

03

## О нелинейном внутреннем резонансном взаимодействии поверхностных и внутренних волн в слоисто-неоднородной жидкости

© С.О. Ширяева, Н.А. Петрушов, А.И. Григорьев, М.С. Фёдоров

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 5 февраля 2014 г.)

В аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости показано, что в двухслойной жидкости со свободной поверхностью имеют место восемь различных нелинейных резонансов. Два между волнами, порожденными каждой из поверхностей, шесть смешанных между волнами, порожденными различными поверхностями, из них два вырожденных и четыре вторичных комбинационных, но не все из них реализуются на практике. В смешанных комбинационных резонансах взаимодействие реализуется только между поверхностными волнами, однако при катализационном влиянии внутренней волны, которая не меняет своих параметров, но необходима для реализации резонанса.

Волны в слоисто-неоднородной жидкости издавна привлекали внимание исследователей (см., например, [1–5] и указанную там литературу). Изучение линейного и нелинейного взаимодействий как поверхностных, так и внутренних волн в слоисто-неоднородной жидкости представляет как академический интерес для физики моря и физики атмосферы, так и чисто практический в связи с проблемами судоходства и воздухоплавания [1–9]. Недавние исследования, позволившие обнаружить аналог эффекта „мертвой воды“ на капиллярных волнах [10,11], открыли еще одно направление применения обсуждаемого явления в многослойной жидкостной эпитахии. В связи со сказанным представляет интерес изучение возможностей нелинейного резонансного взаимодействия между поверхностными и внутренними волнами в широком диапазоне их длин. Этой проблеме и посвящено настоящее исследование.

### Формулировка задачи

Будем решать задачу о расчете характеристик капиллярно-гравитационных поверхностных и внутренних волн на плоских поверхностях раздела сред слоисто-неоднородной жидкости в электростатическом поле. Будем полагать, что верхней средой является вакуум, напряженность электростатического поля в котором равна  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{g}$  — ускорение свободного падения, причем  $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{e}_z$ , где  $\mathbf{e}_z$  — орт декартовой системы координат. Примем, что физические величины с индексом „1“ относятся к верхнему жидкому слою, а с индексом „2“ — к нижней жидкости. Толщина верхнего слоя идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости с массовой плотностью  $\rho_1$  и диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_d$  равна  $h$ . Нижняя идеально проводящая идеальная несжимаемая жидкость с плотностью  $\rho_2$  заполняет полубесконечное пространство  $z < 0$  (полагаем  $\rho_2 > \rho_1$ ). Коэффициент поверхностного натяжения свободной поверхности верхней жидкости  $\sigma_1$ , а границы раздела сред  $\sigma_2$ .

Формально такая задача решалась в [8,10,11], хотя цели исследования были другими, математическая постановка, однако, идентична. Поэтому запишем ее сразу в скаляризованном виде: для потенциалов  $\psi_j(\mathbf{r}, t)$  поля скоростей  $\mathbf{u}_j(\mathbf{r}, t)$  и потенциалов электростатического поля  $\Phi_m(\mathbf{r}, t)$ , вводимых на основе соотношений:  $\mathbf{u}_1 = \nabla\psi_1$ ,  $\mathbf{u}_2 = \nabla\psi_2$ ,  $\mathbf{E}_0 = -\nabla\Phi_0$ ,  $\mathbf{E}_1 = -\nabla\Phi_1$ . Индекс „ $j$ “ принимает значения „1“ и „2“. Индекс „ $n$ “ принимает значения „0“ и „1“.

Обезразмерим всю задачу на  $\rho_1 = \sigma_1 = h = 1$ , тогда она будет иметь вид

$$\begin{aligned} p_1 &= -\frac{\partial\psi_1}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi_1)^2 - gz + P_{01}, \\ p_2 &= -\rho\frac{\partial\psi_2}{\partial t} - \frac{\rho}{2}(\nabla\psi_2)^2 - \rho gz + P_{02}, \\ \Delta\psi_1 &= 0, \quad \Delta\psi_2 = 0, \quad \Delta\Phi_0 = 0, \quad \Delta\Phi_1 = 0, \\ z = 1 + \xi_1 : \quad &-\frac{\partial\xi_1}{\partial t} + \mathbf{u}_1 \cdot \nabla(z - 1 - \xi_1) = 0, \\ &(\mathbf{n}_1, \nabla)\Phi_0 = \varepsilon_d(\mathbf{n}_1, \nabla)\Phi_1, \quad \Phi_0 = \Phi_1, \\ &p_1 - p_0 + p_{E1} - p = 0, \quad p = (\nabla, \mathbf{n}_1), \\ &p_{E1} = -\frac{1}{8\pi}((\nabla\Phi_0)^2 - 2(\mathbf{n}_1, \nabla\Phi_0)^2) \\ &\quad + \frac{\varepsilon_d}{8\pi}((\nabla\Phi_1)^2 - 2(\mathbf{n}_1, \nabla\Phi_1)^2), \\ z = \xi_2 : \quad &-\frac{\partial\xi_2}{\partial t} + (\mathbf{u}_2, \nabla)(z - \xi_2) = 0, \\ &p_2 - p_1 + p_{E2} - p_\sigma = 0, \quad p_\sigma = \sigma(\nabla, \mathbf{n}_2), \\ &p_{E2} = \frac{\varepsilon_d}{8\pi}(\nabla\Phi_1)^2, \quad \Phi_1 = \text{const}, \\ \mathbf{n}_j &\equiv \frac{\nabla F_j}{|\nabla F_j|}, \quad F_1 \equiv z - 1 - \xi_1, \quad F_2 \equiv z - \xi_2, \\ t = 0 : \quad &\xi_1(x, 0) = a_1 \cos(kx), \quad \xi_2(x, 0) = a_2 \cos(kx), \\ &\frac{\partial\xi_j}{\partial t} = 0, \quad (j = 1, 2), \end{aligned}$$

где  $\rho \equiv \rho_2/\rho_1$ ,  $\sigma \equiv \sigma_2/\sigma_1$ ,  $p_0$  — атмосферное давление,  $p_1$  и  $p_2$  — давления верхнем и нижнем слоях соответственно,  $p$  и  $p_\sigma$  — давления капиллярных сил на свободной поверхности и на границе раздела сред,  $p_{E1}$  и  $p_{E2}$  — давления электрических сил на свободной поверхности и на границе раздела сред,  $\Phi_0$  и  $\Phi_1$  — потенциалы электростатического поля в вакууме и в диэлектрической жидкости,  $P_{01}$  и  $P_{02}$  — константы, возникающие при интегрировании уравнений Эйлера.

## Разложение по порядкам малости

Задачу будем решать асимптотическим методом многих временных масштабов [12]. В качестве малого параметра возьмем безразмерную начальную амплитуду волн  $\varepsilon \sim a \sim b$ .

Решения задачи будем искать в виде разложений по степеням  $\varepsilon$

$$\begin{aligned}\psi_j(x, z, t) &= \varepsilon \psi_j^{(1)}(x, z, t) + \varepsilon^2 \psi_j^{(2)}(x, z, t) + O(\varepsilon^3), \\ \xi_j(x, t) &= \varepsilon \xi_j^{(1)}(x, t) + \varepsilon^2 \xi_j^{(2)}(x, t) + O(\varepsilon^3), \\ \Phi_m(x, z, t) &= \Phi_m^{(0)}(x, z, t) + \varepsilon \Phi_m^{(1)}(x, z, t) \\ &\quad + \varepsilon^2 \Phi_m^{(2)}(x, z, t) + O(\varepsilon^3).\end{aligned}$$

Верхние индексы обозначают порядок малости.

Согласно используемому методу многих временных масштабов [12], вводятся разномасштабные времена  $T_n \equiv \varepsilon^n t$ , а производная по времени будет иметь вид

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + O(\varepsilon^2).$$

Подстановка разложений в скаляризованную систему уравнений позволяет разбить сформулированную задачу на три: нулевого, первого и второго порядков малости.

## Задача нулевого порядка малости

Система уравнений нулевого порядка малости легко решается, решение запишется в виде

$$\begin{aligned}\Phi_0^{(0)}(z) &= -E_0 \left( z + \frac{1}{\varepsilon_d} - 1 \right), \quad \Phi_1^{(0)}(z) = -\frac{E_0}{\varepsilon_d} z, \\ p_1^{(0)}(z) &= p_0 - \frac{(\varepsilon_d - 1) E_0^2}{\varepsilon_d 8\pi} + g(1 - z), \\ p_2^{(0)}(z) &= p_0 - \frac{E_0^2}{8\pi} + g(1 - \rho z).\end{aligned}$$

## Задача первого порядка малости

Проекты решений задачи первого порядка малости будут иметь вид

$$\Phi_0^{(1)}(\mathbf{r}, t) = A^{(1)} \exp(-ikx - kz) + (\text{к.с.}),$$

$$\begin{aligned}\Phi_1^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= B_1^{(1)} \exp(-ikx - kz) \\ &\quad + B_2^{(1)} \exp(-ikx + kz) + (\text{к.с.}), \\ \psi_1^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= D_1^{(1)} \exp(-ikx - kz) \\ &\quad + D_2^{(1)} \exp(-ikx + kz) + (\text{к.с.}), \\ \psi_2^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= C_1^{(1)} \exp(-ikx + kz) + (\text{к.с.}).\end{aligned}$$

Исходя из кинематических граничных условий, в системе уравнений первого порядка малости решение для функций  $\xi_1^{(1)}$ ,  $\xi_2^{(1)}$  будем искать в виде

$$\begin{aligned}\xi_1^{(1)}(x, t) &= \alpha^{(1)}(t) \exp(-ikx) + (\text{к.с.}), \\ \xi_2^{(1)}(x, t) &= \beta^{(1)}(t) \exp(-ikx) + (\text{к.с.}),\end{aligned}$$

где  $\alpha^{(1)}$ ,  $\beta^{(1)}$ ,  $A^{(1)}$ ,  $B_j^{(1)}$ ,  $C^{(1)}$ ,  $D_j^{(1)}$  — функции времени, играющие роль коэффициентов,  $i$  — мнимая единица.

Подставляя проекты решений в граничные условия, выразим неизвестные  $A^{(1)}$ ,  $B_j^{(1)}$ ,  $C^{(1)}$ ,  $D_j^{(1)}$  через  $\alpha^{(1)}(t)$  и  $\beta^{(1)}(t)$ , которые будем искать в виде

$$\alpha^{(1)}(t) = a_1 \exp(isT_0), \quad \beta^{(1)}(t) = a_2 \exp(isT_0),$$

где  $a_1$  и  $a_2$  — амплитуды волн на свободной поверхности и границе раздела сред соответственно, удовлетворяющие системе линейных алгебраических уравнений, полученной из динамических граничных условий

$$\begin{aligned}\Lambda a_1 + \Theta a_2 &= 0, \quad \Theta a_1 + \Upsilon a_2 = 0, \\ \Lambda &\equiv -g - k^2 + \frac{s^2 \operatorname{cth}(k)}{k} + \frac{Wk(\varepsilon_d - 1)^2}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \operatorname{th}(k))}, \\ \Theta &\equiv \frac{1}{\operatorname{ch}(k)} \left( -\frac{s^2}{k \operatorname{th}(k)} + \frac{Wk(\varepsilon_d - 1)}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \operatorname{th}(k))} \right), \\ \Upsilon &\equiv g(1 - \rho) - k^2\sigma + \frac{s^2}{k}(\rho + \operatorname{cth}(k))\end{aligned}$$

$$+ \frac{Wk(1 + \varepsilon_d \operatorname{th}(k))}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \operatorname{th}(k))}, \quad W \equiv \frac{E_0^2}{4\pi}.$$

Условие обращения в нуль определителя системы позволяет получить биквадратное дисперсионное уравнение для частоты  $s$  в общем случае комплексной

$$\begin{aligned}\gamma_k s^4 + \eta_k s^2 + \kappa_k &= 0, \quad \gamma_k \equiv -\frac{(\operatorname{th}(k) + \rho)}{k^2 \operatorname{th}(k)}, \\ \eta_k &\equiv \frac{1}{k \operatorname{th}(k)} \left( \rho g + k^2(1 + \sigma) + \rho(g + k^2) \operatorname{th}(k) \right. \\ &\quad \left. - \frac{Wk}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \operatorname{th}(k))} \left( \varepsilon_d^2 - 2(\varepsilon_d - 1) \operatorname{th}^2(k) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\varepsilon_d + \rho(\varepsilon_d - 1)^2) \operatorname{th}(k) \right) \right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \kappa_k \equiv & - \left( g + k^2 - \frac{Wk(\varepsilon_d - 1)^2}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \text{th}(k))} \right) \\ & \times \left( (\rho - 1)g + \sigma k^2 - \frac{Wk(1 + \varepsilon_d \text{th}(k))}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \text{th}(k))} \right) \\ & + \left( \frac{Wk(\varepsilon_d - 1)}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \text{th}(k)) \text{ch}(k)} \right)^2. \end{aligned}$$

Подставляя найденные выражения для  $\alpha^{(1)}$ ,  $\beta^{(1)}$ ,  $A^{(1)}$ ,  $B_j^{(1)}$ ,  $C^{(1)}$ ,  $D_j^{(1)}$  в проекты решений, получим окончательные решения в первом порядке малости

$$\begin{aligned} \xi_j^{(1)} &= \int_0^\infty L_j dk, \\ L_j &\equiv \left( a_{1j} \exp(is_k^{(1)} T_0) + a_{2j} \exp(is_k^{(2)} T_0) \right) \\ &\quad \times \exp(-ikx) + (\text{к.с.}), \end{aligned}$$

где  $s_k^{(1)}$  и  $s_k^{(2)}$  — корни дисперсионного уравнения, а амплитуды волн на границе раздела сред связаны с амплитудами волн на свободной поверхности соотношениями

$$a_{j2} = - \left( \frac{\Lambda}{\Theta} \right) a_{j1} \quad \text{при} \quad s = s_k^{(j)},$$

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= \int_0^\infty \frac{2\sqrt{\pi W}(1 + \text{th}(k))}{\varepsilon_d + \text{th}(k)} \\ &\quad \times ((\varepsilon_d - 1) \text{ch}(k)L_1 + L_2) \exp(-kz) dk, \\ \Phi_1^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= \int_0^\infty \frac{2\sqrt{\pi W}}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \text{th}(k))} \left( (1 - \varepsilon_d) \text{th}(k)L_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{\text{ch}(k(1 - z))}{\text{ch}(k)} (\varepsilon_d + \text{th}(k(1 - z)))L_2 \right) dk, \\ \psi_1^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= \int_0^\infty \frac{1}{k \text{th}(k)} \left( \frac{\partial L_1}{\partial T_0} - \frac{\text{ch}(k(h - z))}{\text{ch}(k)} \frac{\partial L_2}{\partial T_0} \right) dk, \\ \psi_2^{(1)}(\mathbf{r}, t) &= \int_0^\infty \frac{\text{ch}(kz)}{k} (1 - \text{th}(kz)) \frac{\partial L_2}{\partial T_0} dk, \\ a_{mn} &\equiv a_{mn}(T_1), \end{aligned}$$

где неизвестные функции  $a_{j1}$  определяются из задачи следующего порядка малости.

### Задача второго порядка малости

После подстановки в уравнения второго порядка малости решений нулевого и первого порядков малости получим систему неоднородных дифференциальных

уравнений относительно функций  $\xi_1^{(2)}$ ,  $\xi_2^{(2)}$ ,  $\Phi_0^{(2)}$ ,  $\Phi_1^{(2)}$ ,  $\psi_1^{(2)}$ ,  $\psi_2^{(2)}$ . Если не принимать во внимание громоздкость полученной системы дифференциальных уравнений, решение находится стандартно в виде суммы решений однородной системы и частных решений неоднородной системы, последние определяются методом Крамера. После удовлетворения начальным условиям поправки второго порядка малости для формы поверхностей могут быть приведены к виду

$$\begin{aligned} \xi_j^{(2)}(x, T_0) &= \xi_{1j} \cos(2kx - 2s_k^{(1)} T_0) \\ &\quad + \xi_{2j} \cos(2kx - 2s_k^{(2)} T_0) \\ &\quad + \xi_{3j} \cos(2kx - (s_k^{(1)} - s_k^{(2)}) T_0) \\ &\quad + \xi_{4j} \cos(2kx - (s_k^{(1)} + s_k^{(2)}) T_0) \\ &\quad + \xi_{5j} \cos(2kx) + \xi_{6j} \cos(2s_k^{(1)} T_0) + \xi_{7j} \cos(2s_k^{(2)} T_0) \\ &\quad + \xi_{8j} \cos((s_k^{(1)} - s_k^{(2)}) T_0) + \xi_{9j} \cos((s_k^{(1)} + s_k^{(2)}) T_0), \end{aligned}$$

где индекс  $j$  принимает два значения 1 и 2.

В данном рассмотрении вид поправок  $\Phi_0^{(2)}$ ,  $\Phi_1^{(2)}$ ,  $\psi_1^{(2)}$ ,  $\psi_2^{(2)}$  и коэффициентов  $\xi_{nj}$  не приводится ввиду их большой громоздкости. Самое важное в коэффициентах  $\xi_{nj}$  то, что некоторые из них содержат резонансно подобные множители следующего вида:

$$\begin{aligned} \Omega_1^{-1} &= \left[ 4(s_k^{(1)})^2 - (s_{2k}^{(1)})^2 \right]^{-1}, \\ \Omega_2^{-1} &= \left[ 4(s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(2)})^2 \right]^{-1}, \\ \Omega_3^{-1} &= \left[ 4(s_k^{(1)})^2 - (s_{2k}^{(2)})^2 \right]^{-1}, \\ \Omega_4^{-1} &= \left[ 4(s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(1)})^2 \right]^{-1}, \\ \Omega_5^{-1} &= \left[ (s_k^{(1)} + s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(1)})^2 \right]^{-1}, \\ \Omega_6^{-1} &= \left[ (s_k^{(1)} + s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(2)})^2 \right]^{-1}, \\ \Omega_7^{-1} &= \left[ (s_k^{(1)} - s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(1)})^2 \right]^{-1}, \\ \Omega_8^{-1} &= \left[ (s_k^{(1)} - s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(2)})^2 \right]^{-1}, \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} s_k^{(1)} &= \sqrt{-\frac{\eta_k}{2\gamma_k} - \sqrt{\frac{\eta_k^2}{4\gamma_k^2} - \frac{\kappa_k}{\gamma_k}}}, \\ s_k^{(2)} &= \sqrt{-\frac{\eta_k}{2\gamma_k} + \sqrt{\frac{\eta_k^2}{4\gamma_k^2} - \frac{\kappa_k}{\gamma_k}}}. \end{aligned} \quad (2)$$

Волны с частотами  $s_k^{(1)}$  порождаются свободной поверхностью, а волны с частотами  $s_k^{(2)}$  порождаются границей раздела сред, в чем легко убедиться, переходя к пределу:  $\sigma_j \rightarrow 0$ ,  $E \rightarrow 0$ ,  $\rho \rightarrow 1$ . При таком предельном переходе мы приходим к гравитационным волнам, дисперсионное соотношение для которых известно, а граница раздела исчезает, так же как и порождаемые ею волны, т.е. при указанном предельном переходе получим  $s_k^{(1)} \rightarrow \sqrt{gk}$ ,  $s_k^{(2)} \rightarrow 0$ .

При выполнении какого-либо условия вида

$$\left| s_k^{(j)} \pm s_k^{(l)} \right| - \left| s_{2k}^{(n)} \right| \rightarrow 0, \quad (3)$$

где  $j$ ,  $l$  и  $n$  — индексы, принимающие два значения: „один“ и „два“ независимо друг от друга, соответствующая амплитуда неограниченно возрастает  $\xi_{nj} \rightarrow \infty$ . В теории нелинейных волн стремление линейной комбинации частот к нулю интерпретируется как наличие внутреннего нелинейного резонансного взаимодействия соответствующих волн. В резонансных ситуациях с участием первых двух из перечисленных в (1) комбинаций частот:  $\Omega_1 \approx 0$ ,  $\Omega_2 \approx 0$  мы имеем дело с вырожденным резонансным взаимодействием волн, заданных в начальный момент, и волн, возбуждающихся из-за нелинейности уравнений гидродинамики, порождаемых той же поверхностью. Подобные резонансы хорошо исследованы (см., например, [13]), и на них останавливаться не будем. В резонансах  $\Omega_q \approx 0$  ( $q = 3-8$ ) во взаимодействии принимают участие волны, порожденные как границей раздела контактирующих жидкостей, так и свободной поверхностью. В вырожденных резонансах  $\Omega_3 \approx 0$  и  $\Omega_4 \approx 0$  волны, порожденные на одной из границ, взаимодействуют с волнами, порожденными другой границей. В комбинационных резонансах  $\Omega_p \approx 0$  ( $p = 5-8$ ) волны с частотами, являющимися линейными комбинациями частот волн, порожденных на разных границах  $s_k^{(l)}$  ( $l = 1, 2$ ), взаимодействуют со вторичными волнами, порожденными одной из границ  $s_{2k}^{(n)}$  ( $n = 1, 2$ ). Под „вторичными“ понимаем волны, появляющиеся из-за нелинейности уравнений гидродинамики.

Согласно общепринятой терминологии, в первых четырех резонансных ситуациях мы имеем дело с нелинейным внутренним вырожденным резонансом, в последних четырех — с нелинейным внутренним вторичным комбинационным резонансом.

## Анализ нелинейных резонансных ситуаций

Выписанные выше решения исходной задачи справедливы вне области реализации резонансов, а в их малой окрестности полученные решения расходятся. Для детального исследования резонансов сформулируем задачу несколько иначе, задавшись целью получить эволюционные уравнения для амплитуд волн.

Решения задачи нулевого и первого порядков малости подставим в уравнения второго порядка малости. Они будут определять вид функций неоднородности.

Проекты решений второго порядка малости представим в виде

$$\begin{aligned} \Phi_0^{(2)} &= \int_0^\infty A^{(2)} \exp(-Kz) \exp(-iKx) dK, \\ \Phi_1^{(2)} &= \int_0^\infty \left( B_1^{(2)} \exp(-Kz) + B_2^{(2)} \exp(Kz) \right) \exp(-iKx) dK, \\ \psi_1^{(2)} &= \int_0^\infty \left( D_1^{(2)} \exp(-Kz) + D_2^{(2)} \exp(Kz) \right) \exp(-iKx) dK, \\ \psi_2^{(2)} &= \int_0^\infty C^{(2)} \exp(-Kz) \exp(-iKx) dK, \\ \xi_1^{(2)} &= \int_0^\infty \alpha^{(2)} \exp(-iKx) dK, \\ \xi_2^{(2)} &= \int_0^\infty \beta^{(2)} \exp(-iKx) dK, \end{aligned}$$

где  $\alpha^{(2)}$ ,  $\beta^{(2)}$ ,  $A^{(2)}$ ,  $B_j^{(2)}$ ,  $C^{(2)}$ ,  $D_j^{(2)}$  ( $j = 1, 2$ ) — неизвестные коэффициенты.

Используя граничные условия, выразим функции  $\Phi_0^{(2)}$ ,  $\Phi_1^{(2)}$ ,  $\psi_1^{(2)}$ ,  $\psi_2^{(2)}$  через  $\xi_1^{(2)}$ ,  $\xi_2^{(2)}$  и, подставляя в динамические условия, получим эволюционные уравнения

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial T_0^2} - \frac{1}{\text{ch}(k)} \frac{\partial^2 \beta^{(2)}}{\partial T_0^2} + k \text{th}(k) \left( g + k^2 \right. \\ &\left. - \frac{Wk(\varepsilon_d - 1)^2}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \text{th}(k))} \right) \alpha^{(2)} - \frac{Wk^2(\varepsilon_d - 1) \text{th}(k)}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \text{th}(k)) \text{ch}(k)} \beta^{(2)} = N_S, \\ &(1 + \rho \text{th}(k)) \frac{\partial^2 \beta^{(2)}}{\partial T_0^2} - \frac{1}{\text{ch}(k)} \frac{\partial^2 \alpha^{(2)}}{\partial T_0^2} + k \text{th}(k) \\ &\times \left( g(\rho - 1) + k^2 \sigma - \frac{Wk(1 + \varepsilon_d \text{th}(k))}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \text{th}(k))} \right) \beta^{(2)} \\ &- \frac{Wk^2(\varepsilon_d - 1) \text{th}(k)}{\varepsilon_d(\varepsilon_d + \text{th}(k)) \text{ch}(k)} \alpha^{(2)} = N_G, \end{aligned}$$

$N_S$  и  $N_G$  — функции неоднородности, которые весьма громоздки, а потому не выписываются в данном изложении.

Неоднородность  $N_S$  может быть приведена к виду

$$\begin{aligned} N_S &= M_1 \frac{\partial a_{11}(K, T_1)}{\partial T_1} \exp(is_k^{(1)} T_0) + M_2 \frac{\partial a_{21}(K, T_1)}{\partial T_1} \\ &\times \exp(is_k^{(2)} T_0) + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 a_{1l}(k, T_1) \exp(is_k^{(l)} T_0) \\ &\times \left[ \sum M_{na j 1} (\pm k \pm K, T_1) \exp(\pm is_{\pm k \pm K}^{(j)} T_0) \right], \end{aligned}$$

где  $a_{11}(k, T_1)$  — амплитуда волны с частотой  $s_k^{(1)}$ ,  $M_n$  — коэффициенты, в общем случае функции от внешних параметров, индивидуальные для каждого из слагаемых; суммирование во внутренней сумме идет по различным комбинациям знаков плюс и минус.

Неоднородность  $N_G$  будет иметь аналогичный вид, за исключением коэффициентов  $M_n$ . Используя соотношения между амплитудами, установленные в первом порядке малости, выразим амплитуды на границе раздела сред через амплитуды на свободной поверхности, переходя тем самым к рассмотрению только одного эволюционного уравнения.

Введем параметр расстройки  $\delta$  и, исключая для каждого из резонансов секулярные слагаемые из эволюционного уравнения, соответствующего динамическому условию на свободной поверхности, получим системы дифференциальных уравнений.

Для резонанса  $\Omega_1 = 4(s_k^{(1)})^2 - (s_{2k}^{(1)})^2 \rightarrow \varepsilon\delta$ :

$$iA_1 \frac{\partial a_{11}(2k, T_1)}{\partial T_1} + B_1 (a_{11}(k, T_1))^2 \exp(i\delta T_1) = 0,$$

$$iX_1 \frac{\partial a_{11}(k, T_1)}{\partial T_1} + \Gamma_1 a_{11}(k, T_1) a_{11}(2k, T_1) \exp(-i\delta T_1) = 0.$$

Для резонанса  $\Omega_2 = 4(s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(2)})^2 \rightarrow \varepsilon\delta$ :

$$iA_2 \frac{\partial a_{21}(2k, T_1)}{\partial T_1} + B_2 (a_{21}(k, T_1))^2 \exp(i\delta T_1) = 0,$$

$$iX_2 \frac{\partial a_{21}(k, T_1)}{\partial T_1} + \Gamma_2 a_{21}(k, T_1) a_{21}(2k, T_1) \exp(-i\delta T_1) = 0.$$

Для резонанса  $\Omega_3 = 4(s_k^{(1)})^2 - (s_{2k}^{(2)})^2 \rightarrow \varepsilon\delta$ :

$$iA_3 \frac{\partial a_{21}(2k, T_1)}{\partial T_1} + B_3 (a_{11}(k, T_1))^2 \exp(i\delta T_1) = 0,$$

$$iX_3 \frac{\partial a_{11}(k, T_1)}{\partial T_1} + \Gamma_3 a_{11}(k, T_1) a_{21}(2k, T_1) \exp(-i\delta T_1) = 0.$$

Для резонанса  $\Omega_4 = 4(s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(1)})^2 \rightarrow \varepsilon\delta$ :

$$iA_4 \frac{\partial a_{11}(2k, T_1)}{\partial T_1} + B_4 (a_{21}(k, T_1))^2 \exp(i\delta T_1) = 0,$$

$$iX_4 \frac{\partial a_{21}(k, T_1)}{\partial T_1} + \Gamma_4 a_{21}(k, T_1) a_{11}(2k, T_1) \exp(-i\delta T_1) = 0.$$

Для резонанса  $\Omega_5 = (s_k^{(1)} + s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(1)})^2 \rightarrow \varepsilon\delta$ :

$$iA_5 \frac{\partial a_{11}(2k, T_1)}{\partial T_1} + B_5 a_{11}(k, T_1) a_{21}(k, T_1) \exp(i\delta T_1) = 0,$$

$$iX_5 \frac{\partial a_{11}(k, T_1)}{\partial T_1} + \Gamma_5 a_{21}(k, T_1) a_{11}(2k, T_1) \exp(-i\delta T_1) = 0,$$

$$iE_5 \frac{\partial a_{21}(k, T_1)}{\partial T_1} + H_5 a_{11}(k, T_1) a_{11}(2k, T_1) \exp(-i\delta T_1) = 0.$$

Для резонанса  $\Omega_6 = (s_k^{(1)} + s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(2)})^2 \rightarrow \varepsilon\delta$ :

$$iA_6 \frac{\partial a_{21}(2k, T_1)}{\partial T_1} + B_6 a_{11}(k, T_1) a_{21}(k, T_1) \exp(i\delta T_1) = 0,$$

$$iX_6 \frac{\partial a_{11}(k, T_1)}{\partial T_1} + \Gamma_6 a_{21}(k, T_1) a_{21}(2k, T_1) \exp(-i\delta T_1) = 0,$$

$$iE_6 \frac{\partial a_{21}(k, T_1)}{\partial T_1} + H_6 a_{11}(k, T_1) a_{21}(2k, T_1) \exp(-i\delta T_1) = 0.$$

Для резонанса  $\Omega_7 = (s_k^{(1)} - s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(1)})^2 \rightarrow \varepsilon\delta$ :

$$iA_7 \frac{\partial a_{11}(2k, T_1)}{\partial T_1} + B_7 a_{11}(k, T_1) a_{21}(k, T_1) \exp(i\delta T_1) = 0,$$

$$iX_7 \frac{\partial a_{11}(k, T_1)}{\partial T_1} + \Gamma_7 a_{21}(k, T_1) a_{11}(2k, T_1) \exp(-i\delta T_1) = 0,$$

$$iE_7 \frac{\partial a_{21}(k, T_1)}{\partial T_1} + H_7 a_{11}(k, T_1) a_{11}(2k, T_1) \exp(-i\delta T_1) = 0.$$

Для резонанса  $\Omega_8 = (s_k^{(1)} - s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(2)})^2 \rightarrow \varepsilon\delta$ :

$$iA_8 \frac{\partial a_{21}(2k, T_1)}{\partial T_1} + B_8 a_{11}(k, T_1) a_{21}(k, T_1) \exp(i\delta T_1) = 0,$$

$$iX_8 \frac{\partial a_{11}(k, T_1)}{\partial T_1} + \Gamma_8 a_{21}(k, T_1) a_{21}(2k, T_1) \exp(-i\delta T_1) = 0,$$

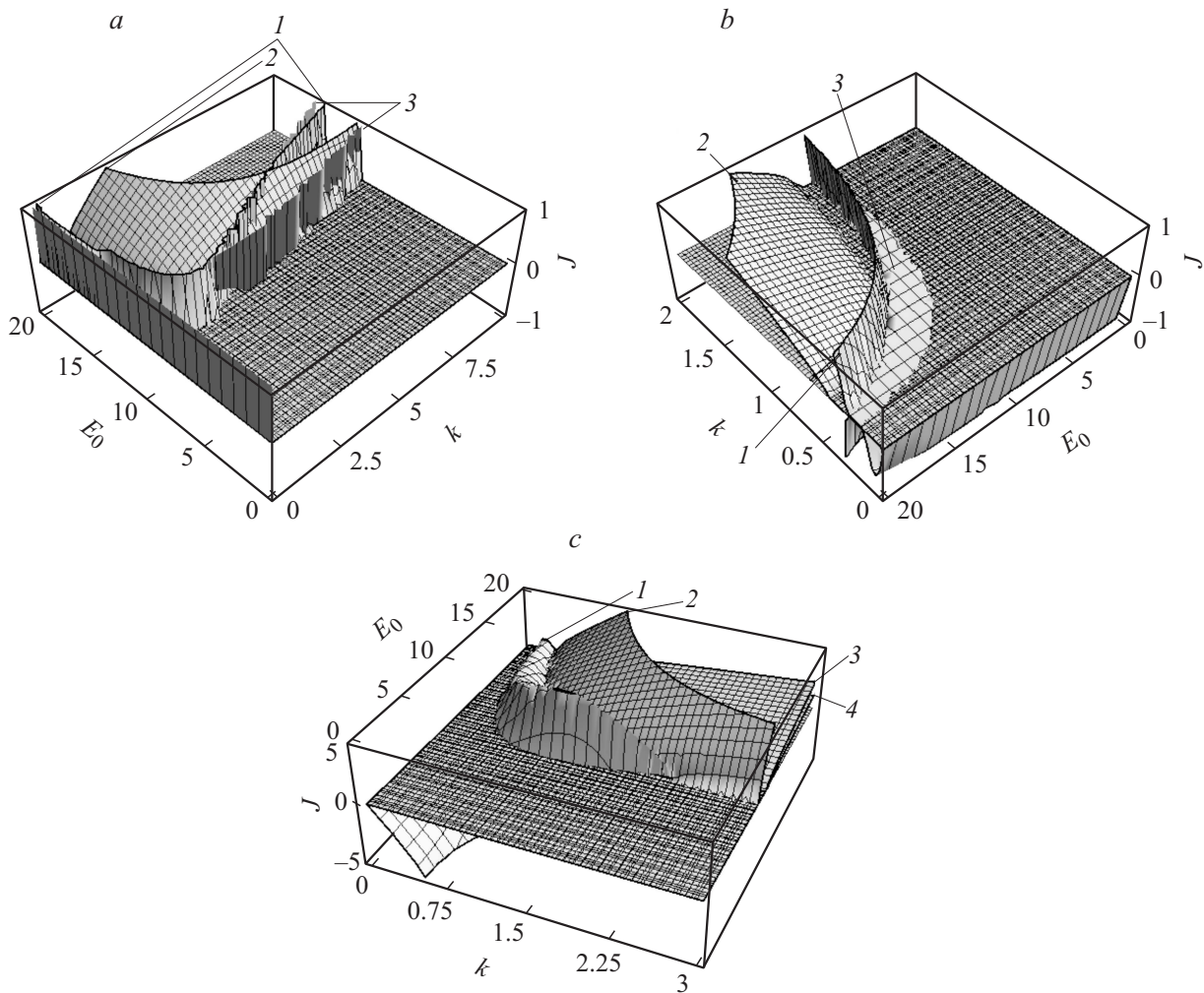
$$iE_8 \frac{\partial a_{21}(k, T_1)}{\partial T_1} + H_8 a_{11}(k, T_1) a_{21}(2k, T_1) \exp(-i\delta T_1) = 0,$$

где  $A_p, B_p, X_p, \Gamma_p, E_p, H_p$  — константы (явный вид которых в силу громоздкости не приводится) при секулярных слагаемых в неоднородных эволюционных уравнениях; индекс  $p$  принимает значения от 1 до 8. Решение для амплитуды ищется в виде

$$a_{j1}(k, T_1) = \eta_{j1}(k, T_1) \exp[i\varphi_{j1}(k, T_1)].$$

Для расчета величины межфазного натяжения  $\sigma$  на границе раздела двух жидкостей с коэффициентами поверхностного натяжения  $\sigma_0$  и  $\sigma_*$ , воспользуемся правилом Антонова [14]:  $\sigma = |\sigma_0 - \sigma_*|$ . Коэффициент межфазного натяжения между соленой и пресной водой тогда будет равен  $\sigma = 0.0106989$ . Примем для расчетов  $E_0 = 9$  ( $W = 6.446$ ),  $\varepsilon_d = 81$ . Напомним, что напряженность  $E_0$  в нашем исследовании обезразмеривается на  $\sqrt{\sigma_1/h}$ , поэтому безразмерное значение  $E_0 = 1$  при  $h \sim 1000$  см и  $\sigma_1 \approx 72.8$  дине/см (граница вода-воздух) соответствует размерное величине  $\approx 0.25$  unit CGSE.

Условие (3) является необходимым условием резонансного взаимодействия волн, но недостаточным. Для того чтобы резонанс мог реализоваться, соответствующие волны должны быть устойчивыми, т.е. их частоты должны быть вещественными. В том случае, если какая-либо частота окажется мнимой, то движение станет аperiодичным, и ни о каком резонансе не имеет смысла



**Рис. 1.** Области возможной реализации нелинейного резонанса. Рассчитано при  $\rho = 1.0271$ ,  $\sigma = 0.0107$ ,  $\varepsilon_1 = 81$ ,  $g = 9.807$ : *a* — резонанс  $\Omega_3 \approx 0$ . Поверхность  $J_1(k, E_0) \equiv \text{Im}(s_k^{(1)})$  обозначена цифрой 1; поверхность  $J_2(k, E_0) \equiv \text{Im}(s_{2k}^{(2)})$  — цифрой 2; поверхность  $J_3(k, E_0) \equiv \Omega_3$  — цифрой 3. Резонанс  $\Omega_3 \approx 0$  возможен. *b* — резонанс  $\Omega_4 \approx 0$ . То же, что на рис. 1, *a*, но для резонанса  $\Omega_4 \approx 0$ . Поверхность  $J_1(k, E_0) \equiv \text{Im}(s_k^{(2)})$  обозначена цифрой 1; поверхность  $J_2(k, E_0) \equiv \text{Im}(s_{2k}^{(1)})$  — цифрой 2; поверхность  $J_4(k, E_0) \equiv \Omega_4$  — цифрой 3. Резонанс может реализоваться на линии пересечения поверхности 3 нулевой плоскостью  $J_0 = 0$ . Резонанс  $\Omega_3 \approx 0$  возможен. *c* — резонанс  $\Omega_5 \approx 0$ . То же, что на рис. 1, *a*, но для резонанса  $\Omega_5 \approx 0$ . Поверхность  $J_5(k, E_0) \equiv \Omega_5$  обозначена цифрой 1; поверхность  $J_2(k, E_0) \equiv \text{Im}(s_{2k}^{(2)})$  — цифрой 2; поверхность  $J_3(k, E_0) \equiv \text{Im}(s_{2k}^{(1)})$  — цифрой 3; поверхность  $J_4(k, E_0) \equiv \text{Im}(s_k^{(1)})$  — цифрой 4. Резонанс  $\Omega_5 \approx 0$  возможен.

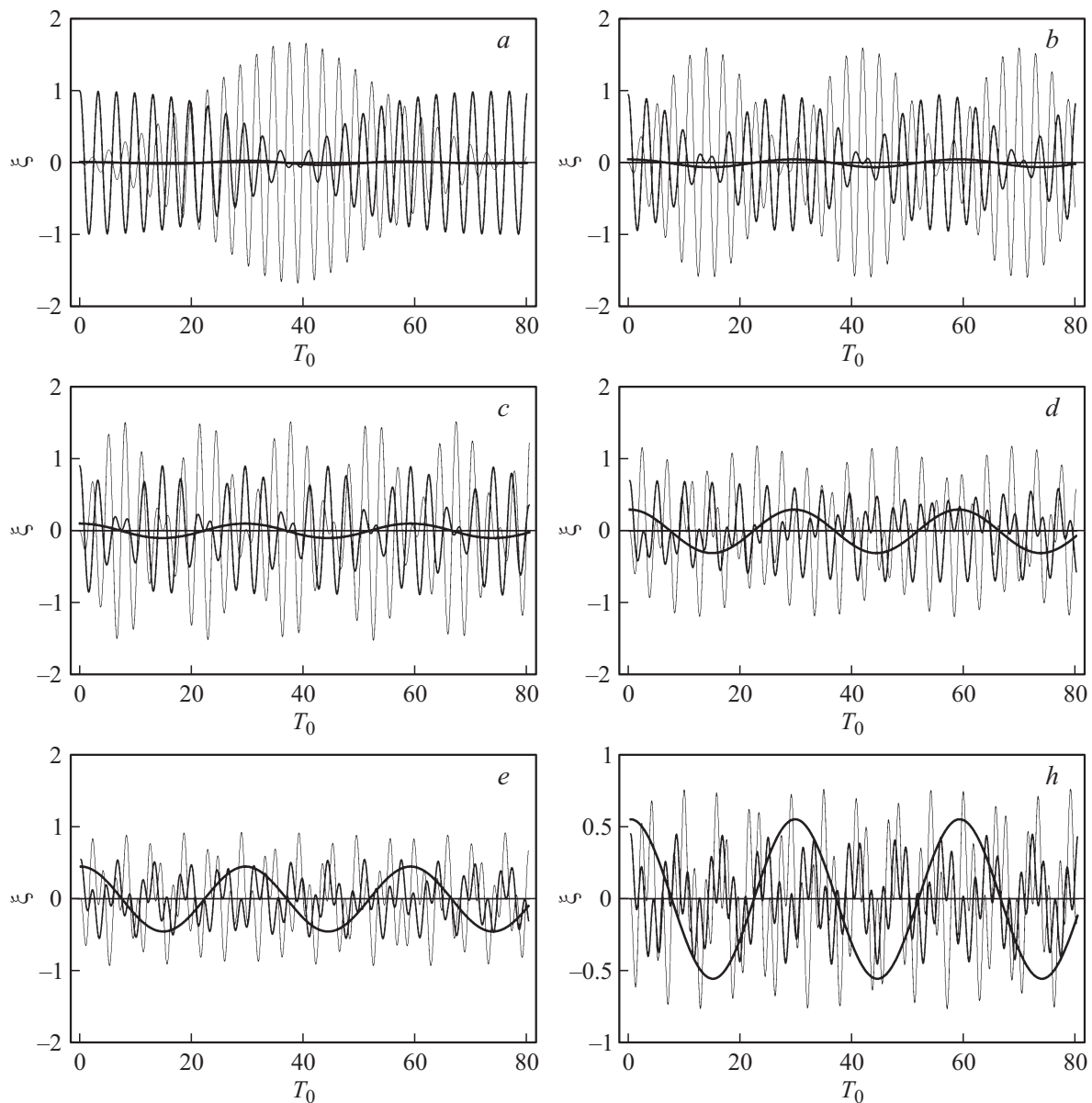
говорить. Проанализируем с этой точки зрения возможность реализации резонансов (1), имея в виду, что частоты определяются соотношением (2).

Резонанс  $\Omega_3 \approx 0$ . На рис. 1, *a* изображены поверхности инкремента неустойчивости волны с частотой  $s_k^{(1)}$  (поверхность 1), инкремента неустойчивости волны с частотой  $s_{2k}^{(2)}$  (поверхность 2) и поверхность  $J_3 \equiv \Omega_3 = 4(s_k^{(1)})^2 - (s_{2k}^{(2)})^2$  (поверхность 3). Резонанс может реализоваться при тех значениях параметров, для которых резонансная линия — линия пересечения поверхности 3 с нулевой плоскостью находится в области устойчивости взаимодействующих волн. Из рис. 1, *a* видно, что часть линии пересечения поверхности 3 с нулевой плоскостью расположена в области устойчи-

вости взаимодействующих волн, т.е. резонанс  $\Omega_3 \approx 0$  возможен.

Резонанс  $\Omega_4 \approx 0$ . На рис. 1, *b* изображены поверхности инкремента неустойчивости волны с частотой  $s_k^{(2)}$  (поверхность 1), инкремента волны с частотой  $s_{2k}^{(1)}$  (поверхность 2) и поверхность  $J_4 \equiv \Omega_4 = 4(s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(1)})^2$  (поверхность 3), пересеченные нулевой плоскостью  $J_0 = 0$ . Область устойчивости взаимодействующих волн расположена правее поверхностей 1 и 2. Таким образом, резонанс  $\Omega_4 \approx 0$  реализуется во всем представленном диапазоне значений параметров  $k$  и  $E_0$ .

Резонанс  $\Omega_5 \approx 0$ . На рис. 1, *c* изображены поверхности  $J_5 \equiv \Omega_5 = (s_k^{(1)} + s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(1)})^2$  (поверхность 1) и инкременты неустойчивости волн с частотой  $s_k^{(2)}$



**Рис. 2.** Зависимость от безразмерного времени амплитуд волн, находящихся в состоянии внутреннего нелинейного вторичного комбинационного резонансного взаимодействия  $\Omega_5 \approx 0$ . Рассчитано при  $E_0 = 9$  и тех же значениях физических параметров, что и на рис. 1, для  $k = 0.5582$ , весьма близкого к положению точного резонанса. Начальные фазы  $\varphi_{1,k}(0) = 0$ ,  $\varphi_{2,k}(0) = 0$ ,  $\varphi_{1,2k}(0) = \pi/2$ . Начальная амплитуда волны с частотой  $s_{2k}^{(1)}$  на всех фигурах одинакова  $\eta_{1,2k}(0) = 0.0000001$ ; начальные амплитуды остальных двух волн: *a* —  $\eta_{1,k}(0) = 0.99$ ,  $\eta_{2,k}(0) = 0.01$ ; *b* —  $\eta_{1,k}(0) = 0.95$ ,  $\eta_{2,k}(0) = 0.05$ ; *c* —  $\eta_{1,k}(0) = 0.9$ ,  $\eta_{2,k}(0) = 0.1$ ; *d* —  $\eta_{1,k}(0) = 0.7$ ,  $\eta_{2,k}(0) = 0.3$ ; *e* —  $\eta_{1,k}(0) = 0.55$ ,  $\eta_{2,k}(0) = 0.45$ ; *h* —  $\eta_{1,k}(0) = 0.45$ ,  $\eta_{2,k}(0) = 0.55$ .

(поверхность 2), с частотой  $s_{2k}^{(1)}$  (поверхность 3) и с частотой  $s_k^{(1)}$  (поверхность 4). Поверхности инкрементов расположены выше линии реализации резонанса, которая, таким образом, лежит в области устойчивости взаимодействующих волн, и, следовательно, резонанс  $\Omega_5 \approx 0$  реализуется.

Расчеты показывают, что резонансы  $\Omega_6 \approx 0$  и  $\Omega_8 \approx 0$  не реализуются, а резонанс  $\Omega_7 \approx 0$  может иметь место. В итоге реализоваться могут только четыре резонанса из шести:  $\Omega_3 \equiv 4(s_k^{(1)})^2 -$

$-(s_{2k}^{(2)})^2 \approx 0$ ,  $\Omega_4 \equiv 4(s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(1)})^2 \approx 0$ ,  $\Omega_5 \equiv (s_k^{(1)} + s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(1)})^2 \approx 0$  и  $\Omega_7 \equiv (s_k^{(1)} - s_k^{(2)})^2 - (s_{2k}^{(1)})^2 \approx 0$ . Проиллюстрируем особенности резонансного взаимодействия волн на примере резонанса  $\Omega_5 \approx 0$ .

На рис. 2, *a* изображены временные зависимости амплитуд волн в резонансе  $\Omega_5 \approx 0$ . Толстой линией отмечена волна с частотой  $s_k^{(1)}$ , жирная линия —  $s_k^{(1)}$ , тонкая линия —  $s_{2k}^{(1)}$ . Значения частот равны  $s_k^{(2)} = 0.2133$ ,  $s_k^{(1)} = 1.9208$ ,  $s_{2k}^{(1)} = 2.1341$ . Как видно из рисунка, обмен

энергиями происходит между поверхностными волнами ( $s_k^{(1)}$  и  $s_{2k}^{(1)}$ ), а внутренняя волна ( $s_k^{(2)}$ ) остается без изменений, сливаясь практически с осью абсцисс. Она служит только необходимым посредником, как катализатор в химии.

На рис. 2, *b* приведены те же зависимости в том же масштабе, что и на рис. 2, *a*, но при других начальных условиях: амплитуда волны с частотой  $s_k^{(1)}$  уменьшена, а волны с частотой  $s_k^{(2)}$  увеличена. Видно, что характерное время обмена энергией при этом уменьшилось, все остальные закономерности взаимодействия остались прежними. Несмотря на то что энергия во внутреннюю волну не передается, сама волна необходима. Расчеты показывают, что если ее убрать, т.е. положить, что в начальный момент времени амплитуда внутренней волны с частотой  $s_k^{(2)}$  равна нулю, то резонансное взаимодействие волн исчезает.

Такое положение дел остается неизменным при увеличении значения начальной амплитуды волны с частотой  $s_k^{(2)}$  от 0.01 до 0.99 и синхронном уменьшении начальной амплитуды волны с частотой  $s_k^{(1)}$  соответственно, от 0.99 до 0.01, так чтобы сумма амплитуд равнялась единице. Некоторые из таких промежуточных расчетов проиллюстрированы рис. 2, *c–h*. Как видно из графиков, внутренняя волна не только является катализатором резонанса, но и качественно влияет на его протекание. Легко заметить, что при увеличении начальной амплитуды внутренней волны характерное время передачи энергии уменьшается (рис. 2, *b–h*), несмотря на то что сама внутренняя волна в обмене энергиями не участвует. При дальнейшем увеличении начальной амплитуды внутренней волны общая картина реализации резонанса коренным образом меняется, поскольку частота передачи энергии между волнами (величина, обратная характерному времени обмена энергиями) принимает значения, сравнимые со значениями частот взаимодействующих волн, что наиболее ярко представлено на рис. 2, *d* и *e*.

## Заключение

В асимптотических расчетах второго порядка малости установлено, что нелинейное резонансное взаимодействие между поверхностными и внутренними волнами конечной амплитуды имеет место. Внутренняя волна вносит каталитический вклад в реализацию резонанса, качественно определяя его протекание, но реальное взаимодействие идет только между поверхностными волнами, а характеристики внутренней волны при этом не меняются.

Работа выполнена при поддержке тематического гранта ЯрГУ им. П.Г. Демидова и грантов РФФИ 14-08-00240 и 12-01-31327 мол\_а.

## Список литературы

- [1] Сретенский Л.Н. // Журнал геофизики. 1934. Т. 4. Вып. 3. С. 332–367.
- [2] Сретенский Л.Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977. 816 с.
- [3] Гориков К.А., Долина И.С., Соустова И.А., Троицкая Ю.И. // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 39. № 5. С. 661–672.
- [4] La Rocca M., Sciortino G., Boniforti M.A. // Nonlinear Oscillations. 2003. Vol. 6. N 2. P. 196–204.
- [5] Hanyang Gu, Liejin // Progr. Natur. Sci. 2005. Vol. 15. N 11. P. 1026–1034.
- [6] Филипс О.М. Взаимодействие волн / Сб. Нелинейные волны. М.: Мир, 1977. С. 197–220.
- [7] Ле Блон П., Майсек Л. Волны в океане. Т. 2. М.: Мир, 1981. 366 с.
- [8] Григорьев А.И., Фёдоров М.С., Ширяева С.О. // Изв. РАН. МЖГ. 2010. № 5. С. 130–140.
- [9] Mercier M.J., Vasseur R., Dauvois T. // Nonlin. Proces. Geophys. 2011. Vol. 18. P. 193–208.
- [10] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Фёдоров М.С. // ЖТФ. 2010. Т. 80. Вып. 7. С. 8–17.
- [11] Григорьев А.И., Фёдоров М.С., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2011. Т. 81. Вып. 11. С. 31–39.
- [12] Nayfeh A.H., Hassan S.D. // J. Fluid Mech. Pt 3. 1971. Vol. 48. P. 463–475.
- [13] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Бухаров В.В. // Электронный журнал „Исследовано в России“. 2013. № 022. С. 324–332. <http://zhurnal.ape.relarn.ru/articles/2013/022.pdf>
- [14] Рид Р., Шервуд Т. Свойства газов и жидкостей. Л.: Химия, 1971. 704 с.