01

Преобразование Габора и непрерывное вейвлетное преобразование для модельных импульсных сигналов

© Д.А. Андреев, С.В. Божокин, И.Д. Веневцев, К.Т. Жунусов

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: bsvjob@mail.ru

(Поступило в Редакцию 10 января 2014 г.)

Рассмотрена модель импульсного сигнала, представляющего собой суперпозицию элементарных нестационарных сигналов. Подобраны параметры такой суперпозиции, при которой амплитуда сигнала $A(t)$ резко изменяется во времени. Для такого сигнала проанализированы аналитические выражения для преобразования Габора (GT — Gabor Transform) и непрерывного вейвлетного преобразования (CWT — Continuous Wavelet Transform), использующего материнский вейвлет Морле. Предложен критерий согласования поведения GT и CWT с амплитудой сигнала $A(t)$. Показаны преимущества CWT, адаптивно выбирающего размер окна, перед GT, явный вид которого зависит от размера окна. Предлагаемый метод может быть применен для анализа многих переходных этапов нестационарных сигналов в различных областях физики.

Введение

Огромное количество сигналов $Z(t)$, зависящих от времени t, встречающихся в различных областях науки: астрофизика, электродинамика, гидродинамика, физика твердого тела и плазмы, радиофизика, медицина являются нестационарными [1–6]. Это означает, что спектральные и статистические свойства таких сигналов изменяются со временем. Традиционный метод Фурье (FT — Fourier Transform), вычисляющий фурье-компоненту таких сигналов $Z(\omega)$, зависящую от круговой частоты ω, имеет существенный недостаток. Преобразование Фурье позволяет обнаружить факт присутствия в сигнале $Z(t)$ различных гармоник, но не дает возможность проследить эволюцию появления и исчезновения во времени его локальных частот. Если возникает задача нахождения изменений по времени спектрального состава сигнала $Z(t)$, то вместо интегрирования по всему временно́му интервалу $-\infty < t < \infty$ рассматривают некоторый локальный промежуток $[t - W/2,\ t + W/2]$. Этот промежуток центрирован по времени в момент t и имеет продолжительность W. Такое преобразование носит название оконного преобразования Фурье (STFT — Short time Fourier Transform). Для окна, имеющего гауссовскую форму, такое оконное преобразование Фурье было разработано Габором (GT — Gabor Transform) [7]. Недостатком преобразования GT является тот факт, что его вид становится зависимым от размера окна. Выбор оптимальной продолжительности W требует знания характерных масштабов времени, в которых происходят перестройки спектральных свойств сигнала. Выбрав окно с большой шириной по времени W, можно получить хорошее разрешение по частоте, но плохое разрешение по времени. Слишком широкое окно будет полезно для обнаружения низкочастотных компонент сигнала, но его ширина будет избыточной для обнаружения гармоник с высокой частотой.

Новым подходом при изучении нестационарных сигналов является теория вейвлетов, которая нашла широкое применение во многих областях науки [1–6]. Большое развитие получило дискретное вейвлетное преобразование (DWT — discrete wavelet transform), которое использует хорошо разработанные численные алгоритмы. Другим направлением теории вейвлетов является непрерывное вейвлет преобразование (CWT — continuous wavelet transform) [8], которое позволяет для многих нестационарных сигналов $Z(t)$ получать аналитические выражения, описывающие изменение его спектральных свойств со временем [9,10]. Явный вид преобразования CWT зависит от выбора материнского вейвлета, который играет роль адаптивного окна и обеспечивает определенное разрешение как по времени, так и по частоте. Это позволяет автоматически найти изменения частотных свойств $Z(t)$, которые могут то возникать, то исчезать в определенные моменты времени t. Окно, используемое при вычислении CWT, имеет бо́льшую продолжительность при изучении сигналов, имеющих низкочастотные компоненты с малыми частотами ν. Если в сигналах присутствуют и высокочастотные компоненты, частоты которых ν достаточно велики, то в этом случае окно будет иметь малую продолжительность по времени. Заметим, что использование CWT, в отличие от DWT, позволяет рассматривать любые непрерывные сдвиги центра материнского вейвлета как по времени t, так и по частоте ν.

В работах [11–13] методы GT и CWT сравниваются для нахождения оптимальной диагностики вызванных потенциалов, возникающих в электроэнцефалограмме мозга, и автоматическом анализе скачков напряжения в электрических сетях. Показано, что ширина окна при использовании GT является критическим параметром для анализа частотно-временно́й зависимости сигнала. Рекомендуется использовать широкое временно́е окно, чтобы обнаружить медленные изменения, и более узкое окно по времени, чтобы обнаружить быстрые изменения. Преимущество использования CWT перед традиционным методом STFT для сейсмологических измерений продемонстрировано в работах [14,15]. Это преимущество становится явным, если исследуемый сигнал имеет различные участки, каждый из которых характеризуется своей продолжительностью и собственным диапазоном частот. Показано, что для сигнала, спектральные и временные свойства которого достаточно динамично изменяются во времени, выбор единого постоянного окна для STFT оказывается сложной задачей и не позволяет правильно осуществлять диагностику такого сигнала.

Методы CWT и STFT были использованы для изучения изменяющихся спектральных свойств сигналов допплеровской диагностики сосудов [16], однако для таких сигналов заметного качественного преимущества в использовании методов CWT перед STFT обнаружено не было. В работе [17] изучались сигналы дыхательной синусовой аритмии, связанной с изменением мгновенной частоты сердечных ударов во время вдоха и выдоха. Показано, что для таких сигналов метод CWT, использующий адаптивное окно, имеет преимущества перед STFT, и позволяет надежно фиксировать как низкие частоты, связанные с дыханием, так и высокие частоты, для которых метод STFT должен использовать окна небольшой длительности. В работе [18] обсуждается использование различных частотно-временных методов регистрации судорожных явлений в мышцах. Исследование показало, что методы CWT дают более адекватную картину сигналов, позволяющую обнаруживать ранние предвестники таких приступов.

К сожалению, огромное количество работ, посвященных изучению свойств нестационарных сигналов $Z(t)$, выполненных как с помощью GT, так и помощью CWT, являются численными [11–18]. Получение вида нестационарных сигналов, которые допускают аналитическое выражение как для GT, так и для CWT, является важной задачей, так как позволяет тестировать многие численные алгоритмы для сигналов большой длительности. Кроме того, имея аналитическое выражение для GT и CWT, можно найти необходимые критерии разрешения сигнала как по частоте, так и по времени, а также определить — какой размер окна W будет наиболее оптимальным для преобразования GT.

Целью настоящей работы является разработка математической модели импульсных сигналов, которые осциллируют во времени с некоторой частотой, причем их амплитуда $A(t)$ быстро изменяется во времени. Аналитические выражения как для GT, так и для CWT, полученные в работах [9–10], применены для анализа таких сигналов. Сформулированы количественные критерии точности воспроизведения амплитуды сигнала $A(t)$ с помощью преобразований GT и CWT и обсуждаются их недостатки и преимущества.

1. Модель нестационарных сигналов

Рассмотрим импульсный сигнал $Z(t)$, который представляет собой суперпозицию N простейших нестационарных сигналов, центрированных в точках $t = t_L$, каждый из которых характеризуется системой параметров L:

$$Z(t) = \sum_{L=0}^{N-1} z_L(t - t_L). \tag{1}$$

Простейший сигнал $z_L(t - t_L)$, представляющий собой произведение огибающей гауссовой формы на осциллирующую функцию [9], равен

$$z_L(t - t_L) = \frac{b_L}{2\tau_L\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{(t - t_L)^2}{4\tau_L^2}\right) \times \cos\bigl(2\pi f_L(t - t_L) + \alpha_L\bigr). \tag{2}$$

Пять параметров L, характеризующих сигнал $z_L(t - t_L)$, имеют вид

$$L = (b_L; f_L; t_L; \tau_L; \alpha_L), \tag{3}$$

где f_L — частота колебаний (Hz), t_L — центр локализации сигнала во времени в секундах (s), τ_L — характерный размер локализации сигнала по времени (s), α_L — начальная фаза в радианах. Если сигнал $Z(t)$ измеряется в вольтах (V), то размерность коэффициентов суперпозиции b_L представляет собой произведение $(V) \cdot (s)$. Предположим, что в сумме (1) частоты всех простейших элементарных сигналов одинаковы $f_L = f_0$, а времена t_L и фазы α_L при $L > 0$ связаны с параметрами t_0 и α_0 соотношением

$$2\pi f_0(t_0 - t_L) + \alpha_L - \alpha_0 = 2\pi n, \tag{4}$$

где n — представляет собой целое число $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \ldots$. Это означает, что суммарный сигнал $Z(t)$ можно представить в виде

$$Z(t) = B(t)\cos[2\pi f_0(t - t_0) + \alpha_0]. \tag{5}$$

Величина $B(t)$ представляет собой сумму

$$B(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{L=0}^{N-1} b_L \exp\left[-\frac{(t - t_L)^2}{4\tau_L^2}\right]. \tag{6}$$

Рассмотрим модель сигналов (6), для которой коэффициенты суперпозиции b_L могут иметь разные знаки, поэтому функция $B(t)$ является знакопеременной. Введем понятие положительной амплитуды сигнала

$$A(t) = |B(t)|. \tag{7}$$

В качестве примера рассмотрим сигнал $Z(t)$, который представляет собой сумму $Z(t)$ (1) двух простейших нестационарных сигналов $z_L(t - t_L)$ и $z_K(t - t_K)$ с параметрами $L = (13, 2.5, 10, 2, 0)$ и $K = (-10, 2.5, 13, 0.5, \pi)$. Частоты сигналов $z_L(t - t_L)$

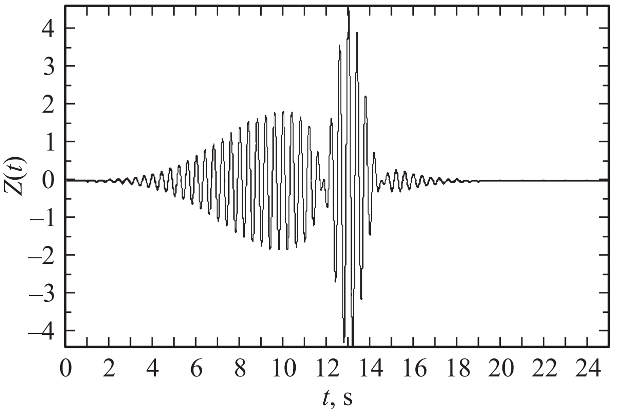

Рис. 1. Зависимость сигнала $Z(t)$ (1), представляющего собой суперпозицию $Z(t)$ двух простейших нестационарных сигналов $z_L(t-t_L)$ и $z_K(t-t_K)$ с параметрами $L=(13, 2.5, 10, 2, 0)$ и $K=(-10, 2.5, 13, 0.5, \pi)$, от времени t, s.

и $z_K(t-t_K)$ одинаковы $f_0 = 2.5\,\mathrm{Hz}$, а параметры времен t_K и t_L и фаз α_K, α_L удовлетворяют соотношению (4).

Предложенная модель сигнала с быстроизменяющейся амплитудой представлена на рис. 1. Интересно заметить, что в сигнале после узкого гауссовского пика, имеющего характерное значение $\tau_K = 0.5\,\mathrm{s}$, центрированного в точке $t_K = 13\,\mathrm{s}$, появляется „остаток“ широкого гауссовского пика $\tau_L = 2\,\mathrm{s}$, центрированного в более ранний момент времени в точке $t_L = 10\,\mathrm{s}$.

2. Преобразование Габора (GT)

Целью настоящей работы будет изучение возможности с помощью преобразования GT, характеризующегося определенным значением продолжительности окна W, восстановить зависимость от времени амплитуды сигнала $A(t)$. В преобразовании GT используются функции $\chi_W(\nu, t)$, представляющие собой произведение колебания $\exp(-i2\pi\nu t)$ с частотой ν на вещественную функцию гауссовского окна $R_W(t)$, имеющего единичную норму

$$\chi_W(\nu, t) = R_W(t)\exp(-i2\pi\nu t), \tag{8}$$

$$R_W(t) = \frac{1}{\sqrt{W\sqrt{2\pi}}}\exp\left(-\frac{t^2}{4W^2}\right). \tag{9}$$

Характерная длительность гауссовского окна $R_W(t)$ по времени t равняется $\Delta_t = W$, а протяженность его частотного спектра $R(\omega)$ равняется $\Delta_\omega = 1/(2W)$ [2,5]. Преобразование GT $g_W(\nu, t)$ для сигнала $Z(t)$ является оконным преобразованием Фурье с гауссовским окном [1–5,9]

$$g_W(\nu, t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} Z(t')\chi_W^*(\nu, t'-t)dt' \tag{10}$$

и представляет собой свертку сигнала $Z(t)$ с комплексно сопряженной функцией $\chi_W^*(\nu, t)$. Центр окна находится в точке $t = t'$, а размер окна — порядка W. Передвигая центр окна t вдоль временно́й оси t', причем $t - W < t' < t + W$, мы можем проследить за изменением частотного состава сигнала $Z(t')$ в этом окне. Для GT можно получить аналог равенства Парсеваля, и формулу обратного преобразования, позволяющего по заданным функциям $\chi_W^*(\nu, t)$ и $g_W(\nu, t)$ восстановить сигнал $Z(t)$ [4]. Аналитическое выражение $g_W^{(L)}(\nu, t)$ для элементарного нестационарного сигнала $z_L(t-t_L)$ (2) получено в работе [9]. Элементарный принцип суперпозиции позволяет получить аналитическое выражение $g_W(\nu, t)$ для сигнала (5), (6) с быстроизменяющейся по времени амплитудой $A(t)$.

Основным недостатком преобразования GT является зависимость $g_W(\nu, t)$ от ширины окна W, причем выбор величины W для произвольного нестационарного сигнала $Z(t)$, частоты которого динамично изменяются во времени, представляет собой сложную задачу. Пусть сигнал $Z(t)$ (рис. 1) имеет общую частоту $f_0 = 2.5\,\mathrm{Hz}$ и представляет собой суперпозицию двух элементарных нестационарных сигналов (1–6) с параметрами $L = (13, 2.5, 10, 2, 0)$ и $K = (-10, 2.5, 13, 0.5, \pi)$. Модуль преобразования Габора $|g_W(\nu, t)|$, вычисленный для окна с определенной продолжительностью $W = 0.1\,\mathrm{s}$, представлен на рис. 2. Видно, что для такого окна величина $|g_W(\nu, t)|$ имеет очень широкое распределение по частотам ν.

В работе [9] показано, что если строить преобразование $|g_W(\nu, t)|$ для больших значений окна $W \gg \max\{\tau_L; \tau_K\}$, то в этом случае полуширина пика по оси частот будет очень узкой $\Delta_\nu = 1/(4\pi\tau_L)$, а полуширина пика по оси времени $\Delta_t = W$ будет очень широкой. Это обстоятельство не позволит определить поведение быстроизменяющейся по времени амплитуды сигнала $A(t)$ по известному преобразованию GT.

Единственной возможностью восстановить правильное поведение $A(t)$ является построение GT в случае $W \ll \min\{\tau_L; \tau_K\}$. Критерии, которые помогут выбрать наиболее оптимальный размер окна W для определения зависимости $A(t)$ с помощью поведения $|g_W(\nu, t)|$ в случае $W \ll \min\{\tau_L; \tau_K\}$ будут приведены в разд. 4 настоящей работы.

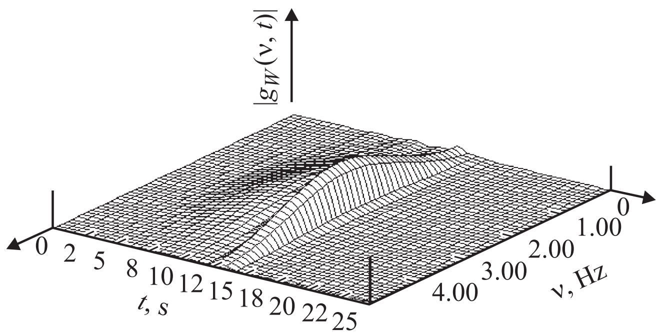

Рис. 2. Модуль GT $|g_W(\nu, t)|$, построенный для сигнала $Z(t)$ (рис. 1), в зависимости от частоты ν, Hz и времени t, s для ширины окна $W = 0.1\,\mathrm{s}$.

3. Непрерывное вейвлетное преобразование (CWT)

Непрерывное вейвлет-преобразование $V(\nu, t)$ (CWT)

$$V(\nu, t) = \nu \int_{-\infty}^{\infty} Z(t')\psi^*(\nu(t'-t))dt' \qquad (11)$$

отображает сигнал $Z(t)$ на плоскость непрерывно изменяющихся аргументов — частоты ν и времени t. Знак * означает комплексное сопряжение. Функция $\psi(x)$, представляет собой материнский вейвлет, локализованный вблизи точки $x = 0$, имеющий нулевое среднее значение и обладающий единичной нормой. Этими свойствами обладает вейвлет Морле [8]

$$\psi(x) = D \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(\exp(-i\Omega_0 x) - \exp\left(-\frac{\Omega_0^2}{2}\right)\right), \qquad (12)$$

где параметр $\Omega_0 = 2\pi$, а значение нормировочной постоянной D приведено в работах [9,10]. Для вейвлета Морле $\psi(x)$ (11) протяженность по безразмерной переменной x равна $\Delta_x \approx 1/\sqrt{2}$, а протяженность в пространстве безразмерных частот Ω равняется $\Delta_\Omega \approx 1/\sqrt{2}$. Следовательно, вейвлет Морле одинаково хорошо подходит для анализа как временны́х, так и частотных особенностей исследуемого сигнала. Это является основанием выбора именно этого материнского вейвлета. Вейвлет в выражении для CWT (11) играет роль адаптивного окна протяженностью $t - \Delta_x/\nu < t' < t + \Delta_x/\nu$, ширина которого велика для малых частот ν и мала для больших частот.

Основной вклад в интеграл $V(\nu, t)$ (11) вносят составляющие сигнала $Z(t')$, которые похожи на вейвлет, центрированный в точке $t = t'$ и обладающий частотой ν. Исследование спектральных свойств сигнала выполняется с помощью анализа динамики положения максимумов (хребтов) поверхности $|V(\nu, t)|^2$. Изображение таких хребтов называют скелетоном [3]. В работе [9] показано, что для гармонического сигнала $Z(t) = \cos(2\pi f_0 t)$, где f_0 — частота в Hz, максимум величины $|V(\nu, t)|^2$ наблюдается при $\nu = f_0$. Это определяет выбор CWT в виде (11) и означает, что величина $P(\nu, t) = |V(\nu, t)|^2$ определяет мгновенный спектр мощности сигнала, показывающий динамику изменения во времени его спектральных свойств.

В работах [1–6,9] приведены аналог равенства Парсеваля для вейвлетов, а также формула обращения, позволяющая восстановить сигнал $Z(t)$ по его CWT $V(\nu, t)$. Аналитическое выражение $V^{(L)}(\nu, t)$ для элементарного нестационарного сигнала $z_L(t - t_L)$ (2) получено в работе [9], поэтому выражение $V(\nu, t)$ для сложного сигнала (5) (рис. 1) легко найти. На рис. 3 построено CWT $|V(\nu, t)|$ для сигнала $Z(t)$ (5) (рис. 1). Заметим, что для CWT размер окна подбирается автоматически в зависимости от диапазона исследуемых частот, и для любого сигнала $Z(t)$ получается единственная функция $|V(\nu, t)|$. Представленная зависимость CWT $|V(\nu, t)|$

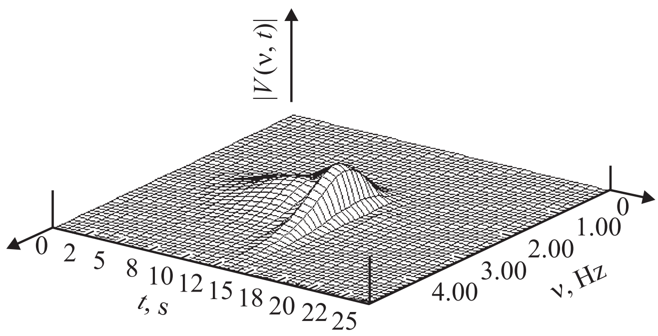

Рис. 3. Модуль преобразования CWT $|V(\nu, t)|$, построенный для сигнала $Z(t)$ (рис. 1), в зависимости от частоты ν, Hz и времени t, s.

дает удовлетворительное согласие частотно-временно́й динамики изменения сигнала (рис. 1) как по частоте, так и по времени.

4. Сравнение GT и CWT с поведением амплитуды сигнала со временем

Для сравнения поведения быстроизменяющейся амплитуды сигнала $A(t)$ с преобразованием GT рассмотрим значения модуля $|g_W(\nu, t)|$ (10) при фиксированном значении частоты $\nu = f_0$. Количественной мерой расхождения кривых $A(t)$ и модуля преобразования GT $|g_W(f_0, t)|$ является коэффициент корреляции Пирсона $r_{\text{GT}}(W)$, который зависит от размера окна W

$$r_{\text{GT}}(W) = \frac{\langle A(t)|g_W(f_0, t)|\rangle - \langle A(t)\rangle\langle|g_W(f_0, t)|\rangle}{\sqrt{\begin{array}{l}\left[\langle A^2(t)\rangle - \langle A(t)\rangle^2\right] \times \\ \times \left[\langle|g_W(f_0, t)|^2\rangle - \langle|g_W(f_0, t)|\rangle^2\right]\end{array}}}. \qquad (13)$$

Символ $\langle\ldots\rangle$ в выражении (13) означает усреднение по всему времени наблюдения. На рис. 4 построена зависимость коэффициента корреляции Пирсона $r_{\text{GT}}(W)$

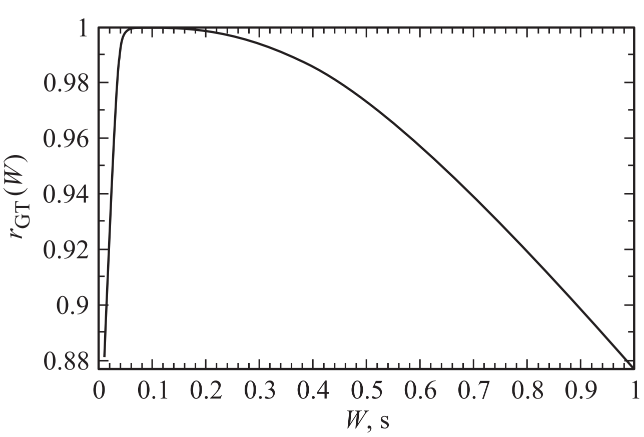

Рис. 4. Зависимость коэффициента корреляции Пирсона $r_{\text{GT}}(W)$ (13) между амплитудой сигнала $A(t)$ (7) и модулем преобразования GT $|g_W(f_0, t)|$ (10) от размера окна W, s.

от размера окна W преобразования GT. В случае $W \gg \max\{\tau_L; \tau_K\}$ при увеличении W величина $r_{\mathrm{GT}}(W)$ уменьшается, и амплитуда сигнала с быстроизменяющейся амплитудой $A(t)$ воспроизводится с помощью GT плохо. Уменьшая размер W, мы увеличиваем коэффициент $r_{\mathrm{GT}}(W)$, причем восстановление $A(t)$ с помощью анализа функции $|g_W(f_0, t)|$ возможно только в случае $W \ll \min\{\tau_L, \tau_K\}$. Максимальное значение $r_{\mathrm{GT}}(\max) = 0.9996$ достигается при $W = 0.0724$.

Однако для такого малого окна W функция $g_W(\nu, t)$ имеет широкое распределение по частотам ν, так как выбор размера окна ограничен неравенством $1/f_0 < W \ll \tau_L$ (рис. 2). Слишком малое окно W не позволяет правильно оценить частотный спектр сигнала $Z(t)$ с фиксированной частотой f_0. При дальнейшем уменьшении размера окна $W < 0.0724$ также происходит уменьшение $r_{\mathrm{GT}}(W)$, связанное с тем, что окно начинает реагировать на пики синусоидальных колебаний сигнала $Z(t)$.

Для сравнения поведения амплитуды сигнала $A(t)$ с преобразованием CWT рассмотрим значения модуля $|V(\nu, t)|$ (10) при фиксированном значении частоты $\nu = f_0$ и введем коэффициент корреляции Пирсона r_{CWT}. Этот коэффициент корреляции вводится по аналогии с формулой (13), если функцию $|g_W(f_0, t)|$ заменить на $|V(f_0, t)|$. В отличие от преобразования GT, вид которого зависит от размера окна W, в преобразовании CWT размер окна определятся лишь изучаемой частотой $\nu = f_0$. В этом случае мы имеем единственное значение $r_{\mathrm{CWT}} = 0.994$, описывающее корреляцию быстроизменяющейся амплитуды сигнала с функцией $|V(f_0, t)|$.

На рис. 5 для сигнала $Z(t)$ (рис. 1) построена зависимость амплитуды от времени $A(t)$, нормированной на свое максимальное значение $A(t)/A_{\max}$. Это самая нижняя кривая, имеющая самую большую толщину. Если мы будем сравнивать поведение функции $A(t)/A_{\max}$ с поведением от времени модуля преобразования GT, нормированного на свое максимальное значение $|g_W(f_0, t)|/|g_{\max}(f_0, t)|$, то для параметра $W = 0.1$ коэффициент корреляция $r_{\mathrm{GT}}(W)$ будет равен $r_{\mathrm{RG}}(W) = 0.999$, и две эти кривые практически сольются. Функция $|g_W(f_0, t)|/|g_{\max}(f_0, t)|$ для размера $W = 0.2$ $(r_{\mathrm{GT}}(W) = 0.998)$ изображена на рис. 5 линией, имеющей промежуточную толщину. В этом случае отличие от нижней кривой $A(t)/A_{\max}$ становится заметным. Для преобразования CWT отношение $|V(f_0, t)|/|V_{\max}(f_0, t)|$, изображенное на рис. 5 тонкой линией, имеет коэффициент корреляции $r_{\mathrm{CWT}} = 0.994$ и также удовлетворительно описывает поведения зависимости амплитуды по времени $A(t)$.

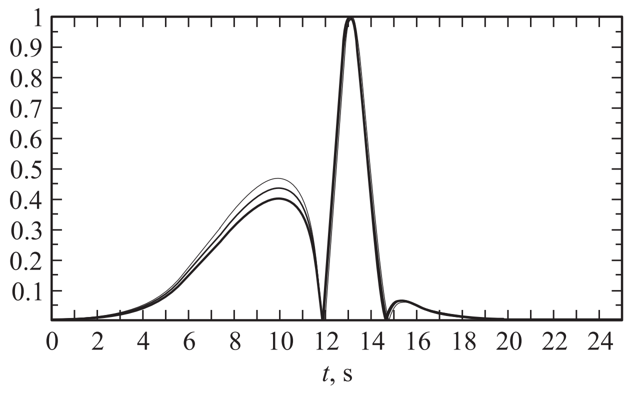

Рис. 5. Зависимость от времени t, s нормированных на максимум следующих величин: амплитуда сигнала $A(t)/A_{\max}$ (нижняя кривая наибольшей толщины), преобразование GT $|g_W(f_0 : t)|/|g_{\max}(f_0; t)|$ для $W = 0.2$ s (средняя кривая промежуточной толщины), преобразование CWT $|V(f_0; t)|/|V_{\max}(f_0; t)|$ (тонкая кривая).

Сравнивая CWT с GT, можно видеть, что удовлетворительного согласия функции $|g(f_0, t)|/|g_{\max}(f_0, t)|$ с поведением амплитуды $A(t)$ для GT можно достичь только в единственном частном случае сверхмалого значения окна $W \ll \min\{\tau_L; \tau_K\}$. Однако для такого окна малой продолжительности GT имеет очень широкое распределение по частотам (рис. 2), в то время как CWT (рис. 3) имеет достаточно компактную локализацию в пространстве частот. Представленная зависимость CWT $|V(\nu, t)|$ дает удовлетворительное согласие частотно-временно́й динамики изменения сигнала (рис. 3) как по частоте, так и по времени и не требует дополнительного знания характерных промежутков изменения сигнала $Z(t)$.

Полученные выводы о преимуществе CWT перед GT были подтверждены на нескольких моделях импульсных сигналов с быстроизменяющейся амплитудой. Особенно это преимущество заметно в модели сигнала $Z(t)$, состоящего из 5 простейших нестационарных сигналов $L = 0, 1, \ldots, 4$. В этой модели характерные масштабы сигнала $Z(t)$ быстро изменяются во времени: $b_L = 5(0.3 + 0.3|L - 4|)$, $f_L = 2.5$ (Hz), $t_L = 6 + 4L$ (s), $\tau_L = 0.3 + 0.3|L - 4|$ (s), $\alpha_L = 0.0$.

Заключение

Разработан новый класс импульсных нестационарных сигналов $Z(t)$ с постоянной частотой f_0, амплитуда которых $A(t)$ резко изменяется во времени. Для предложенной модели сигнала $Z(t)$ получено аналитическое выражение как для GT $g_W(\nu, t)$, так и для CWT $V(\nu, t)$.

Рассмотрены недостатки GT $g_W(\nu, t)$, явный вид которого зависит от ширины окна W. Показано, что выбор величины W для произвольного нестационарного сигнала $Z(t)$, характерные частоты которого произвольно изменяются во времени, представляет собой сложную задачу. Для нестационарного сигнала $Z(t)$, имеющего единственную частоту f_0 и быстроизменяющуюся амплитуду $A(t)$, вычислено $|g_W(\nu, t)|$ для случая $\nu = f_0$. Критерием согласования $A(t)$ и $|g_W(f_0, t)|$ является коэффициент корреляции Пирсона $r_{\mathrm{GT}}(W)$, который для преобразования GT зависит от размера окна W. Сформулирован алгоритм выбора продолжительности окна W, связанный с нахождением максимума величины $r_{\mathrm{GT}}(W)$.

Показано, что выбор W из условия $W \geq \tau_L$ приводит к тому, что величина $r_{\mathrm{GT}}(W)$ принимает малое значение, и амплитуда сигнала $A(t)$ воспроизводится с помощью $|g_W(f_0, t)|$ плохо. В этом случае оценка продолжительности переходного периода амплитуды $A(t)$ по характерному времени изменения функции $|g_W(f_0, t)|$ невозможна. Уменьшая размер W, мы увеличиваем коэффициент $r_{\mathrm{GT}}(W)$, причем восстановление $A(t)$ с помощью анализа функции $|g_W(f_0, t)|$ возможно только в случае $W \ll \min\{\tau_L, \tau_K\}$. Такой алгоритм выбора наиболее оптимального размера окна требует заранее известных масштабов изменения сигнала $Z(t)$. При сверхмалых размерах окна W при вычислении GT также происходит уменьшение коэффициента корреляции Пирсона. Это связанно с тем, что окно начинает реагировать на пики отдельных синусоидальных колебаний сигнала. Найдено максимальное значение коэффициента корреляции Пирсона $r_{\mathrm{GT}}(\max) = 0.9996$ при $W = 0.0724$, однако для такого малого окна невозможно правильно оценить частотный спектр сигнала $Z(t)$.

При вычислении CWT $V(\nu, t)$ производится автоматическое вычисление ширины окна, которое определяется исследуемой частотой ν и имеет большую продолжительность при изучении низкочастотных характеристик сигнала $Z(t)$ и малую продолжительность окна — для высокочастотных. Явный вид CWT зависит от типа материнского вейвлета, который будет определять как временно́е разрешение сигнала $Z(t)$, так и его частотное разрешение. При использовании материнского вейвлета Морле на графике $|V(\nu, t)|$ получается удовлетворительное согласие с поведением быстроизменяющейся амплитуды сигнала $A(t)$. Частотная локализация $|V(\nu, t)|$ также имеет удовлетворительное согласие с исследуемым сигналом.

Таким образом, CWT имеет преимущества перед GT в описании сложных нестационарных сигналов, свойства которых могут быстро изменяться со временем. Предлагаемые модельные импульсные сигналы с быстроизменяющейся амплитудой, допускающие аналитическое решение как для GT, так и для CWT, могут быть применены для анализа многих переходных этапов нестационарных сигналов в различных областях физики. Такие сигналы могут быть применены для моделирования вспышек в сигнале электроэнцефалограммы мозга, быстроизменяющихся процессов в физике плазмы и астрофизике, для описания неравновесных явлений в теории взаимодействующих когерентных пространственно-временны́х структур, для описания переходных процессов в электрических цепях, для анализа сейсмологических сигналов.

Список литературы

[1] *Чуи К.* Введение в вэйвлеты. М.: Мир, 2001.412 с.
[2] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлет-анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
[3] *Добеши И.* Десять лекций по вейвлетам. М: Изд-во РХД, 2004. 464 с.
[4] *Малла С.* Вейвлеты в обработке сигналов. М.: Мир, 2005. 671 с.
[5] *Cohen A.* Numerical Analysis of Wavelet Method. North-Holland, Elsevier Science, 2003. 335 p.
[6] Advances in Wavelet Theory and Their Applications in Engineering / Ed. D. Baleanu. Phys. Technol. 2012. 634 p.
[7] *Gabor D.* // J. Inst. Elec. Eng. 1945. Vol. 93. P. 429–457.
[8] *Goupillaud P., Grossmann A., Morlet J.* // Geoexploration. 1984. V. 23. P. 85–102.
[9] *Божокин С.В.* // ЖТФ. 2012. Т. 82. Вып. 7. С. 8–13.
[10] *Божокин С.В., Суслова И.Б.* // ЖТФ. 2013. Т. 83. N 12. С. 26–32.
[11] *Dass S., Holi M.S., Rajan K.S.* // IJERT. 2013. V. 2. N 11. P. 636–641.
[12] *Cho S.H., Jang G, Kwon S.H.* // IEEE Trans. Power Deliv. 2010. V. 25. N 1. P. 494–499.
[13] *Szmajda M., Górecki K., Mroczka J.* // Metrol. Meas. Syst. 2010. V. 17. N. 3. P. 383–396.
[14] *Shokrollahi E., Zargar G., Riahi M.A.* // Int. J. Sci. Emerging Tech. 2013. V. 5. N 5. P. 291–299.
[15] *Bartoch T., Seidl D.* // Annali di geofizica. 1999. V. 42. N 3. P. 497–506.
[16] *Ubeyli E.D., Guler I.* // Computers in Biology and Medicine. 2004. V. 34. P. 345–354.
[17] *Cnockaert L., Migeotte P.F., Daubigny L., Prisk G.K, Grenez F., Sa R.C.* // IEEE Trans. biomedic. engineer. 2008. V. 55. N 5. P. 1640–1642.
[18] *Nijsen T.M.E., Aarts R.M., Cluitmans P.J.M., Griep P.A.M.* // IEEE Trans. inform. technol. medic. 2010. V. 14. N 5. P. 1197–1203.