

## О влиянии горизонтального магнитного поля на неустойчивость Розенцвейга нелинейно намагничивающейся феррожидкости

© В.М. Коровин

Научно-исследовательский институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, 119192 Москва, Россия  
e-mail: l111@imec.msu.ru

(Поступило в Редакцию 16 января 2014 г.)

Рассмотрена вызываемая магнитными силами неустойчивость Розенцвейга плоской свободной поверхности слоя покоящейся нелинейно намагничивающейся феррожидкости. Жидкость покрывает горизонтальную пластину из немагнитного материала, находящуюся в наклонном магнитном поле. В линейной постановке для глубокой магнитной жидкости вычислена критическая величина вертикальной компоненты вектора намагниченности при любом физически допустимом законе намагничивания. Исследовано влияние горизонтальной компоненты приложенного магнитного поля на возникновение неустойчивости при модифицированном ланжевенском намагничивании.

### Введение

Неустойчивостью Розенцвейга называется неустойчивость горизонтальной свободной поверхности покоящейся магнитной жидкости, вызываемая достаточно сильным приложенным однородным вертикальным магнитным полем [1–3]. Впервые это явление было изучено в работе [4].

Эксперименты [4] с магнитной жидкостью, покрывающей дно ненамагничивающейся кюветы, показали, что если созданная полем намагниченность  $M_0$  исследуемого плоского слоя превышает некоторую критическую величину  $M_c$ , то на свободной поверхности под действием магнитных сил происходит быстрое формирование острых пиков. При этом каждый пик оказывается окруженным шестью другими пиками, симметрично расположенными относительно рассматриваемого пика. В целом система пиков образует периодически расположенные гексагональные ячейки.

В результате при фиксированном вдали от жидкости однородном вертикальном магнитном поле образуется устойчивая жидкая конфигурация, отличная от плоского слоя.

В рамках линеаризованной системы уравнений феррогидродинамики при теоретическом анализе неустойчивости Розенцвейга было установлено [1,2,4,5], что сила тяжести и капиллярные силы оказывают стабилизирующее воздействие. При этом величина  $M_c$  определяется численными значениями физических параметров феррожидкости и зависит от функции, выражающей связь намагниченности и магнитного поля.

Применительно к исследованию неустойчивости Розенцвейга был предложен [6] модифицированный ланжевенский закон намагничивания феррожидкости. В последнее время этот закон использовался при обработке экспериментальных данных по поверхностным волнам [7,8].

Если внешнее магнитное поле слабое и вследствие этого  $M_0 < M_c$ , то свободная поверхность остается

плоской, а распределение магнитного поля во всем пространстве является кусочно-постоянным. В этом случае магнитные силы вызывают лишь изменение распределения давления поперек плоского слоя.

При  $M_0 < M_c$  приложенное перпендикулярное магнитное поле уменьшает фазовую скорость гармонических поверхностных волн, вызываемых внешним источником [5].

В отличие от перпендикулярного поля  $\mathbf{H}_n$  однородное тангенциальное поле  $\mathbf{H}_t$  не изменяет гидростатическое давление в жидкости, образующей плоский горизонтальный слой. При этом фазовая скорость поверхностных волн, распространяющихся параллельно силовым линиям приложенного поля, увеличивается под действием тангенциального поля [5].

Значительный интерес представляет случай наклонного поля  $\mathbf{H}_n + \mathbf{H}_t$ , вертикальная компонента которого вызывает развитие неустойчивости Розенцвейга. Теоретический анализ воздействия наклонного поля на свободную поверхность линейно намагничивающейся глубокой феррожидкости, проведенный на базе линеаризованной системы уравнений феррогидродинамики, показал [9], что  $\mathbf{H}_t$  не влияет на критическую величину  $H_c$ . В работе [9] на качественном уровне сделан вывод, что при  $H_n > H_c$  на свободной поверхности будут формироваться валы с параллельными  $\mathbf{H}_t$  осями.

Экспериментально такой эффект наблюдался на свободной поверхности тонкой горизонтальной пленки феррожидкости [10] при перестройке жидкой структуры, вызываемой увеличением угла  $\vartheta$  между вертикалью и направлением приложенного поля фиксированной напряженности. В процессе перестройки гексагональные ячейки, сформировавшиеся при  $\vartheta = 0$ , трансформировались по мере роста  $\vartheta$  в валы, вытянутые вдоль силовых линий финального горизонтального ( $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ) поля. В работе [11] при  $\vartheta \approx \frac{\pi}{4}$  был зарегистрирован распад тонкого слоя на систему равноотстоящих друг от друга параллельных полосок магнитной жидкости.

В отличие от имеющихся работ в работе исследована неустойчивость Розенцвейга горизонтальной свободной поверхности нелинейно намагничивающейся глубокой феррожидкости при наличии кусочно-постоянного наклонного магнитного поля.

В рамках модели невязкой жидкости на базе линеаризованных уравнений и граничных условий феррогидродинамики вычислена критическая величина вертикальной компоненты вектора намагниченности.

В случае модифицированного ланжевеновского закона намагничивания изучено влияние горизонтальной компоненты поля на возникновение неустойчивости.

## Уравнения и граничные условия феррогидродинамики

Рассматривается плоский слой покоящейся однородной по составу магнитной жидкости, покрывающий горизонтальную немагничивающуюся пластину произвольной в плане формы. Верхняя граница слоя является свободной поверхностью, разделяющей жидкость и находящийся над ней газ, имеющий постоянное давление  $p_a$ . Покрывая жидким слоем пластина помещена в однородное горизонтальное магнитное поле, создаваемое внешним устройством. Протяженность слоя в любом направлении велика по сравнению с его толщиной  $c_0$ . Ввиду этого область вблизи края пластины, в которой за счет краевого эффекта поле неоднородно, мала.

Введем прямоугольную декартову систему координат  $x, y, z$  с базисом  $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ , ось  $x$  которой параллельна приложенному горизонтальному магнитному полю  $H_{0x}\mathbf{a}_x$ , а ось  $z$  направлена вверх (рис. 1). Пусть свободная поверхность покоящейся жидкости совпадает с координатной плоскостью  $z = 0$ .

Предполагается, что после включения в момент времени  $t = 0$  достаточно сильного однородного при  $z \rightarrow \pm\infty$  вертикального поля  $H_{0z}\mathbf{a}_z$  жидкость за счет действия магнитных сил приходит в движение. Вследствие этого свободная поверхность перестает быть плоской и возникает возмущение наклонного кусочно-постоянного в начальный момент поля, являющегося суперпозицией приложенного и размагничивающего полей.

Будем отмечать индексами  $j = 1, 2, 3$  магнитное поле  $\mathbf{H}_j(x, y, z, t) = (H_{jx}, H_{jy}, H_{jz})$  и вектор магнитной индукции  $\mathbf{B}_1 = \mu\mathbf{H}_1$ ,  $\mathbf{B}_2 = \mu_0\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{B}_3 = \mu_0\mathbf{H}_3$  в областях, занятых магнитной жидкостью ( $j = 1$ ) и немагнитными средами, расположенными выше ( $j = 2$ ) и ниже ( $j = 3$ ) жидкого слоя. Здесь  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{H/m}$  — магнитная постоянная,  $\mu = \mu_0\mu_r$  — магнитная проницаемость, а  $\mu_r$  — относительная магнитная проницаемость феррожидкости. Предполагается, что  $\mu_r$  зависит от модуля вектора магнитного поля  $H_1 = \sqrt{H_{1x}^2 + H_{1y}^2 + H_{1z}^2}$ .

Обозначим через  $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}_1$  вектор намагниченности, где  $\chi(H_1) = \mu_r(H_1) - 1$  — магнитная восприимчивость. С использованием  $\mathbf{M}$  имеем  $\mathbf{B}_1 = \mu_0(\mathbf{M} + \mathbf{H}_1)$ . В случае

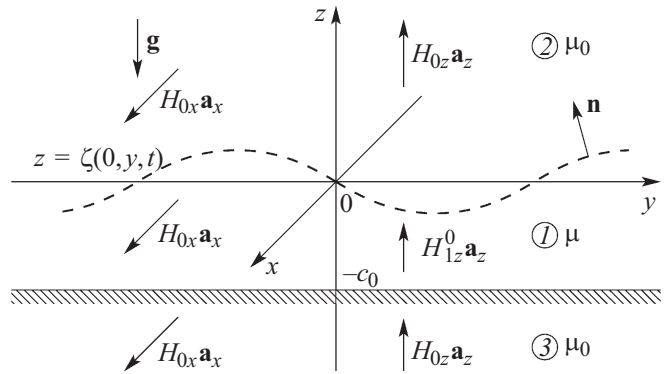


Рис. 1. Геометрия задачи и обозначения.

однородной по составу магнитной жидкости, температура которой всюду одинакова, плотность объемных магнитных сил  $\mathbf{f}_m = \mu_0 M \nabla H_1$  имеет потенциал  $U_m$

$$\mathbf{f}_m = \nabla U_m, \quad U_m = \mu_0 \int_{h_1(x,y,-c_0,t)}^{h_1(x,y,z,t)} M dH, \quad (1)$$

$$\nabla = \mathbf{a}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{a}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{a}_z \frac{\partial}{\partial z}.$$

Магнитное поле описывается уравнениями и граничными условиями магнитостатики

$$\text{rot } \mathbf{H}_j = 0, \quad j = 1, 2, 3; \quad \text{div}(\mu \mathbf{H}_1) = 0, \quad (2)$$

$$\text{div} \mathbf{H}_l = 0, \quad l = 2, 3.$$

Ввиду первого уравнения (2) магнитное поле допускает представление  $\mathbf{H}_j = \nabla u_j$ . После введения потенциала  $u_j(x, y, z, t)$  второе и третье уравнения (2) принимают вид

$$\mu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} \right) + \frac{\mu_t - \mu}{|\nabla u_1|} \nabla u_1 \nabla |\nabla u_1| = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial^2 u_l}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial z^2} = 0, \quad l = 2, 3, \quad (4)$$

где  $\mu_t = \frac{dB_1}{dH_1}$  — дифференциальная магнитная проницаемость феррожидкости.

Введем также дифференциальную магнитную восприимчивость  $\chi_t(H_1) = \frac{dM}{dH_1}$ , тогда  $\mu_t = \mu_0(1 + \chi_t)$ .

Граничные условия на свободной поверхности  $z = \zeta(x, y, t)$  и на поверхности пластины  $z = -c_0$  выражают непрерывность потенциала и непрерывность нормальной составляющей вектора индукции

$$\text{при } z = \zeta(x, y, t): \quad u_1 = u_2, \quad \mu \frac{\partial u_1}{\partial n} = \mu_0 \frac{\partial u_2}{\partial n}, \quad (5)$$

$$\text{при } z = -c_0: \quad u_1 = u_3, \quad \mu \frac{\partial u_1}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial u_3}{\partial z}, \quad (6)$$

где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к свободной поверхности, направленный из области 1 в область 2

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}} \left( -\frac{\partial \zeta}{\partial x} \mathbf{a}_x - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z \right).$$

Вдали от слоя магнитной жидкости задано внешнее однородное вертикальное поле при

$$\begin{aligned} \text{при } z \rightarrow +\infty: \quad \nabla u_2 &\rightarrow H_{0z} \mathbf{a}_z, \\ \text{при } z \rightarrow -\infty: \quad \nabla u_3 &\rightarrow H_{0z} \mathbf{a}_z. \end{aligned} \quad (7)$$

Ввиду пренебрежения краевым эффектом в распределении поля имеем также дополнительное условие

$$\text{при } |x| \rightarrow \infty: \quad \frac{\partial u_j}{\partial x} \rightarrow H_{0x}, \quad j = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Движение рассматриваемой невязкой жидкости описывается уравнением Лапласа для потенциала скорости  $\varphi(x, y, z, t)$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (9)$$

и интегралом Коши-Лагранжа [12], записанным с учетом объемных магнитных сил (1)

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \rho (\nabla \varphi)^2 + p - \rho g z - \mu_0 \int_{H_1(x,y,-c_0,t)}^{H_1(x,y,z,t)} M dH = 0, \quad (10)$$

где  $\rho$  — плотность жидкости,  $p(x, y, z, t)$  — давление, а  $g$  — величина ускорения силы тяжести.

На поверхности пластины  $z = -c_0$  ставится условие непроницаемости

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (11)$$

На свободной поверхности  $z = \zeta(x, y, t)$  должны выполняться кинематическое и динамическое условия

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial \zeta}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad (12)$$

$$p - p_a = -\frac{\alpha}{R} - \frac{\mu_0}{2} (\mathbf{Mn})^2, \quad (13)$$

где  $\alpha$  — коэффициент поверхностного натяжения, а  $R^{-1}(x, y, t)$  — сумма главных кривизн свободной поверхности

$$\frac{1}{R} = \operatorname{div} \frac{\nabla \zeta}{\sqrt{1 + (\nabla \zeta)^2}}.$$

Первое и второе слагаемые в правой части (13) представляют, соответственно, капиллярный и магнитный скачки давления [2].

Задача (3)–(13) имеет точное решение, описывающее состояние гидростатического равновесия жидкости с плоской свободной поверхностью  $z = 0$ :

$$\begin{aligned} \zeta = 0, \quad \varphi = \text{const}, \quad u_1^0 &= H_{0x} x + H_{1z}^0 z, \quad u_2^0 = H_{0x} x + H_{0z} z, \\ u_3^0 &= H_{0x} x + H_{0z} z + c_0 M_{0z}, \quad P_0(z) = p_a - \rho g z - \frac{\mu_0}{2} M_{0z}^2, \end{aligned} \quad (14)$$

где  $H_{1z}^0$  — решение нелинейного уравнения, выражающего непрерывность нормальной компоненты вектора индукции на плоской поверхности раздела феррожидкости и немагнитичивающейся среды (6):

$$\mu_r (H_1^0) H_{1z}^0 = H_{0z}. \quad (15)$$

Ввиду отсутствия гистерезиса при намагничивании феррожидкости решение этого уравнения единственно.

При записи выражений (14), (15) использованы обозначения

$$H_1^0 = \sqrt{H_{0x}^2 + (H_{1z}^0)^2}, \quad M_{0z} = \chi(H_1^0) H_{1z}^0.$$

Второе из этих равенств представляет вертикальную компоненту вектора намагниченности  $\mathbf{M}_0 = M_{0x} \mathbf{a}_x + M_{0z} \mathbf{a}_z$  жидкого слоя с плоской свободной поверхностью.

## Постановка задачи

Исследуем в рамках линейной теории устойчивость равновесного состояния (14). Обозначим через  $\beta$  острый угол между осью  $x$  и направлением поля  $\mathbf{H}_1^0$ , тогда

$$H_{0x} = H_1^0 \cos \beta, \quad H_{1z}^0 = H_1^0 \sin \beta, \quad 0 < \beta \leq \frac{\pi}{2}.$$

Положим

$$u_j(x, y, z, t) = u_j^0(x, z) + u_j'(x, y, z, t), \quad j = 1, 2, 3, \quad (16)$$

где  $u_j'(x, y, z, t)$  — потенциал вызываемого изменением формы свободной поверхности возмущения равновесного поля. Предполагая выполненными условия

$$\left| \frac{\partial u_1'}{\partial x} \right| \ll H_{0x}, \quad \left| \frac{\partial u_1'}{\partial z} \right| \ll H_{1z}^0, \quad \left| \frac{\partial u_1'}{\partial y} \right| \lesssim \max \left( \left| \frac{\partial u_1'}{\partial x} \right|, \left| \frac{\partial u_1'}{\partial z} \right| \right)$$

после линеаризации уравнения (3), получаем

$$a_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + 2a_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial z} + a_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z^2} = 0, \quad (17)$$

$$a_1 = \sin^2 \beta + \sigma \cos^2 \beta, \quad a_2 = (\sigma - 1) \sin \beta \cos \beta,$$

$$a_3 = \sigma \sin^2 \beta + \cos^2 \beta,$$

$$\sigma(H_1^0) = \frac{\mu_r(H_1^0)}{\mu_r(H_1^0)} = \frac{1 + \chi_r(H_1^0)}{1 + \chi(H_1^0)}.$$

Здесь и далее штрихи опущены.

Реализующиеся в экспериментах кривые нелинейного намагничивания феррожидкостей [4,5] являются вогнутыми, ввиду чего  $\chi(H_1^0) > \chi_r(H_1^0)$  при  $H_1^0 > 0$ , так что  $\sigma(H_1^0) < 1$ . Если же закон намагничивания линеен, то  $\sigma = 1$ .

При использовании представления потенциала возмущенного магнитного поля (16) уравнения (4) не

изменяются, а условия в бесконечности (7) принимают вид

$$\begin{aligned} \text{при } z \rightarrow +\infty: \quad \nabla u_2 &\rightarrow 0, \\ \text{при } z \rightarrow -\infty: \quad \nabla u_3 &\rightarrow 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Линеаризация закона намагничивания  $\mathbf{M} = \chi(H_1)\mathbf{H}_1$  приводит к следующему выражению для возмущения вектора намагниченности  $\mathbf{m} = \mathbf{M}(H_1) - \mathbf{M}(H_1^0)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{m} = & \left\{ [a_1\mu_r(H_1^0) - 1] \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_2\mu_r(H_1^0) \frac{\partial u_1}{\partial z} \right\} \mathbf{a}_x \\ & + [\mu_r(H_1^0) - 1] \frac{\partial u_1}{\partial y} \mathbf{a}_y \\ & + \left\{ a_2\mu_r(H_1^0) \frac{\partial u_1}{\partial x} + [a_3\mu_r(H_1^0) - 1] \frac{\partial u_1}{\partial z} \right\} \mathbf{a}_z. \end{aligned} \quad (19)$$

В рамках линейной теории граничные условия (5) задачи магнитостатики ставятся на невозмущенной свободной поверхности:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0: \quad u_1 - u_2 &= M_{0z}\zeta, \\ \mu_r(H_1^0) \left[ a_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_3 \frac{\partial u_1}{\partial z} \right] &= \frac{\partial u_2}{\partial z} + M_{0x} \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \end{aligned} \quad (20)$$

Линеаризованное кинематическое условие (12) имеет вид

$$\text{при } z = 0: \quad \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (21)$$

Линеаризация интеграла Коши-Лагранжа (10) приводит к выражению

$$\rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + p + \rho g z - \mu_0 M_0 \left( \frac{\partial u_1}{\partial x} \cos \beta + \frac{\partial u_1}{\partial z} \sin \beta \right) = 0. \quad (22)$$

С учетом (22) линеаризованное динамическое условие на свободной поверхности (13) записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0: \quad \rho \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \rho g \zeta - \alpha \left( \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} \right) \\ - \mu_0 M_0 \left\{ [\cos \beta + a_2\mu_r(H_1^0) \sin \beta] \frac{\partial u_1}{\partial x} + a_3\mu_r(H_1^0) \sin \beta \frac{\partial u_1}{\partial z} \right. \\ \left. - M_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x} \sin \beta \cos \beta \right\} = p_a - \frac{\mu_0}{2} M_{0z}^2. \end{aligned} \quad (23)$$

Поскольку потенциал скорости  $\varphi(x, y, z, t)$  определен с точностью до произвольной функции времени, то, переопределив функцию  $\varphi(x, y, z, t)$ , полагаем равной нулю константу в правой части равенства (23).

Из выражений (20) с учетом (21) следует

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0: \quad \frac{\partial u_1}{\partial t} - \frac{\partial u_2}{\partial t} &= M_{0z} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \\ \mu_r(H_1^0) \left[ a_2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} + a_3 \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} \right] &= \frac{\partial^2 u_2}{\partial z \partial t} + M_{0x} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}. \end{aligned} \quad (24)$$

Продифференцировав динамическое условие (23) по  $t$ , с учетом (21) получаем

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0: \quad \rho \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \rho g \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \alpha \left( \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^2 \partial z} \right) \\ - \mu_0 M_0 \left\{ [\cos \beta + a_2\mu_r(H_1^0) \sin \beta] \frac{\partial^2 u_1}{\partial x \partial t} \right. \\ \left. + a_3\mu_r(H_1^0) \sin \beta \frac{\partial^2 u_1}{\partial z \partial t} - M_0 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z} \sin \beta \cos \beta \right\} = 0. \end{aligned} \quad (25)$$

Будем исследовать развитие неустойчивости плоской свободной поверхности в случае глубокой магнитной жидкости, когда  $c_0/\max|\zeta| \rightarrow \infty$ . В такой ситуации условие непроницаемости пластины (11) и условия (6) сопряжения на поверхности пластины возмущений потенциалов  $u_1(x, y, z, t)$ ,  $u_3(x, y, z, t)$  допустимо заменить требованием затухания скорости и возмущения магнитного поля при удалении точки наблюдения от свободной поверхности в глубь жидкости:

$$\text{при } \frac{z}{\max|\zeta|} \rightarrow \infty: \quad \nabla \varphi \rightarrow 0, \quad \nabla u_1 \rightarrow 0. \quad (26)$$

В рамках такого подхода расчет возмущения магнитного поля  $\nabla u_3$  выпадает из постановки задачи. Следует отметить, что при расчете невозмущенного поля  $H_{1z}^0$  области, лежащую ниже пластины, необходимо учитывать.

Таким образом, неизвестные функции  $u_2(x, y, z, t)$ ,  $\varphi(x, y, z, t)$ ,  $u_1(x, y, z, t)$  определяются уравнениями (4), (9), (17), граничным условием (23), условием при  $z \rightarrow +\infty$  (18) и условиями (26). После нахождения  $\varphi(x, y, z, t)$  форма свободной поверхности вычисляется из уравнения (21).

## Дисперсионное уравнение

Для исследования влияния определяющих параметров задачи на поведение ее решения с ростом времени воспользуемся методом нормальных мод [13]. С этой целью представим искомые функции  $\varphi(x, y, z, t)$ ,  $u_l(x, y, z, t)$ ,  $l = 1, 2$  в виде частных решений рассматриваемой задачи, имеющих вид

$$\begin{aligned} (\varphi, u_l) = \text{Re} \{ [\Phi(z), U_l(z)] \exp[i(k_x x + k_y y) - \omega t] \}, \\ l = 1, 2. \end{aligned} \quad (27)$$

Здесь  $i$  — мнимая единица,  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y$  — волновой вектор (задаваемый действительный параметр, отличный от нуля), а частота  $\omega(k_x, k_y)$  должна быть найдена из имеющихся уравнений и граничных условий.

После подстановки выражений (27) в соответствующие уравнения (4), (9), (17) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{dz^2} - k^2 \Phi = 0, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2, \\ a_3 \frac{d^2 U_1}{dz^2} + 2ik_x a_2 \frac{dU_1}{dz} - (a_1 k_x^2 + k_y^2) U_1 = 0, \\ \frac{d^2 U_2}{dz^2} - k^2 U_2 = 0. \end{aligned}$$

Затухающие при  $z \rightarrow \pm\infty$  решения этих уравнений имеют вид

$$\Phi = C_1 \exp(kz), \quad U_1 = C_2 \exp(qz), \quad U_2 = C_3 \exp(-kz),$$

$$q = \frac{1}{a_3} \left( -ia_2 k_x + \sqrt{\sigma k_x^2 + a_3 k_y^2} \right),$$

где  $C_1, C_2, C_3$  — произвольные константы.

При подстановке найденных решений в граничные условия (23), (24) получаем следующую систему уравнений относительно  $C_1, C_2, C_3$ :

$$kM_{0z}C_1 + i\omega(C_2 - C_3) = 0,$$

$$kk_x M_{0x} C_1 + \mu_r \omega (ia_2 k_x + a_3 q) C_2 + \omega k C_3 = 0,$$

$$(\rho\omega^2 - \rho g k - \alpha k^3 - i\mu_0 M_0^2 k k_x \sin\beta \cos\beta) C_1$$

$$+ \omega \mu_0 M_0 [k_x (a_2 \mu_r \sin\beta + \cos\beta) - ia_3 \mu_r q \sin\beta] C_2 = 0. \quad (28)$$

Условием существования нетривиального решения однородной системы уравнений (28) является равенство нулю ее определителя. Вычислив определитель и приравняв его нулю, получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} \rho\omega^2 = \rho g k + \alpha k^3 \\ + \frac{\mu_0 k \left[ M_{0k}^2 k_x^2 - \mu_r M_{0z}^2 k \sqrt{\sigma k_x^2 + s k_y^2} \right]}{k + \mu_r \sqrt{\sigma k_x^2 + s k_y^2}}, \\ s = \cos^2 \beta + \sigma \sin^2 \beta. \end{aligned} \quad (29)$$

Из (29) следует, что в отсутствие вертикальной компоненты вектора намагниченности (при  $M_{0z} = 0$ ) частота  $\omega(k_x, k_y)$  является двузначной действительной функцией. Ввиду этого частные решения для потенциала скорости (27) описывают гармонические поверхностные волны, фазовая скорость которых зависит от величины угла между волновым вектором и приложенным горизонтальным магнитным полем.

### Критическая величина вертикальной компоненты вектора намагниченности

Из полученного дисперсионного уравнения (29) следует, что если задаваемые независимо друг от друга параметры  $\mathbf{M}_0 = M_{0x} \mathbf{a}_x + M_{0z} \mathbf{a}_z$  и  $\mathbf{k} = k_x \mathbf{a}_x + k_y \mathbf{a}_y$  таковы, что

$$\mu_0 M_{0z}^2 > K(k_x, k_y), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} K(k_x, k_y) = \frac{1}{\mu_r (H_1^0) \sqrt{(k_x^2 + k_y^2) [\sigma (H_1^0) k_x^2 + s (H_1^0) k_y^2]}} \\ \times \left\{ \mu_0 M_{0x}^2 k_x + [\rho g + \alpha (k_x^2 + k_y^2)] \right. \\ \left. \times \left[ \sqrt{k_x^2 + k_y^2} + \mu_r (H_1^0) \sqrt{\sigma (H_1^0) k_x^2 + s (H_1^0) k_y^2} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (31)$$

то  $\omega(k_x, k_y)$  является чисто мнимой двузначной функцией, на одной из ветвей которой  $\text{Im } \omega > 0$ . Ввиду этого моды с волновыми векторами  $(k_x, k_y)$ , для которых значения  $\omega^2(k_x, k_y)$  лежат в нижнем полупространстве, растут с ростом времени, т.е. при выполнении условия (30) гидростатическое состояние (14) магнитной жидкости оказывается неустойчивым и развивается неустойчивость Розенцвейга. Очевидно, что условие

$$\mu_0 M_c^2 = \min K(k_x, k_y) \quad (32)$$

$$(0 < k_x < \infty, \quad 0 < k_y < \infty)$$

определяет критическое значение  $M_c$  вертикальной компоненты вектора намагниченности.

Легко видеть, что поверхность  $K = K(k_x, k_y)$  симметрична относительно координатных плоскостей  $k_x = 0$  и  $k_y = 0$ .

С целью упрощения исследования функции  $K(k_x, k_y)$  перейдем в (31) к безразмерным переменным

$$\kappa_1 = k_x l_c, \quad \kappa_2 = k_y l_c, \quad Q = \frac{1}{\sqrt{\rho g \alpha}} K,$$

$$N_1 = \sqrt[4]{\frac{\mu_0^2}{\rho g \alpha}} M_{0x}, \quad N_2 = \sqrt[4]{\frac{\mu_0^2}{\rho g \alpha}} M_{0z},$$

где  $l_c = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}$  — капиллярная длина. В результате получаем

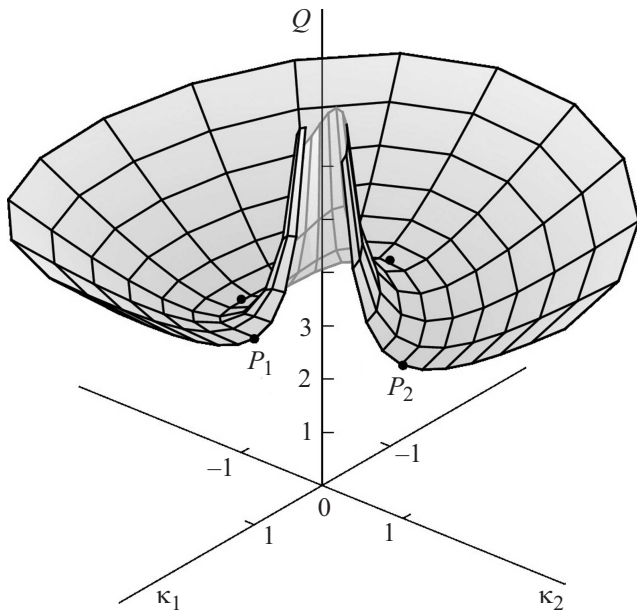
$$\begin{aligned} Q(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{\mu_r (H_1^0) \sqrt{\sigma (H_1^0) \kappa_1^2 + s (H_1^0) \kappa_2^2}} \\ \times \left( 1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \frac{\kappa_1^2}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} N_1^2 \right) + \frac{1 + \kappa_1^2 + \kappa_2^2}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}}. \end{aligned}$$

Точка минимума находится среди стационарных точек функции  $Q(\kappa_1, \kappa_2)$ , т.е. точек, в которых

$$\frac{\partial Q}{\partial \kappa_1} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial \kappa_2} = 0.$$

В развернутом виде имеем

$$\begin{aligned} \kappa_1 \left\{ \psi_1(\kappa_1, \kappa_2) - \frac{\sigma (H_1^0)}{\mu_r (H_1^0)} \psi_2(\kappa_1, \kappa_2) \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_r (H_1^0) \sqrt{\sigma (H_1^0) \kappa_1^2 + s (H_1^0) \kappa_2^2}} \right. \\ \left. \times \left[ 2 + N_1^2 \frac{\kappa_1^2 + 2\kappa_2^2}{\sqrt{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^3}} \right] \right\} = 0, \\ \kappa_2 \left\{ \psi_1(\kappa_1, \kappa_2) - \frac{s (H_1^0)}{\mu_r (H_1^0)} \psi_2(\kappa_1, \kappa_2) \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_r (H_1^0) \sqrt{\sigma (H_1^0) \kappa_1^2 + s (H_1^0) \kappa_2^2}} \right. \\ \left. \times \left[ 2 - N_1^2 \frac{\kappa_1^2}{\sqrt{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^3}} \right] \right\} = 0, \end{aligned}$$



**Рис. 2.** Поверхность  $Q(\kappa_1, \kappa_2)$  при  $N_1 = 1.1$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $s = 0.9$ ,  $\mu_r = 2.4$ .

где

$$\psi_1(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 - 1}{\sqrt{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)^3}},$$

$$\psi_2(\kappa_1, \kappa_2) = \frac{1}{\sqrt{[\sigma(H_1^0)\kappa_1^2 + s(H_1^0)\kappa_2^2]^3}} \times \left( \kappa_1^2 + \kappa_2^2 + 1 + N_1^2 \frac{\kappa_1^2}{\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2}} \right).$$

Отсюда находим четыре стационарные точки  $(\pm 1, 0)$ ,  $(0, \pm 1)$  функции  $Q(\kappa_1, \kappa_2)$ .

Дальнейший анализ показывает, что в этих точках

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial \kappa_1^2} > 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial \kappa_1 \partial \kappa_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 Q}{\partial \kappa_2^2} > 0.$$

С учетом этих выражений заключаем, что найденные точки являются точками локального минимума функции  $Q(\kappa_1, \kappa_2)$ .

В качестве примера на рис. 2 построена поверхность  $Q = Q(\kappa_1, \kappa_2)$  при  $N_1 = 1.1$ ,  $\sigma = 0.8$ ,  $s = 0.9$ ,  $\mu_r = 2.4$ . Для более детального изображения геометрического образа исследуемой функции часть поверхности, лежащая в первом октанте, изъята для того, чтобы была видна внутренняя сторона поверхности. Четырьмя выделенными точками, лежащими на поверхности, отмечены значения  $Q(\pm 1, 0)$  и  $Q(0, \pm 1)$ . Буквами  $P_1, P_2$  обозначены точки  $P_1 = (1, 0, 3.495)$  и  $P_2 = (0, 1, 2.878)$ .

Из рисунка видно, что минимум функции  $Q(\kappa_1, \kappa_2)$  реализуется в точках  $(0, \pm 1)$ :

$$Q_{\min} = 2 \left[ 1 + \frac{1}{\mu_r(H_1^0) \sqrt{s(H_1^0)}} \right].$$

В размерном виде имеем

$$K_{\min} = K \left( 0, \pm \frac{1}{l_c} \right) = 2\sqrt{\rho g \alpha} \left( 1 + \frac{1}{\mu_r(H_1^0) \sqrt{s(H_1^0)}} \right). \quad (33)$$

Отсюда следует, что пороговое волновое число  $k_c$  равно обратной величине капиллярной длины, а формула для критической величины  $M_c$  вертикальной компоненты вектора намагниченности, получаемая с использованием (32), (33), имеет вид

$$M_c(H_1^0) = \sqrt[4]{\frac{4\rho g \alpha}{\mu_0^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\mu_r(H_1^0) \sqrt{s(H_1^0)}}}. \quad (34)$$

В случае строго вертикального приложенного магнитного поля имеем

$$M_c(H_1^0) \Big|_{\beta=\frac{\pi}{2}} = \sqrt[4]{\frac{4\rho g \alpha}{\mu_0^2}} \sqrt{1 + \frac{1}{\mu_r(H_1^0) \sqrt{\sigma(H_1^0)}}}. \quad (35)$$

С точностью до обозначений формула (35) совпадает с результатом, полученным с использованием условия смены устойчивостей [1].

## Неустойчивость Розенцвейга при модифицированном ланжевенском законе намагничивания

В феррогидродинамике с целью описания и диагностики физических свойств реальных магнитных жидкостей [2] достаточно давно [14] стали использоваться различные усовершенствованные версии теории, предложенной Ланжевенем при исследовании намагничивания парамагнитного газа [15]. Последней по времени появления новацией такого подхода является модифицированный ланжевенский закон намагничивания феррожидкостей [6]

$$\chi(H) = \frac{M_s}{H} L \left( \frac{3H}{M_s} \chi_i \right),$$

где  $L(a) = \text{cth } a - \frac{1}{a}$  — классическая функция Ланжевена, а  $M_s$  и  $\chi_i$  — задаваемые из эксперимента константы: намагниченность насыщения и начальная магнитная восприимчивость феррожидкости.

В вектрном виде предложенный закон записывается следующим образом:

$$\mathbf{M}(H) = \frac{M_s}{H} L \left( \frac{3H}{M_s} \chi_i \right) \mathbf{H}. \quad (36)$$

С использованием (36) исследуем влияние горизонтального магнитного поля на критическую величину вертикальной компоненты вектора намагниченности (34).

Легко показать, что в критическом состоянии слоя (при  $M_{0z} = M_c$ ) напряженность вертикальной компоненты  $H_{1z}^0$  наклонного магнитного поля  $\mathbf{H}_1^0$  вычисляется из уравнения

$$[M_c (H_1^0)]^2 = M_s^2 L^2 \left( \frac{3H_1^0 \chi_i}{M_s} \right) \left( \frac{H_{1z}^0}{H_1^0} \right)^2,$$

$$H_1^0 = \sqrt{H_{0x}^2 + H_{1z}^0}. \quad (37)$$

Обозначим

$$r_1 = 3\chi_i, \quad r_2 = M_s \sqrt{\frac{\mu_0}{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{\rho g \alpha}}, \quad H_L = \frac{1}{3} \frac{M_s}{\chi_i}$$

и введем безразмерное поле

$$\Gamma = \frac{H_{0x}}{H_L}, \quad \Pi = \frac{H_{1z}^0}{H_L}, \quad w = \frac{H_1^0}{H_L} = \sqrt{\Gamma^2 + \Pi^2}.$$

При этом

$$\chi (H_1^0) = \frac{r_1}{w} L(w), \quad \chi_i (H_1^0) = r_1 \frac{d}{dw} L(w),$$

$$\cos^2 \beta = \left( \frac{\Gamma}{w} \right)^2$$

и уравнение (37) принимает вид

$$\frac{1}{\left\{ \left( 1 + r_1 \frac{d}{dw} L(w) \right) \left[ 1 + \frac{r_1}{w} L(w) \right] \right\}^{1/2}} - \left( \frac{r_2}{w} \right)^2 (w^2 - \Gamma^2) L^2(w) + 1 = 0. \quad (38)$$

Вычислив из этого уравнения  $w$  как функцию заданного горизонтального поля  $\Gamma$ , легко найти зависимость критической напряженности вертикальной компоненты поля  $\Pi_c = (H_{1z}^0)_c / H_L$  от  $\Gamma$  и далее с помощью (34) найти зависимость  $M_c$  от  $H_{0x}$ .

Соответствующие графики построены на рис. 3, 4. Используемые при решении уравнения (38) численные значения безразмерных параметров  $r_1 = 2.07$ ,  $r_2 = 2.55$ , характеризующих магнитную жидкость, соответствуют данным, использованным в экспериментах [7,8] по исследованию поверхностных волн:

$$\chi_i = 0.69, \quad M_x = 16.9 \cdot 10^3 \frac{A}{m},$$

$$\rho = 1324 \frac{kg}{m^3}, \quad \alpha = 59 \cdot 10^{-3} \frac{N}{m}.$$

Из рис. 3,4 видно, что горизонтальное поле вызывает увеличение как  $(H_{1z}^0)_c$ , так и  $M_c$ . В рассмотренном диапазоне изменения  $H_{0x}$  зависимость  $(H_{1z}^0)_c$  от  $H_{0x}$  гораздо более сильная, чем зависимость  $M_c$  от  $H_{0x}$ .

На рис. 5 представлен график зависимости критической величины вертикальной компоненты внешнего поля  $H_{0z}^c / H_L$  от напряженности горизонтального поля,

построенный с использованием граничного условия (15), выражающего непрерывность нормальной компоненты вектора индукции на плоской свободной поверхности. Из графика видно, что при наличии горизонтального поля для возникновения неустойчивости Розенцвейга требуется гораздо более сильное внешнее вертикальное поле, чем в случае строго вертикального поля.

Таким образом, графики на рис. 3–5 свидетельствуют, что горизонтальное поле оказывает стабилизирующее воздействие на неустойчивость Розенцвейга нелинейно намагничивающейся феррожидкости.

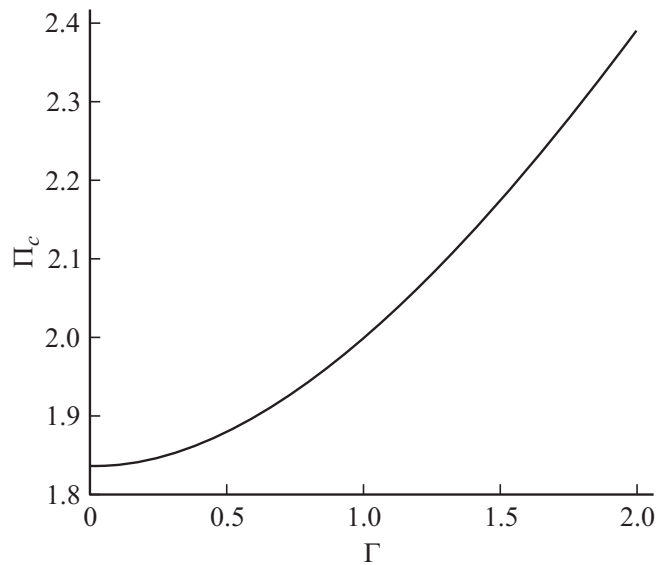


Рис. 3. Зависимость критической величины вертикальной компоненты поля в слое от напряженности горизонтального поля.

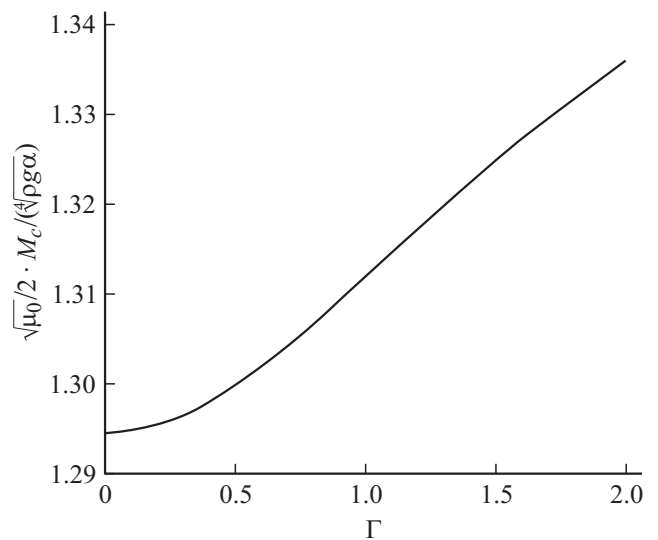
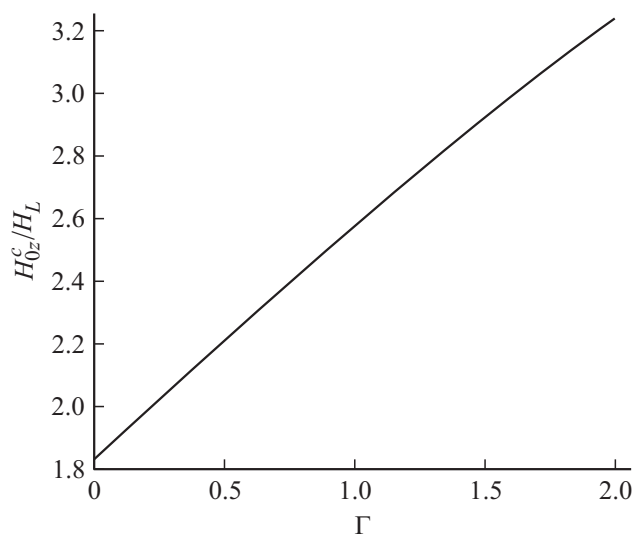


Рис. 4. Зависимость критической величины вертикальной компоненты вектора намагниченности от напряженности горизонтального поля.





**Рис. 5.** Зависимость критической величины вертикальной компоненты внешнего поля от напряженности горизонтального поля.

## Заключение

Изучена вызываемая магнитными силами неустойчивость Розенцвейга плоской свободной поверхности неограниченного в горизонтальном направлении слоя покоящейся нелинейно намагничивающейся феррожидкости, покрывающей горизонтальную ненамагничивающуюся пластину. Давление в газе, заполняющем область над жидкостью, постоянно.

Покрытая жидкостью пластина помещена в наклонное по отношению к горизонтальным границам слоя кусочно-постоянное магнитное поле, являющееся суперпозицией приложенного поля, созданного внешними источниками, и размагничивающего поля, возникающего в слое под действием нормальной компоненты приложенного поля.

В рамках модели невязкой жидкости на базе линеаризованных уравнений и граничных условий феррогидродинамики в случае глубокой жидкости выведено дисперсионное уравнение, связывающее частоту и компоненты двумерного волнового вектора, образующего произвольный угол с направлением горизонтальной компоненты приложенного поля. Путем минимизации некоторой вспомогательной функции от компонент волнового вектора и имеющихся определяющих параметров, полученной с помощью дисперсионного уравнения, вычислена критическая величина вертикальной компоненты вектора намагниченности феррожидкости.

Полученная формула применима при любом физически реализуемом законе намагничивания. В отсутствие горизонтального магнитного поля эта формула с точностью до обозначений совпадает с приведенным в [1] результатом, найденным при использовании условия смены устойчивостей.

В рамках модифицированного двухпараметрического ланжевенковского закона намагничивания феррожидкостей [6] исследовано влияние напряженности горизонтальной компоненты приложенного магнитного поля на критические величины вертикальной компоненты вектора намагниченности, а также вертикальных компонент векторов магнитного поля в жидком слое и внешнего приложенного магнитного поля.

Показано, что при наличии горизонтального поля для возникновения неустойчивости Розенцвейга плоской свободной поверхности нелинейно намагничивающейся феррожидкости требуется значительно более сильное внешнее вертикальное магнитное поле, чем в случае строго вертикального поля.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 11-01-00051).

## Список литературы

- [1] Розенцвейг Р. Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 357 с.
- [2] Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С. Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
- [3] Блум Э.Я., Майоров М.М., Цеберс А.О. Магнитные жидкости. Рига: Зинатне, 1989. 386 с.
- [4] Cowley M.D., Rosensweig R.E. // J. Fluid Mech. 1967. Vol. 30. N 4. P. 671–688.
- [5] Zelazo R.E., Melcher J.R. // J. Fluid Mech. 1969. Vol. 39. N 1. P. 1–24.
- [6] Abou B., Néron de Surgy G., Wesfreid J.-E. // J. Phys. II France. 1997. Vol. 7. P. 1159–1171.
- [7] Boyer F., Falcon E. // Phys. Rev. Lett. 2008. Vol. 101. P. 244 502.
- [8] Dorbolo S., Falcon E. // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 83. P. 046 303.
- [9] Баумовой В.Г. // ПМТФ. 1978. № 1 (107). С. 81–87.
- [10] Yang H.C., Jang I.J., Horng H.E., Wu J.M., Chiou Y.C., Hong Chih-Yih. // J. Magn. Magn. Mater. 1999. Vol. 201. P. 313–316.
- [11] Диканский Ю.И., Закиян А.Р., Мкртчян Л.С. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 9. С. 38–43.
- [12] Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т. 2. М.: Наука, 1984. 560 с.
- [13] Дразин Ф. Введение в теорию гидродинамической устойчивости. М.: Физматлит, 2005. 288 с.
- [14] Rosensweig R.E., Nestor J.W., Timmins R.E. // Proc. Symp. AICHe. I. Chem. Eng. 1965. Ser. 5. P. 104–118.
- [15] Тикадзуми С. Физика ферромагнетизма. Магнитные свойства вещества. М.: Мир, 1983. 304 с.