0.73	0.72	0.71
$\Delta\theta$, deg	0.10	0.08	0.07
$\Delta\psi$, deg	0.09	0.09	0.08
Δx, mm	0.12	0.11	0.10
Δy, mm	0.15	0.16	0.14
Δz, mm	0.19	0.15	0.13

В табл. 2 показаны среднеквадратичные отклонения координат объекта, которые, как видно, практически совпадают между собой.

Данный опыт показывает, что на короткой трассе можно получить равноценный по точности результат за счет увеличения числа совместно обрабатываемых опытов.

Известно, что движение моделей сложной формы может сопровождаться существенным изменением картины обтекания, например, возникновением отрывных зон на ее поверхности при изменяющихся условиях полета. В таком случае весьма затруднительно описать силу и момент нерпрывными функциями во всем диапазоне изменения независимых переменных. Однако и в этом случае данный алгоритм может быть использован при определении аэродинамических характеристик такого сложного движения [8]. Суть этого приема заключается в предварительном разбиении траектории на участки, на которых аэродинамические сила и момент могут быть описаны общими функциями с последующей групповой обработкой соответствующих участков траектории.

Заключение

Разработан алгоритм и на его основе создана программа, позволяющая провести идентификацию аэродинамических характеристик свободного летящего несимметричного объекта по дискретным траекторным данным, полученным в наземном баллистическом эксперименте. По заданным инерционным характеристикам объекта исследования в принятой системе координат определяется положение главных центральных осей инерции, относительно которых производится идентификация сил и моментов, действующих на объект в полете.

Реализованная в программе возможность совместной обработки нескольких опытов с однотипной моделью позволяет повысить точность идентификации искомых параметров и продуктивно использовать данные, полученные на сравнительно коротких баллистических трассах.

Список литературы

[1] *Бобашев С.В., Менде Н.П., Подласкин А.Б., Сахаров В.А., Бердников В.А., Викторов В.А., Осеева С.И., Садчиков Г.Д.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 10. С. 18–28.

[2] *Бобашев С.В., Менде Н.П., Попов П.А., Сахаров В.А., Бердников В.А., Викторов В.А., Осеева С.И., Садчиков Г.Д.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 4. С. 59–65.

[3] *Бобашев С.В., Менде Н.П., Попов П.А., Сахаров В.А., Бердников В.А., Викторов В.А., Осеева С.И., Садчиков Г.Д.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 4. С. 66–74.

[4] *Chapman G.T., Kirk D.B.* // AIAA. J. 1970. N 4. P. 753–758.

[5] *Менде Н.П.* Обратная задача нелинейной баллистики. I. Плоское движение. Л.: ФТИ А.Ф. Иоффе. 1989. Препринт № 1326. 44. с.

[6] *Mende N.P.* Nonlinear Estimation of Aerodynamic Characteristics from Discrete Free-Flight Data. Gas Dynamics / Ed. by Yu.I. Koptev. N Y: Nova Science Publishers, Inc., 1992. P. 325–356.

[7] *Лебедев А.А., Чернобровкин Л.С.* Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М.: Изд-во ОБОРОНГИЗ, 1962. 550 с.

[8] *Викторов В.А., Менде Н.П., Подласкин А.Б., Попов П.А., Сахаров В.А.* // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 6. С. 42–45.