

01

## Определение параметров элементов и архитектуры связей в ансамблях связанных систем с запаздыванием по временным рядам

© И.В. Сысоев,<sup>2</sup> М.Д. Прохоров,<sup>1</sup> В.И. Пономаренко,<sup>1,2</sup> Б.П. Безручко<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup> Саратовский филиал Института радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН, 410019 Саратов, Россия,

<sup>2</sup> Саратовский государственный университет, 410012 Саратов, Россия  
e-mail: mdprokhorov@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 16 января 2014 г.)

Предложен метод реконструкции модельных дифференциальных уравнений с запаздыванием для ансамблей связанных систем с задержкой по их временным рядам. Метод позволил восстановить параметры элементов ансамбля, а также архитектуру и величину связей в ансамблях неидентичных систем с запаздыванием с произвольным числом однонаправленных и взаимных связей между ними. Эффективность метода продемонстрирована на примерах хаотических и периодических временных рядов модельных уравнений ансамблей диффузионно связанных систем с запаздыванием в присутствии шума, а также экспериментальных временных рядов резистивно связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью.

### Введение

Ансамбли связанных между собой систем с запаздыванием широко используются для описания и моделирования многоэлементных систем в различных научных дисциплинах [1,2]. Важной задачей при этом является оценка параметров элементов ансамбля и восстановление архитектуры связей между ними по экспериментальным временным рядам. Актуальность этой задачи определяется желанием не только предсказать поведение исследуемых систем во времени и при изменении параметров, но также оценить адекватность заложенных в модели представлений об объекте, осуществить классификацию объектов и режимов их функционирования, определить значения параметров, недоступных непосредственному измерению в эксперименте.

Сложность поставленной задачи определяется тем, что даже простые несвязанные между собой системы с запаздыванием могут демонстрировать хаотические колебания очень высокой размерности. При этом универсальные методы реконструкции модельных уравнений оказываются неэффективными, и для восстановления уравнений систем с задержкой приходится разрабатывать специальные подходы [3–8]. Однако большинство из них ориентировано на реконструкцию модельных уравнений изолированных систем с запаздыванием по их временным рядам. Наличие связей между системами с задержкой вносит дополнительные сложности в задачу реконструкции и требует разработки новых подходов [9].

Задача выявления наличия, структуры и характеристики связей в ансамблях многоэлементных систем по временным рядам привлекает в последние годы большое внимание. Для ее решения используются методы, основанные на анализе причинности по Грейнджеру [10], моделировании фазовой динамики [11,12] и методы

адаптивного управления [13,14]. При этом элементы исследуемых ансамблей либо не имеют запаздывающей обратной связи, либо ее величина предполагается известной.

Задача одновременного определения параметров элементов, включая время запаздывания, и восстановления архитектуры связей в ансамбле систем с задержкой была недавно исследована в [15]. Однако для ее решения потребовалось введение таких ограничений, как обратимость функций, описывающих динамику элементов, отсутствие шума и задание стартовых догадок для задержек вблизи их истинных значений. В настоящей работе предложен подход к реконструкции модельных уравнений элементов ансамбля связанных систем с запаздыванием, лишенный перечисленных недостатков и позволяющий восстановить параметры неидентичных элементов ансамбля, а также архитектуру и величину связей между элементами.

### 1. Описание метода

Рассмотрим ансамбль, состоящий из диффузионно связанных систем с запаздыванием, каждая из которых описывается уравнением следующего вида:

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) = -x_i(t) + f_i(x_i(t - \tau_i)) + \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j}(x_j(t) - x_i(t)), \quad (1)$$

где  $i = 1, \dots, M$ ,  $M$  — число элементов в ансамбле,  $\varepsilon_i$  — параметр, характеризующий инерционные свойства  $i$ -го элемента ансамбля,  $\tau_i$  — время запаздывания,  $f_i$  — нелинейная функция,  $k_{i,j}$  — коэффициенты связи, характеризующие воздействие  $j$ -го элемента на  $i$ -й ( $j \rightarrow i$ ).

Следует отметить, что время запаздывания является параметром, точность восстановления которого имеет наибольшее влияние на качество реконструкции системы. Даже небольшая погрешность его определения приводит, как правило, к неправильному восстановлению архитектуры связей в ансамбле и большим ошибкам оценки остальных параметров. Поэтому мы предлагаем подход к восстановлению параметров элементов и архитектуры связей в ансамбле систем с запаздыванием (1), который состоит из двух этапов. Сначала восстанавливаем по временным рядам время запаздывания  $\tau_i$  каждого элемента, а затем, зная  $\tau_i$ , восстанавливаем остальные параметры ( $\varepsilon_i$  и  $k_{i,j}$ ) и нелинейные функции  $f_i$ . Это позволяет существенно упростить решение задачи и за счет этого добиться более высокой точности оценки параметров.

### 1.1. Реконструкция времени запаздывания элементов

Ранее нами было установлено, что во временных реализациях изолированных ( $k_{i,j} = 0$ ) систем с запаздыванием вида (1) практически отсутствуют экстремумы, удаленные друг от друга на время запаздывания [4]. Если такая система совершает хаотические колебания, то экстремумы в ее временном ряде расположены нерегулярно и расстояние между ними принимает различные значения. На основе этого свойства нами был предложен метод определения времени задержки  $\tau_i$ , использующий статистический анализ временных интервалов между экстремумами хаотического временного ряда системы с запаздыванием. Определив для различных значений  $\tau$  число  $N_i$  ситуаций, при которых точки временного ряда, разделенные интервалом времени  $\tau$ , одновременно являются экстремальными, и построив зависимость  $N_i(\tau)$ , можно найти время задержки  $\tau_i$  как значение, при котором наблюдается абсолютный минимум этой зависимости [4].

Рассмотрим, как скажется на эффективности этого метода наличие связи между системами с запаздыванием. Воздействие на систему со стороны соседних элементов ансамбля возмущает траекторию ее движения, приводя к исчезновению одних экстремумов временного ряда и появлению других. Особенно заметно этот эффект проявляется при линейной связи систем с запаздыванием, рассмотренной нами в [9]. В случае диффузионной связи метод, основанный на статистическом анализе экстремумов хаотического временного ряда системы, тоже можно использовать для восстановления времени задержки, причем метод остается эффективным при существенно более высоких значениях коэффициентов связи, чем в случае линейной связи. Поясним это на примере уравнения (1), продифференцировав его по  $t$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \ddot{x}_i(t) = & -\dot{x}_i(t) + \frac{df_i(x_i(t - \tau_i))}{dx_i(t - \tau_i)} \dot{x}_i(t - \tau_i) \\ & + \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j} (\dot{x}_j(t) - \dot{x}_i(t)). \end{aligned} \quad (2)$$

При наличии инерционности ( $\varepsilon_i > 0$ ), что соответствует реальным ситуациям, экстремумы во временной реализации  $x_i(t)$  близки к квадратичным, а следовательно, в экстремальных точках  $\dot{x}_i(t) = 0$ ,  $\ddot{x}_i(t) \neq 0$ . Тогда если при  $\dot{x}_i(t) = 0$  в типичном случае  $\ddot{x}_i(t) \neq 0$ , то при  $\varepsilon_i \neq 0$  должно выполняться условие

$$\frac{df_i(x_i(t - \tau_i))}{dx_i(t - \tau_i)} \dot{x}_i(t - \tau_i) + \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j} \dot{x}_j(t) \neq 0. \quad (3)$$

Для выполнения условия (3) необходимо, чтобы  $\dot{x}_i(t - \tau_i) \neq 0$  или/и

$$\sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j} \dot{x}_j(t) \neq 0. \quad (4)$$

Условие (4) никогда не выполняется в случае отсутствия связи ( $k_{i,j} = 0$ ) и в случае сильной связи, обеспечивающей синхронизацию элементов, так как при этом  $\dot{x}_j(t) = \dot{x}_i(t)$ , а  $\dot{x}_i(t) = 0$  при выводе условия (3). Следовательно, в этих пограничных случаях первое слагаемое в (3) отлично от нуля, а значит, производные  $\dot{x}_i(t)$  и  $\dot{x}_i(t - \tau_i)$  одновременно в нуль не обращаются, т.е. на удалении  $\tau_i$  от квадратичного экстремума во временном ряде  $x_i(t)$  не должно быть другого экстремума. В промежуточных ситуациях слабой и умеренной связи существует вероятность обнаружить пару экстремумов на удалении  $\tau_i$  друг от друга. Однако, как показывают численные эксперименты, в общем случае эта вероятность меньше, чем вероятность встретить пару экстремумов на удалении  $\tau \neq \tau_i$ . В результате число экстремумов, разделенных интервалом времени  $\tau_i$ , будет меньше, чем число экстремумов, разделенных другими значениями времени  $\tau$ , и, следовательно, график  $N_i(\tau)$  будет иметь минимум при  $\tau = \tau_i$ . То есть качественные особенности зависимости  $N_i(\tau)$  сохраняются для систем (1) в широком диапазоне значений коэффициентов связи. Отметим, что такой метод определения времени запаздывания обладает высоким быстродействием, поскольку использует только операции сравнения и сложения, не требуя вычисления каких-либо мер сложности движения или ошибки аппроксимации данных.

Однако если система с запаздыванием совершает периодические колебания, такой подход оказывается неработоспособным, так как экстремумы во временном ряде расположены регулярным образом. Для изолированных систем с запаздыванием, находящихся в режиме периодических автоколебаний, нами недавно был предложен метод восстановления времени задержки, основанный на возмущении системы внешним воздействием и анализе отклика [5]. Если на переменную  $x_i(t)$  изолированной системы с запаздыванием подействовать внешним сигналом  $y_i(t)$ , представляющим собой прямоугольные импульсы, и построить взаимную корреляционную функцию

$$C_i(s) = \frac{\langle |\ddot{y}_i(t)| |\ddot{x}_i(t + s)| \rangle}{\sqrt{\langle |\ddot{y}_i(t)|^2 \rangle \langle |\ddot{x}_i(t)|^2 \rangle}}, \quad (5)$$

где угловые скобки обозначают усреднение по времени, то  $C_i(s)$  будет иметь четко выраженный максимум при  $s = \tau_i$ . Недостатком такого подхода по сравнению с рассмотренным выше методом является необходимость активного воздействия на систему. Однако метод позволяет использовать импульсы малой амплитуды, что позволяет свести воздействие на систему к минимуму.

Исследуем возможность применения такого метода для определения времен задержки в ансамбле связанных систем с запаздыванием. Рассмотрим такой способ возбуждения элементов ансамбля внешними сигналами  $y_i(t)$ , при котором их модельные уравнения имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_i \dot{x}_i(t) = & -x_i(t) + f_i(x_i(t - \tau_i) + y_i(t - \tau_i)) \\ & + \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j}(\dot{x}_j(t) - \dot{x}_i(t)), \end{aligned} \quad (6)$$

Воздействия  $y_i(t)$  представляют собой прямоугольные импульсы с амплитудой  $A_i$ , периодом  $T_i$  и длительностью  $D_i$ . Для восстановления времени задержки  $\tau_i$  только одного  $i$ -го элемента ансамбля достаточно подействовать внешним сигналом только на этот  $i$ -й элемент. Как уже было отмечено выше, наличие взаимодействия между системами с запаздыванием приводит к возмущению траекторий их движения. Эти возмущения снижают чувствительность взаимной корреляционной функции (5) как характеристики для определения времени задержки. В результате для восстановления  $\tau_i$  в общем случае необходимо увеличить амплитуду внешнего воздействия  $A_i$  по сравнению со случаем несвязанных систем с запаздыванием. Метод можно использовать при любых значениях коэффициентов связи  $k_{i,j}$ . Кроме того, этот метод может быть применен к системам (1), совершающим как периодические, так и хаотические колебания. Еще одним достоинством метода является то, что он остается эффективным при высоких уровнях шума, в несколько раз превышающих допустимый уровень шума для метода определения  $\tau_i$ , основанного на статистическом анализе экстремумов временного ряда.

## 1.2. Реконструкция остальных параметров и архитектуры связей элементов

Определив  $\tau_i$ , можно восстановить параметр  $\varepsilon_i$ , нелинейную функцию  $f_i$  и коэффициенты связи  $k_{i,j}$   $i$ -й системы с запаздыванием (1), имея временные ряды колебаний всех элементов ансамбля. Для этого предлагаем следующий подход. Запишем уравнение (1) в виде

$$\varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j}(x_j(t) - x_i(t)) = f_i(x_i(t - \tau_i)). \quad (7)$$

Если построить зависимость левой части уравнения (7) от  $x_i(t - \tau_i)$ , то она воспроизведет функцию  $f_i$ .

Поскольку заранее величины  $\varepsilon_i$  и  $k_{i,j}$  неизвестны, будем искать их, минимизируя величину

$$L_i(\varepsilon_i, k_{i,j}) = \sum_{n=1}^{S-1} ((y_{i,n+1} - y_{i,n})^2 + (z_{i,n+1} - z_{i,n})^2), \quad (8)$$

характеризующую расстояние между точками на плоскости  $(y_i, z_i)$ , отсортированными по величине координаты  $y_i$ , где  $y_i = x_i(t - \tau_i)$ ,

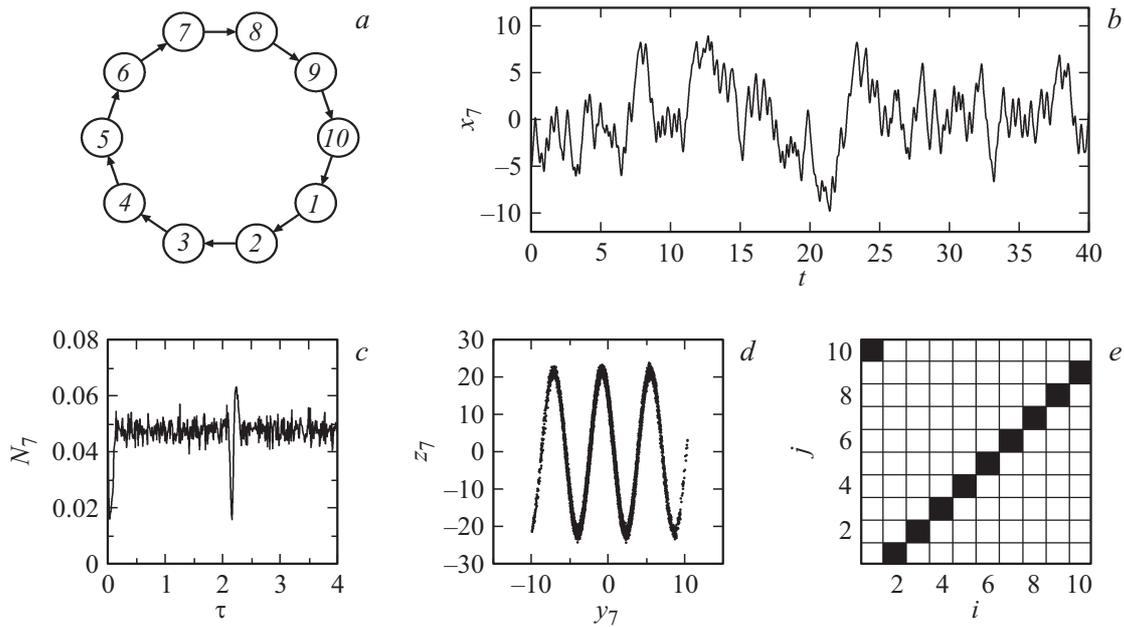
$$z_i = \varepsilon_i \dot{x}_i(t) + x_i(t) - \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j}(x_j(t) - x_i(t)),$$

$n$  — номер точки, а  $S$  — число точек. При ошибочном выборе значений  $\varepsilon_i$  и  $k_{i,j}$  точки на плоскости  $(y_i, z_i)$  не ложатся на одномерную кривую  $f_i$ , а значит, величина  $L_i(\varepsilon_i, k_{i,j})$  будет больше, чем при истинных  $\varepsilon_i$  и  $k_{i,j}$ .

Для  $\varepsilon_i$  и  $k_{i,j}$  мы задаем стартовые догадки и уточняем их симплекс-методом [16], минимизируя величину (8), минимум которой обозначим  $L_{i,M}$ . При  $M \geq 4$  и отсутствии шума все параметры восстанавливаются с высокой точностью. Однако уже при  $M > 4$  типичной является ситуация, когда метод не позволяет выявить отсутствующие связи между элементами ансамбля. Такие связи диагностируются как слабые из-за наличия опосредованных связей через другие элементы. Избавиться от незначимых связей позволяет метод последовательного пробного исключения коэффициентов  $k_{i,j}$  из модели (1) [17]. Мы выдвигаем гипотезу отсутствия связи  $j \rightarrow i$  между двумя элементами, исключая соответствующий коэффициент связи  $k_{i,j}$ , и восстанавливаем остальные параметры модели, находя при этом минимум  $L_{i,j,M-1}$  функции (8). Затем для зафиксированного  $i$  повторяем процедуру, исключая другой  $k_{i,j}$ , и так далее для всех  $j \neq i$ . При этом на каждом шаге предполагаем отсутствие воздействия на  $i$ -й элемент лишь со стороны одного из остальных  $j$ -х элементов ансамбля. Наконец, мы определяем, при исключении какого из  $k_{i,j}$  получаем  $L_{i,M-1} = \min_j L_{i,j,M-1}$  и оцениваем статистическую значимость величины  $L = L_{i,M-1}/L_{i,M}$ , руководствуясь следующими соображениями.

При больших  $S$  разности  $y_{i,n+1} - y_{i,n}$  и  $z_{i,n+1} - z_{i,n}$  в (8) распределены по закону, близкому к нормальному, причем  $S/2$  из них можно считать независимыми, поскольку они не имеют общих координат. Кроме того,  $L_{i,M}$  зависит от  $M$  параметров модели (7), что уменьшает общее число независимых величин в (8) до  $S/2 - M$ . Тогда, учитывая, что сумма квадратов  $K$  независимых нормально распределенных величин распределена по закону хи-квадрат с  $K$  степенями свободы [18], получим, что распределение величин  $L_{i,M}$ , полученных при разных значениях параметров и/или наличии шума, подчиняется закону хи-квадрат с  $S/2 - M$  степенями свободы, а величин  $L_{i,M-1}$  закону хи-квадрат с  $S/2 - M + 1$  степенями свободы.

Известно, что величина  $X$ , являющаяся отношением двух независимых случайных величин, распределенных



**Рис. 1.** *a* — замкнутая в кольцо цепочка из 10 однонаправленно связанных элементов, *b* — хаотический временной ряд переменной  $x_7(t)$  цепочки (10) в присутствии нормального шума с  $\sigma_i^2 = 0.01$ , *c* — зависимость  $N_7(\tau)$ .  $N_{7\min} = N_7(2.15)$ , *d* — функция  $f_7$ , восстановленная на плоскости  $(y_7, z_7)$ , где  $y_7 = x_7(t - \tau_i)$ ,  $z_7 = \dot{x}_7(t) + x_7(t) - k'_{7,6}(x_6(t) - x_7(t))$ , *e* — диаграмма результата восстановления архитектуры связей. Черным цветом показаны правильно восстановленные связи, белым — правильно диагностированные отсутствующие связи.

по закону хи-квадрат со степенями свободы  $v$  и  $w$ , имеет распределение Фишера–Снедекора с функцией распределения

$$F_{v,w}(X) = B_d\left(\frac{v}{2}, \frac{w}{2}\right), \quad (9)$$

где  $B$  — неполная бета-функция, а  $d = vX / (vX + w)$  [19]. Следовательно, величина  $L$  имеет функцию распределения (9) с  $X = L$ ,  $v = S/2 - M + 1$ ,  $w = S/2 - M$ . Обозначим через  $L_{1-p}$  такое значение  $L$ , при котором  $F_{v,w}(L_{1-p}) = 1 - p$ , где  $p$  — уровень статистической значимости. Тогда если  $L > L_{1-p}$ , то на уровне значимости  $p$  можно сделать вывод о наличии связи между элементами, а значит все  $k_{i,j} \neq 0$ . В противном случае мы делаем вывод об отсутствии связи  $j \rightarrow i$  между соответствующими элементами и проверяем значимость остальных связей, последовательно исключая из оставшихся связей  $i$ -го элемента по одной. Процедура повторяется, пока все связи не окажутся значимыми. Такой подход позволяет восстановить архитектуру связей, параметры всех элементов и их нелинейные функции.

Если известно, что число связей между элементами ансамбля мало, то для восстановления архитектуры и величины связей предпочтительнее использовать метод последовательного пробного добавления коэффициентов  $k_{i,j}$  в модель (1). Сначала найдем минимум  $L_{i,1}$  функции (8), предположив, что в уравнении (1) отсутствуют все  $k_{i,j}$  (связей нет). Затем будем вводить в (1) по

одному  $k_{i,j}$ , находя минимум  $L_{i,j,2}$  функции (8). Перебрав все  $j \neq i$ , найдем  $L_{1,2} = \min_j L_{i,j,2}$ . Если  $L > L_{1-p}$ , где  $L = L_{i,1}/L_{i,2}$ , а  $F_{v,w}$  построена при  $v = S/2 - 1$ ,  $w = S/2 - 2$ , то введенная связь отлична от нуля на уровне значимости  $p$ . Процедура повторяется, пока очередная добавленная в модель связь не окажется незначимой.

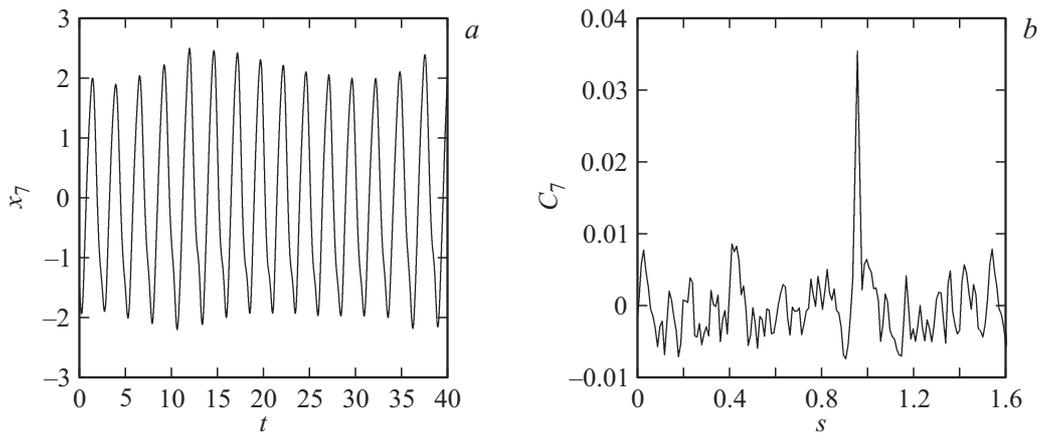
## 2. Применение метода

### 2.1. Восстановление цепочки однонаправленно связанных уравнений Икеды

В качестве первого примера восстановим параметры элементов и архитектуру связей в цепочке (рис. 1, *a*) однонаправленно связанных уравнений Икеды, описываемых уравнением

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) = & -x_i(t) + \mu_i \sin(x_i(t - \tau_i) - x_{0i}) \\ & + k_{i,i-1}(x_{i-1}(t) - x_i(t)). \end{aligned} \quad (10)$$

Число элементов в цепочке  $M = 10$ , и использовано кольцевое граничное условие  $x_1 = x_{M+1}$ . Уравнение Икеды описывает сдвиг  $x$  фазы электрического поля в нелинейной поглощающей среде кольцевого резонатора. Параметр  $\mu$  характеризует интенсивность лазерного излучения, подаваемого на вход резонатора,  $\tau$  — время запаздывания,  $x_0$  — постоянный фазовый сдвиг. Уравнение (10) является частным случаем уравнения (1)



**Рис. 2.** *a* — временной ряд переменной  $x_7(t)$  цепочки (10) в периодическом режиме в присутствии нормального шума с  $\sigma_i^2 = 0.001$ , *b* — взаимная корреляционная функция  $C_7(s)$ ,  $C_{7\max}(s) = C_7(0.94)$ .

с  $\varepsilon_i = 1$ . Пусть замкнутая в кольцо цепочка состоит из неидентичных элементов, параметры которых принимают случайные значения в следующих интервалах:  $\tau_i \in [2, 5]$ ,  $\mu_i \in [15, 25]$ ,  $x_{0i} \in [0, 2\pi]$ ,  $k_{i,i-1} \in [0.1, 0.5]$ , и на каждый элемент действует независимый нормальный шум  $\xi_i(t)$  с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_i^2 = 0.01$ . При этом все элементы колеблются хаотически.

Проиллюстрируем результаты применения предложенной методики восстановления параметров на примере одного из элементов цепочки с параметрами  $\tau_7 = 2.15$ ,  $\mu_7 = 21.67$ ,  $x_{07} = 3.88$ ,  $k_{7,6} = 0.284$ . На рис. 1, *b* приведен фрагмент временного ряда колебаний в этом элементе цепочки. Подсчитав число  $N_7$  одновременных обращений в нуль  $\dot{x}_7(t)$  и  $\dot{x}_7(t - \tau)$  для различных значений  $\tau$ , перебираемых с шагом, равным шагу интегрирования  $h = 0.01$ , построим зависимость  $N_7(\tau)$ , введя нормировку  $N_7$  на общее число экстремумов в ряде (рис. 1, *c*). Для оценки производной по временному ряду мы использовали локальную параболическую аппроксимацию. Абсолютный минимум  $N_7(\tau)$  наблюдается при истинном времени запаздывания  $\tau = \tau_7 = 2.15$ . Для построения графика  $N_7(\tau)$  мы использовали 40 000 точек временного ряда, содержащего около 1600 экстремумов.

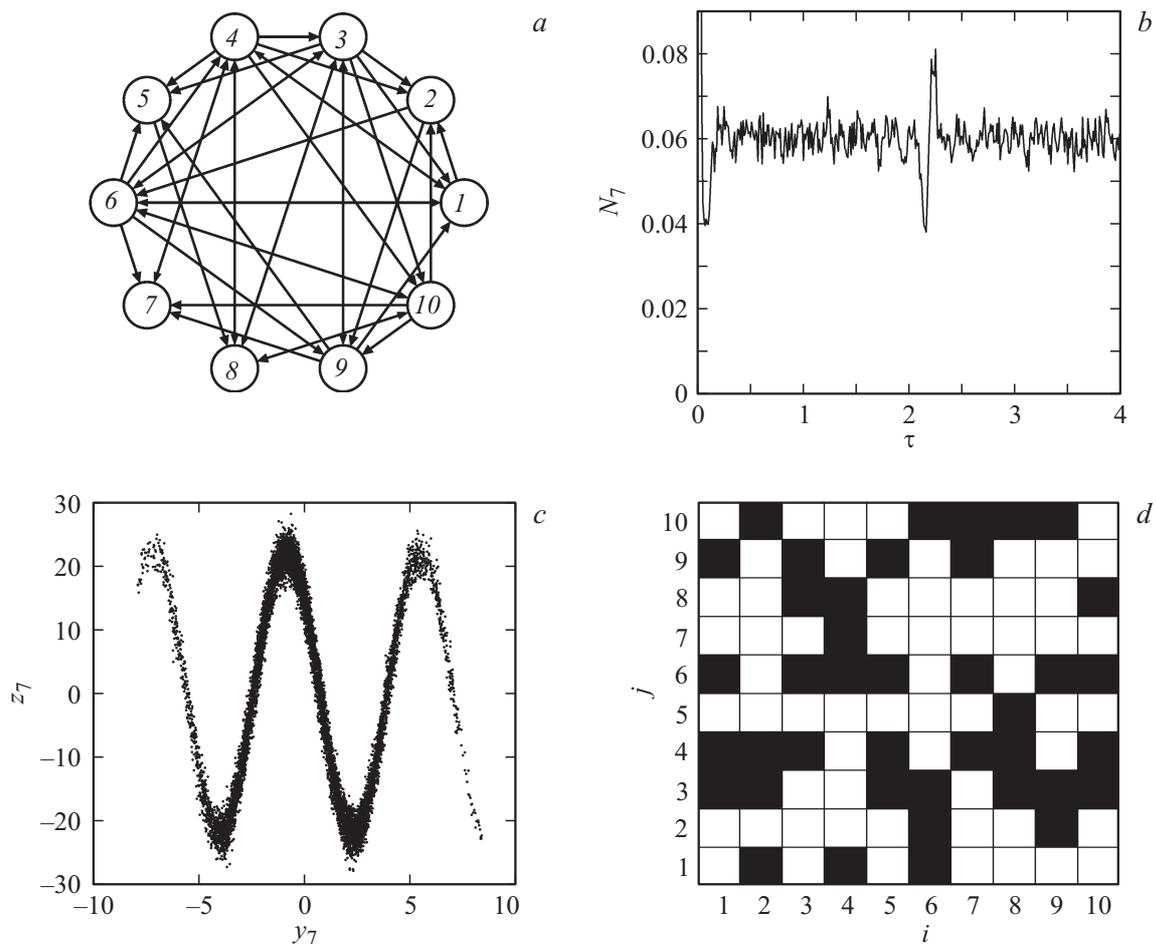
На рис. 1, *d* приведена нелинейная функция  $f_7$ , реконструированная с помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель при  $p = 0.05$ . Функция  $f_7$  построена при восстановленных значениях параметров  $\tau_7' = 2.15$ ,  $k_{7,6}' = 0.276$ . Она достаточно хорошо совпадает с истинной функцией уравнения Икеды. Аппроксимация восстановленной нелинейной функции гармонической функцией позволила нам получить следующую оценку параметров:  $\mu_7' = 21.80$  и  $x_{07}' = 3.97$ , которые находятся как амплитуда и начальная фаза гармонической функции соответственно. Аналогичным образом проводится восстановление параметров и коэффициентов связи остальных элементов цепочки.

Результат реконструкции архитектуры связей в цепочке, полученный с помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель,

приведен на рис. 1, *e*. Клетка с координатами  $(i, j)$  показывает влияние  $j \rightarrow i$ , кроме клеток на диагонали, не несущих никакой информации. На уровне значимости  $p = 0.05$  найдены все 10 связей, ложных связей не обнаружено. Отметим, что для построения рис. 1, *d, e* использованы временные ряды длиной 10 000 точек.

Зададим теперь параметры уравнения (10) таким образом, чтобы все элементы цепочки совершали периодические колебания. Для этого зададим параметры элементов случайным образом в следующих интервалах:  $\tau_i \in [0.5, 1.2]$ ,  $\mu_i \in [4.5, 5.5]$ ,  $x_{0i} \in [0, 2\pi]$ ,  $k_{i,i-1} \in [0.1, 0.5]$ . Подействуем на каждый элемент независимым нормальным шумом с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_i^2 = 0.001$ . На рис. 2, *a* приведен фрагмент временного ряда колебаний в седьмом элементе цепочки, параметры которого:  $\tau_7 = 0.94$ ,  $\mu_7 = 5.17$ ,  $x_{07} = 3.32$ ,  $k_{7,6} = 0.284$ . Поскольку метод оценки времени запаздывания, основанный на статистическом анализе экстремумов временного ряда, не применим к периодическим временным рядам, для определения времени запаздывания  $\tau_7$  подействуем на переменную  $x_7(t)$  слабым внешним сигналом  $y_7(t)$ , представляющим собой прямоугольные импульсы, таким образом, чтобы динамика возбуждаемого элемента описывалась уравнением (6). На рис. 2, *b* построена взаимная корреляционная функция (5) для случая, когда возмущающий импульсный сигнал имеет амплитуду  $A_7 = 0.1$ , период  $T_7 = 3$  и длительность  $D_7 = T_7/2$ . При шаге изменения  $s$ , равном 0.01,  $C_7(s)$  имеет высокий максимум при  $s = 0.94$ , т.е. время запаздывания восстанавливается точно.

С помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель мы получили при  $p = 0.05$  следующую оценку параметров седьмого элемента:  $\mu_7' = 5.21$ ,  $x_{07}' = 3.70$ ,  $k_{7,6}' = 0.303$ . Аналогичным образом проводится восстановление параметров остальных элементов. Результат реконструкции архитектуры связей в цепочке совпадает с результатом, полученным для предыдущего примера (рис. 1, *e*). На уровне значимости  $p = 0.05$  все связи найдены правильно.



**Рис. 3.** *a* — архитектура связей в ансамбле из 10 элементов, *b* — зависимость  $N_7(\tau)$ ,  $N_{7\min}(\tau) = N_7(2.15)$ , *c* — функция  $f_7$ , восстановленная на плоскости  $(y_7, z_7)$ , где  $y_7 = x_7(t - \tau_7)$ ,  $z_7 = \dot{x}_7(t) + x_7(t) - \sum_{j=1(j \neq 7)}^{10} k'_{7,j}(x_j(t) - x_7(t))$ , *d* — диаграмма результата восстановления архитектуры связей.

**2.2. Восстановление ансамбля связанных уравнений Икеды**

Восстановим параметры элементов и архитектуру связей в ансамбле диффузионно связанных уравнений Икеды, описываемых уравнением

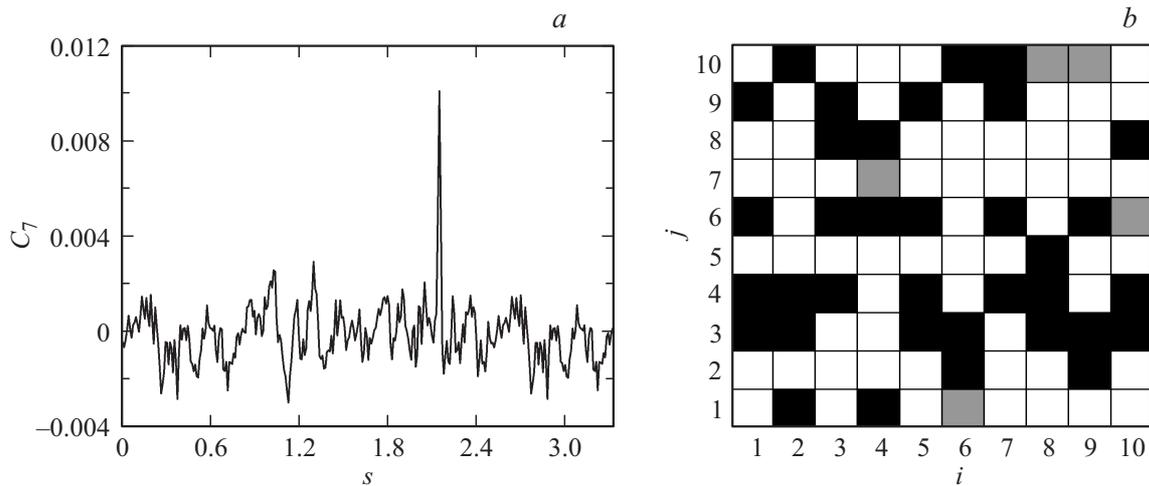
$$\dot{x}_i(t) = -x_i(t) + \mu_i \sin(x_i(t - \tau_i) - x_{0i}) + \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j}(x_j(t) - x_i(t)). \quad (11)$$

На рис. 3, *a* приведена архитектура случайно выбранных связей в ансамбле из 10 элементов. Из 90 возможных связей между элементами ансамбля имеется 40 связей, среди которых есть как однонаправленные, так и взаимные. Параметры неидентичных элементов зададим таким же образом, как в первом рассмотренном примере для цепочки (10). При этом все элементы ансамбля колеблются хаотически. Подействуем на каждый элемент независимым нормальным шумом с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_i^2 = 0.04$ .

Проиллюстрируем результаты восстановления одного из элементов с параметрами  $\tau_7 = 2.15$ ,  $\mu_7 = 21.67$ ,  $x_{07} = 3.88$ ,  $k_{7,4} = 0.445$ ,  $k_{7,6} = 0.172$ ,  $k_{7,9} = 0.311$ ,  $k_{7,10} = 0.435$ ,  $k_{7,j} = 0$ ,  $k = 1, 2, 3, 5, 7, 8$ . На рис. 3, *b* приведена зависимость  $N_7(\tau)$  при шаге изменения  $\tau$ , равном 0.01. Минимум  $N_7(\tau)$  наблюдается при истинном времени запаздывания  $\tau = \tau_7 = 2.15$ .

На рис. 3, *c* приведена нелинейная функция  $f_7$ , реконструированная с помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель при  $p = 0.05$ . Функция  $f_7$  построена при восстановленных значениях параметров  $\tau_7' = 2.15$ ,  $k'_{7,4} = 0.517$ ,  $k'_{7,6} = 0.188$ ,  $k'_{7,9} = 0.355$ ,  $k'_{7,10} = 0.490$ ,  $k'_{7,j} = 0$ ,  $j = 1, 2, 3, 5, 7, 8$ . Из-за погрешности определения коэффициентов связи и более высокого уровня шума качество восстановления  $f_7$  несколько хуже, чем на рис. 1, *d*. Аппроксимация реконструированной функции  $f_7$  гармонической функцией дает оценку параметров:  $\mu_7' = 22.00$ .

Аналогичным образом проводится восстановление параметров и коэффициентов связи остальных элементов.



**Рис. 4.** Случай высокого уровня шума. *a* — взаимная корреляционная функция  $C_7(s)$ ,  $C_{7\max}(s) = C_7(2.15)$ , *b* — диаграмма результата восстановления архитектуры связей. Черным цветом показаны правильно восстановленные связи, белым — правильно диагностированные отсутствующие связи, серым цветом — пропущенные связи.

Результат реконструкции архитектуры связей в ансамбле (11) приведен на рис. 3, *d*. На уровне значимости  $p = 0.05$  все 40 связей определяются правильно при использовании как метода добавления связей, так и метода последовательного пробного исключения коэффициентов связи из модели.

Рассмотрим случай, когда на элементы ансамбля (11) с теми же значениями параметров и той же конфигурацией и величиной связей, что на рис. 3, *a*, действует сильный независимый нормальный шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_i^2 = 0.36$ . При таком большом шуме метод восстановления времени запаздывания, основанный на статистическом анализе экстремумов временного ряда, оказывается неэффективным. Для определения времени запаздывания  $i$ -го элемента подействуем на переменную  $x_i(t)$  слабым прямоугольным импульсным сигналом  $y_i(t)$  таким образом, что динамика возбуждаемого элемента описывается уравнением (6). На рис. 4, *a* построена взаимная корреляционная функция (5) для случая, когда возмущающий импульсный сигнал с амплитудой  $A_7 = 0.15$ , периодом  $T_7 = 5$  и длительностью  $D_7 = T_7/2$  действует на переменную  $x_7(t)$ . При шаге изменения  $s$ , равном 0.01,  $C_7(s)$  имеет выраженный максимум при  $s = \tau_7 = 2.15$ . Несмотря на высокий уровень шума, время запаздывания удается точно восстановить для всех элементов.

Метод добавления связей, так же как и метод исключения связей, дает при  $p = 0.05$  следующую оценку параметров седьмого элемента:  $k'_{7,4} = 0.396$ ,  $k'_{7,6} = 0.142$ ,  $k'_{7,9} = 0.262$ ,  $k'_{7,10} = 0.392$ ,  $k'_{7,j} = 0$ ,  $j = 1, 2, 3, 5, 7, 8$ ,  $\mu'_7 = 21.52$ ,  $x'_{07} = 3.97$ . Истинные значения параметров такие же, как приведенные выше для рис. 3. Результат реконструкции архитектуры связей в ансамбле приведен на рис. 4, *b*. На уровне значимости  $p = 0.05$  из 40 существующих связей мы нашли 35. Из-за высокого уровня шума пропущенными оказались 5 связей. Отметим, что, увеличивая  $p$ , можно уменьшить количество

пропущенных связей, однако при этом повышается вероятность обнаружения ложных связей.

Рассмотрим теперь случай, когда из 90 возможных связей между элементами ансамбля (11) имеется 80 связей. Параметры элементов заданы случайным образом в тех же интервалах, что и в рассмотренном выше примере с 40 связями. На каждый элемент действует независимый нормальный шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_i^2 = 0.01$ .

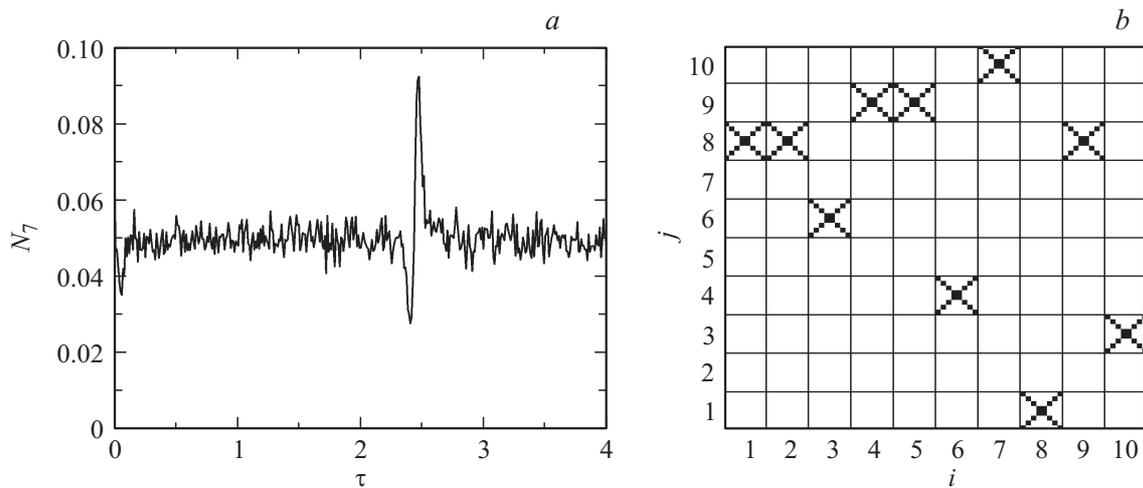
Положение абсолютного минимума зависимостей  $N_i(\tau)$  позволяет точно восстановить истинное время запаздывания для каждого элемента ансамбля. Для примера на рис. 5, *a* приведена зависимость  $N_7(\tau)$ , построенная при шаге изменения  $\tau$ , равном 0.01. Она имеет минимум при  $\tau = \tau_7 = 2.40$ . Результат реконструкции архитектуры связей, полученный с помощью метода последовательного пробного исключения коэффициентов связи из модели, приведен на рис. 5, *b*. Для удобства восприятия мы инвертировали цвета по сравнению с другими диаграммами. На уровне значимости  $p = 0.05$  правильно найдены все 80 связей, ложных связей не обнаружено.

### 2.3. Восстановление ансамбля связанных уравнений Маккея-Гласса

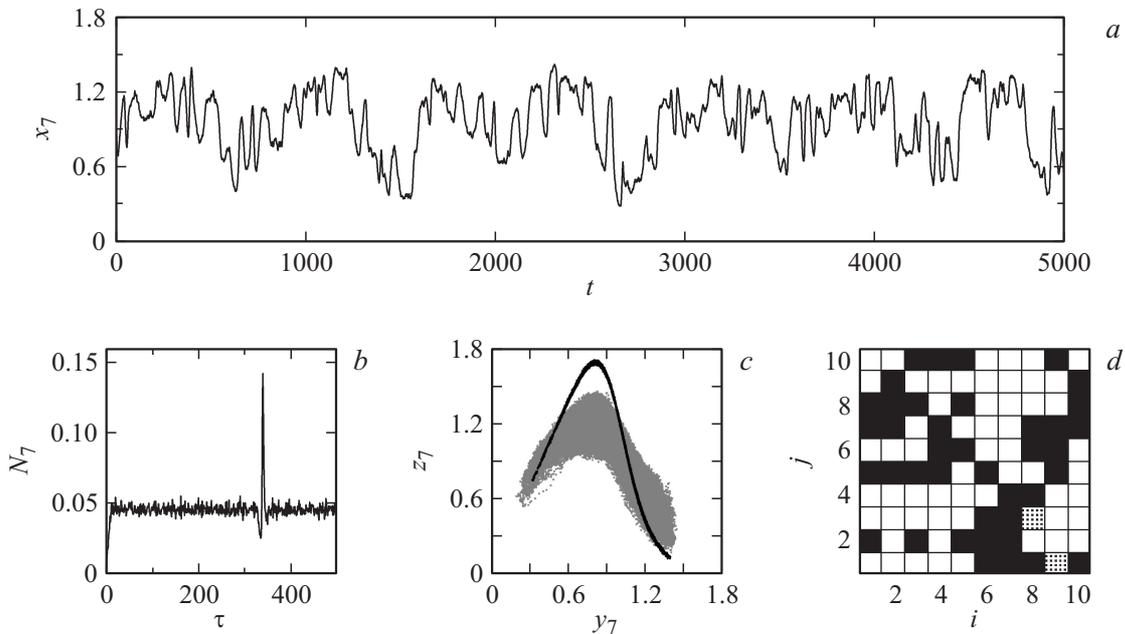
Восстановим параметры элементов и архитектуру связей в ансамбле связанных систем Маккея-Гласса, описываемых уравнением (1) с функцией

$$f_i(x_i(t - \tau_i)) = \frac{a_i x_i(t - \tau_i)}{b_i (1 + x_i^{10}(t - \tau_i))} \quad (12)$$

и  $\varepsilon_i = 1/b_i$ . Уравнение Маккея-Гласса, описывающее процесс выработки организмом красных кровяных клеток, является эталонным уравнением с запаздыванием, широко используемым при численных исследованиях систем с задержкой.



**Рис. 5.** Случай большого числа связей. *a* — зависимость  $N_7(\tau)$ ,  $N_{7\min}(\tau) = N_7(2.40)$ , *b* — диаграмма результата восстановления архитектуры связей. Белым цветом показаны правильно восстановленные связи, крестиком — правильно диагностированные отсутствующие связи.



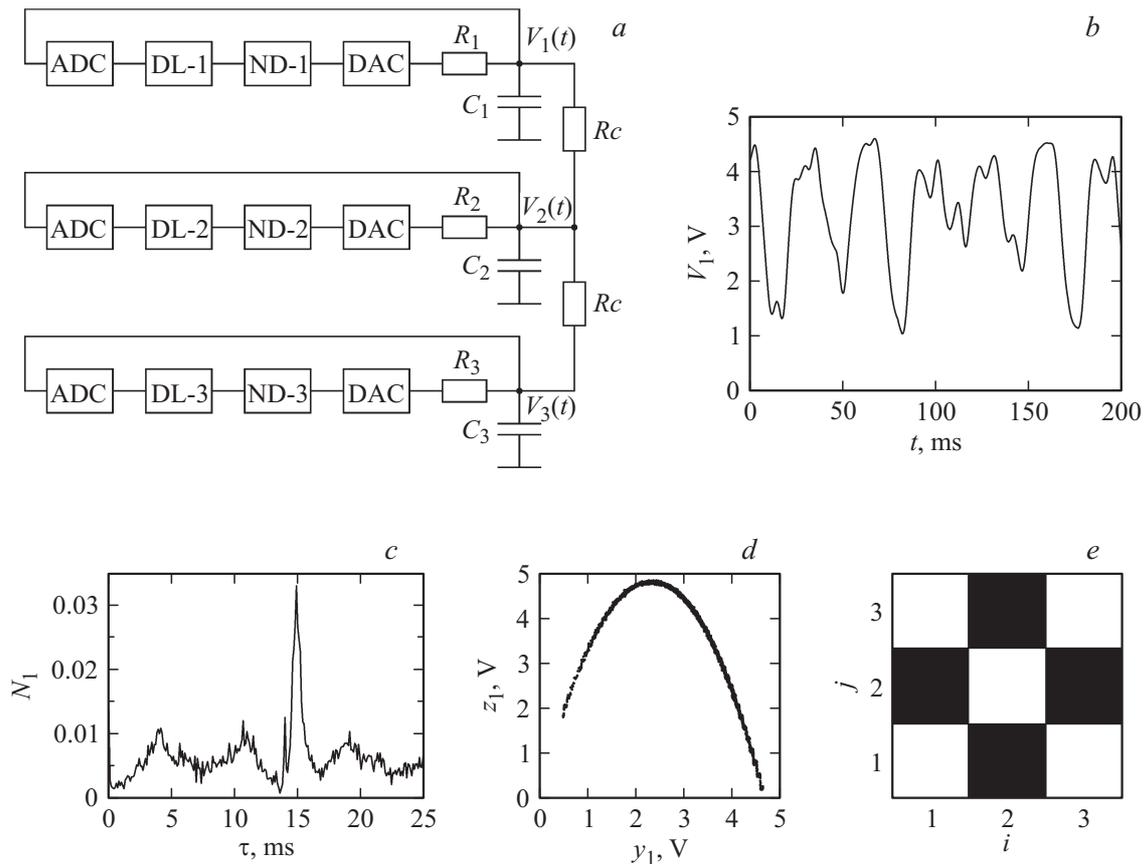
**Рис. 6.** *a* — временной ряд переменной  $x_7(t)$  ансамбля (1) с функцией (12) в присутствии нормального шума с  $\sigma_i^2 = 10^{-4}$ , *b* — зависимость  $N_7(\tau)$ ,  $N_{7\min}(\tau) = N_7(335)$ , *c* — функция  $f_7$ , восстановленная на плоскости  $(y_7, z_7)$ , где  $y_7 = x_7(t - \tau'_7)$ ,  $z_7 = \varepsilon'_7 \dot{x}_7(t) + x_7(t) - \sum_{j=1(j \neq 7)}^{10} k'_{7,j}(x_j(t) - x_7(t))$  в предположении отсутствия связей (серый цвет) и при учете связей (черный цвет), *d* — диаграмма результата восстановления архитектуры связей. Черным цветом показаны правильно восстановленные связи, белым — правильно диагностированные отсутствующие связи, точками — ложные связи.

Пусть ансамбль состоит из неидентичных элементов, параметры которых принимают случайные значения в следующих интервалах:  $\tau_i \in [300, 400]$ ,  $\varepsilon_i \in [8, 12]$ ,  $a_i \in [0.2, 0.25]$ ,  $k_{i,j} \in [0.01, 0.05]$ , и на каждый элемент действует независимый нормальный шум  $\xi_i(t)$  с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_i^2 = 10^{-4}$ . При этом все элементы колеблются хаотически.

На рис. 6, *a* приведен фрагмент временного ряда колебаний в седьмом элементе при  $\tau_7 = 335$ ,  $\varepsilon_7 = 10.2$ ,  $k_{7,1} = 0.011$ ,  $k_{7,2} = 0.046$ ,  $k_{7,3} = 0.043$ ,  $k_{7,4} = 0.016$ ,

$k_{7,j} = 0$ ,  $j = 5, \dots, 10$ . На рис. 6, *b* приведена зависимость  $N_7(\tau)$ , построенная по временному ряду переменной  $x_7(t)$  длиной 40 000 точек, содержащему около 2600 экстремумов. При шаге изменения  $\tau$ , равном 1, минимум  $N_7(\tau)$  наблюдается при истинном времени запаздывания  $\tau = \tau_7 = 335$ .

На рис. 6, *c* серым цветом показана функция  $f_7$ , полученная при реконструкции уравнения (1) в предположении, что все элементы ансамбля не связаны между собой. Эта функция построена при восстановлен-



**Рис. 7.** *a* — блок-схема экспериментальной установки. DL-1, DL-2 и DL-3 — линии задержки генераторов, ND-1, ND-2 и ND-3 — нелинейные элементы генераторов, ADC — аналого-цифровые преобразователи, DAC — цифро-аналоговые преобразователи, *b* — хаотическая временная реализация  $V_1(t)$  первого генератора, *c* — зависимость  $N_1(\tau)$ ,  $N_{7\min}(\tau) = N_1(13.6 \text{ ms})$ , *d* — функция  $f_1$ , восстановленная на плоскости  $(y_1, z_1)$ , где  $y_1 = V_1(t - \tau_1')$ ,  $z_1 = \varepsilon_1' \dot{V}_1(t) + V_1(t) - \sum_{j=2}^3 k'_{1,j}(V_j(t) - V_1(t))$ , *e* — диаграмма результата восстановления архитектуры связей.

ных значениях параметров  $\tau_1' = 335$ ,  $\varepsilon_1' = 8.4$ ,  $k'_{7,j} = 0$ ,  $j = 1, \dots, 10$ ,  $j \neq 7$ . Черным цветом на рис. 6, *c* показана функция  $f_7$ , восстановленная с помощью метода последовательного пробного добавления коэффициентов связи в модель при  $p = 0.05$ . Эта функция построена при восстановленных значениях параметров  $\tau_1' = 335$ ,  $\varepsilon_1' = 10.0$ ,  $k'_{7,1} = 0.012$ ,  $k'_{7,2} = 0.047$ ,  $k'_{7,3} = 0.044$ ,  $k'_{7,4} = 0.017$ ,  $k'_{7,j} = 0$ ,  $j = 5, \dots, 10$ . Учет архитектуры связей существенно улучшает качество восстановления нелинейной функции и точность оценки параметров модели. Погрешности их восстановления вызваны преимущественно присутствием шума. Как и в остальных рассмотренных примерах, для восстановления параметров использованы временные ряды длиной 10 000 точек.

Аналогичным образом проводится восстановление параметров и коэффициентов связи остальных элементов ансамбля. Результат реконструкции архитектуры связей в ансамбле, полученный с помощью метода добавления связей, приведен на рис. 6, *d*. На уровне значимости  $p = 0.05$  мы правильно нашли все 40 имеющихся связей. Дополнительно метод показал наличие еще двух связей,

которые являются ложными. Однако доля этих ложных связей в общем количестве связей не превышает  $p$ . Отметим, что, уменьшая  $p$ , можно избавиться от ложных связей, однако при этом повышается вероятность, что некоторые связи окажутся пропущенными. При восстановлении архитектуры связей по тем же временным рядам с помощью метода исключения связей мы получили большее количество ложных связей при том же  $p$ .

#### 2.4. Восстановление ансамбля связанных экспериментальных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью

Мы применили метод к экспериментальным временным рядам трех связанных неидентичных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью. Блок-схема экспериментальной установки приведена на рис. 7, *a*. Она состоит из трех связанных между собой кольцевых генераторов, каждый из которых состоит из линии задержки, нелинейного элемента и низкочастотного RC-фильтра первого порядка. Нелинейные элемен-

ты и линии задержки выполнены на микроконтроллерах, а фильтры на аналоговых элементах. Аналоговые и цифровые элементы схемы сопрягались с помощью аналого-цифровых и цифро-аналоговых преобразователей. Связь генераторов осуществляется с помощью резисторов  $R_c$ . Модельное уравнение для  $i$ -го элемента ансамбля имеет вид

$$R_i C_i \dot{V}_i(t) = -V_i(t) + f_i(V_i(t - \tau_i)) + \sum_{j=1(j \neq i)}^M k_{i,j}(V_j(t) - V_i(t)), \quad (13)$$

где  $V_i(t)$  и  $V_i(t - \tau_i)$  — напряжения соответственно на входе и выходе линии задержки  $i$ -го элемента,  $\tau_i$  — время запаздывания,  $R_i$  и  $C_i$  — сопротивление и емкость элементов фильтра,  $f_i$  — передаточная характеристика нелинейного элемента. Уравнение (13) имеет вид (1) с  $\varepsilon_i = R_i C_i$ .

Все три нелинейных элемента имели квадратичную передаточную характеристику  $f_i$ . Мы записывали хаотические сигналы  $V_i(t)$  с помощью трехканального аналого-цифрового преобразователя с частотой выборки  $f_s = 10$  kHz. На рис. 7, *b* приведен фрагмент временной реализации сигнала  $V_1(t)$  в первом генераторе, имеющем параметры  $\tau_1 = 13.6$  ms,  $\varepsilon_1 = 2.88$  ms,  $k_{1,2} = R_1/R_c = 0.1$ ,  $k_{1,3} = 0$ .

При шаге изменения  $\tau$ , равном периоду выборки точек  $T_s = 0.1$  ms, абсолютный минимум зависимости  $N_1(\tau)$  наблюдается при  $\tau = 13.6$  ms (рис. 7, *c*). На рис. 7, *d* приведена функция  $f_1$ , восстановленная по экспериментальным временным рядам с помощью метода добавления коэффициентов связи в модель при  $p = 0.05$ . Эта функция построена при восстановленных значениях параметров  $\tau'_1 = 13.6$  ms,  $\varepsilon'_1 = 2.74$  ms,  $k'_{1,2} = 0.098$ ,  $k'_{1,3} = 0$ . Она достаточно хорошо совпадает с истинной передаточной характеристикой  $f_1$  нелинейного элемента первого генератора. Такие же результаты дает метод исключения связей.

Аналогичным образом мы восстановили характеристики остальных элементов. Результат реконструкции архитектуры связей в ансамбле приведен на рис. 7, *e*. На уровне значимости  $p = 0.05$  все связи найдены правильно.

## Заключение

Предложена методика, позволяющая определить значения параметров элементов и архитектуру связей в ансамблях взаимодействующих систем с задержкой, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием, по временным рядам их колебаний. Процедура реконструкции разделена на два этапа. На первом этапе мы восстанавливаем время запаздывания каждого элемента ансамбля, используя либо метод, основанный на статистическом анализе временных интервалов между экстремумами временного ряда, либо метод, основанный

на возмущении системы слабым импульсным сигналом и анализе отклика. Первый из этих методов применим к хаотическим временным рядам при невысоких уровнях шума. Второй может применяться к системам, совершающим как хаотические колебания (в том числе в присутствии больших шумов), так и периодические колебания, но требует активного воздействия на систему.

На втором этапе мы восстанавливаем все остальные параметры, нелинейные функции и архитектуру связей, используя метод, основанный на реконструкции модельных уравнений элементов ансамбля и диагностике значимости связей с помощью последовательного пробного исключения или добавления коэффициентов связи в модель. Метод пробного добавления коэффициентов связи в модель оказывается более эффективным при реконструкции ансамблей с малым числом связей. Метод пробного исключения коэффициентов связи из модели, напротив, наиболее эффективен при реконструкции ансамблей, в которых число имеющихся связей во много раз больше числа отсутствующих связей. В случаях, когда число имеющихся и отсутствующих связей сопоставимо, целесообразно использовать метод добавления связей, поскольку он требует меньше вычислительных затрат и обеспечивает такую же или более высокую точность, чем метод исключения связей.

Предложенный подход можно применять к ансамблям, состоящим из неидентичных систем с запаздыванием с произвольным числом однонаправленных и взаимных связей между ними. Эффективность метода продемонстрирована на примере хаотических и периодических временных рядов ансамблей диффузионно связанных модельных систем с запаздыванием, в том числе при достаточно высоких уровнях шума, а также на примере хаотических экспериментальных временных рядов резистивно связанных радиотехнических генераторов с запаздывающей обратной связью.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 13-02-00227.

## Список литературы

- [1] Krishna B.M., John M.P., Nandakumaran V.M. // Phys. Lett. A. 2010. Vol. 374. P. 1835–1842.
- [2] Mincheva M., Roussel M.R. // J. Math. Biol. 2007. Vol. 55. P. 87–104.
- [3] Hegger R., Bünner M.J., Kantz H et al. // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. P. 558–561.
- [4] Пономаренко В.И., Прохоров М.Д., Караваев А.С., Безручко Б.П. // ЖЭТФ. 2005. Т. 127. Вып. 3. С. 515–527.
- [5] Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I. // Phys. Rev. E. 2009. Vol. 80. P. 066 206.
- [6] Zunino L., Soriano M.C., Fischer I. et al. // Phys. Rev. E. 2010. Vol. 82. P. 046 212.
- [7] Dai C., Chen W., Li L. et al. // Phys. Rev. E. 2011. Vol. 83. P. 036 203.
- [8] Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I., Khorev V.S. // Phys. Lett. A. 2013. Vol. 377. P. 3106–3111.

- [9] *Prokhorov M.D., Ponomarenko V.I.* // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 72. P. 016 210.
- [10] *Kamiński M., Ding M., Truccolo W.A.* et al. // Biol. Cybern. 2001. Vol. 85. P. 145–157.
- [11] *Timme M.* // Phys. Rev. Lett. 2007. Vol. 98. P. 224 101.
- [12] *Bezruchko B.P., Smirnov D.A.* Extracting knowledge from time series: An introduction to nonlinear empirical modeling. Berlin: Springer, 2010. 405 p.
- [13] *Liu H., Lu J.-A., Lu J.* et al. // Automatica. 2009. Vol. 45. P. 1799–1807.
- [14] *Xu Y., Zhou W., Fangm J.* // Nonlinear Dyn. 2012. Vol. 68. P. 195–205.
- [15] *Wu X., Sun Z., Liang F.* et al. // Nonlinear Dyn. 2013. Vol. 73. P. 1753–1768.
- [16] *Nelder J.A., Mead R.* // Computer J. 1965. Vol. 7. P. 308–313.
- [17] *Сысоев И.В., Пономаренко В.И., Прохоров М.Д.* // Письма в ЖТФ. 2012. Т. 38. Вып. 15. С. 1–9.
- [18] *Kendall M., Stuart A.* The Advanced Theory of Statistics. NY: Mac Millan, 1979. 748 p.
- [19] *Johnson N.L., Kotz S., Balakrishnan N.* Continuous Univariate Distributions. NY: Wiley, 1995. Vol. 2. 752 p.