

01;10

Распространение однополярных возмущений в гистерезисных средах с насыщением нелинейных потерь

© В.Е. Назаров, С.Б. Кияшко

Институт прикладной физики РАН, Нижний Новгород
E-mail: nazarov@hydro.appl.sci-nnov.ru

Поступило в Редакцию 7 апреля 2014 г.

Проведено теоретическое исследование распространения и эволюции однополярных импульсных возмущений в гистерезисных средах с насыщением нелинейных потерь. Получено точное аналитическое решение, описывающее распространение и эволюцию первоначально треугольных импульсов в таких средах. Проведен численный и графический анализ полученного решения.

Теория волновых процессов в идеальных (без диссипации) упругих средах с квадратичной нелинейностью развита достаточно подробно [1,2]. Из этой теории следует, что при распространении в такой среде однополярного возмущения вначале происходит укрупнение его фронта (переднего или заднего, в зависимости от знака параметра нелинейности среды), а затем в его профиле образуется неоднозначность или „перехлест“. Вследствие физической нереализуемости „перехлеста“, в профиль возмущения вводится разрыв — ударный фронт, что приводит к нелинейному поглощению возмущения и увеличению его длительности, при этом импульс возмущения сохраняется, а его энергия уменьшается.

Результаты исследования эффектов дислокационного амплитудно-зависимого внутреннего трения в поликристаллических металлах и горных породах свидетельствуют о том, что их уравнения состояния описываются гистерезисной зависимостью $\sigma = \sigma(\varepsilon, \text{sign}\dot{\varepsilon})$, где σ и ε — напряжение и деформация, при этом в некоторых металлах (в отожженной меди, цинке и свинце) имеет место насыщение нелинейных (гистерезисных) потерь. В предлагаемой работе проводится теоретическое исследование и анализ распространения однополярных импульсных возмущений в гистерезисных средах с насыщением нелинейных потерь.

Специфика такой задачи заключается в том, что в гистерезисных средах „перехлест“ в однополярном возмущении не образуется (именно этот случай здесь и рассматривается), однако амплитуда возмущения уменьшается, а его длительность растет [3–5]. Это связано с тем, что гистерезисные среды обладают нелинейными потерями, определяемыми площадью петли гистерезиса, при этом малые возмущения одной и той же величины на переднем и заднем фронтах импульса движутся с различными скоростями, что и приводит к увеличению его длительности.

Уравнение состояния гистерезисной среды с насыщением нелинейных потерь (для продольных напряжения σ и деформации ε) можно представить в виде [6]:

$$\sigma(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) = E[\varepsilon - f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})], \quad (1)$$

$$f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon}) = \frac{1}{2(1 + \gamma_0|\varepsilon|)} \begin{cases} \gamma_1\varepsilon^2, & \varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} > 0, \\ -\gamma_2\varepsilon^2 + (\gamma_1 + \gamma_2)\varepsilon_m\varepsilon, & \varepsilon > 0, \dot{\varepsilon} < 0, \\ -\gamma_3\varepsilon^2, & \varepsilon < 0, \dot{\varepsilon} < 0, \\ \gamma_4\varepsilon^2 + (\gamma_3 + \gamma_4)\varepsilon_m\varepsilon, & \varepsilon < 0, \dot{\varepsilon} > 0, \end{cases} \quad (2)$$

где E — модуль упругости (E — модуль Юнга для стержня, $E = K(1 - \nu)/3(1 + \nu)$ — для безграничной среды, K — модуль всестороннего сжатия, ν — коэффициент Пуассона), $f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ — гистерезисная функция, $|f_\varepsilon(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})| \ll 1$, $\varepsilon_m = \varepsilon_m(z)$ — амплитуда деформации, $\gamma_0 \geq 0$, $\gamma_1 + \gamma_2 > 0$, $\gamma_3 + \gamma_4 > 0$, $|\gamma_{1-4}\varepsilon_m| \ll 1$.

В уравнении (2) величина ε_m , в отличие от параметров E , γ_0 , γ_{1-4} , не является характеристикой среды, а определяется максимальной ее деформацией, т.е. амплитудой возмущения; по мере распространения и затухания возмущения (из-за гистерезисных потерь) его амплитуда уменьшается, поэтому $\varepsilon_m = \varepsilon_m(x)$. Вообще говоря, в уравнении (1) необходимо учитывать и линейное диссипативное слагаемое $\eta\dot{\varepsilon}$, где η — коэффициент диссипации, однако им можно пренебречь, если рассматривать достаточно сильные и медленные возмущения, для которых выполняется неравенство: $E|f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})| \gg \eta|\dot{\varepsilon}|$ [1]. В этом случае удастся получить точные аналитические выражения для формы и параметров однополярных возмущений. Отметим, что точные решения нелинейных волновых уравнений в эксперименте не реализуются,

поскольку в реальных средах всегда проявляются факторы, не учитываемые в теории, однако точные решения представляют большую ценность, потому что, во-первых, таких решений чрезвычайно мало, а во-вторых, точные решения дают наиболее полное представление о закономерностях волновых процессов в нелинейных средах.

Подставляя уравнение состояния (1) в уравнение движения $\rho U_{tt} = \sigma_x(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})$ и переходя к сопровождающей системе координат $\tau = t - x/C_0$, $x' = x \geq 0$, получим одноволновое уравнение для простых волн деформации $\varepsilon(x, \tau) = U_x(x, \tau)$:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = -\frac{1}{2C_0} \frac{\partial f(\varepsilon, \text{sign } \dot{\varepsilon})}{\partial \tau}, \quad (3)$$

где U — смещение, ρ — плотность, $C_0 = (E/\rho)^{1/2}$.

Граничное условие зададим в виде симметричного треугольного возмущения:

$$\varepsilon(0, \theta) = 2\varepsilon_0 \begin{cases} \theta, & 0 \leq \theta \leq 1/2; \\ 1 - \theta, & 1/2 \leq \theta \leq 1, \end{cases} \quad (4)$$

где ε_0 и T — амплитуда и длительность возмущения, $\theta = \tau/T$.

Для определенности здесь будет рассмотрено распространение возмущений положительной полярности ($\varepsilon_0 > 0$) в предположении, что $\gamma_{1,2} > 0$. В этом случае „перехлестов“ в однополярных возмущениях не образуется. При решении уравнения (3) мы будем пользоваться методом „сшивания“ простых волн [3–5], отвечающих каждой ветви гистерезиса (2). Точное решение уравнения (3) с граничным условием (4) записывается в неявной форме и имеет следующий вид:

$$e(z, \theta) = 2 \begin{cases} \theta - \frac{e(z, \theta)[2 + ae(z, \theta)]}{4[1 + ae(z, \theta)]^2} z, & \dot{e}(z, \theta) > 0; \\ 1 - \theta - \frac{\mu e(z, \theta)[2 + ae(z, \theta)]}{4[1 + ae(z, \theta)]^2} z + \frac{1 + \mu}{4[1 + ae(z, \theta)]^2} \int_0^z e_m(z') dz', & \dot{e}(z, \theta) < 0, \end{cases} \quad (5)$$

где $e(z, \theta) = \varepsilon(z, \theta)/\varepsilon_0$, $e_m(z) = \varepsilon_m(z)/\varepsilon_0$, $a = \gamma_0\varepsilon_0$, $z = y\varepsilon_0$, $y = \gamma_1 x/C_0 T$, $\mu = \gamma_2/\gamma_1$.

Амплитуда $e_m(z)$ определяется значением деформации $e(z, \theta)$ в точке $\theta = \theta_m(z)$ пересечения переднего ($\dot{e}(z, \theta) > 0$, $0 \leq \theta \leq \theta_m$) и заднего ($\dot{e}(z, \theta) < 0$, $\theta_m \leq \theta \leq \theta^*$) фронтов возмущения, т.е. в его вершине:

$$e_m = 2 \left[\theta_m - \frac{e_m(2 + ae_m)}{4(1 + ae_m)^2} z \right], \quad (6)$$

$$e_m = 2 \left[1 - \theta_m - \frac{\mu e_m(2 + ae_m)}{4(1 + ae_m)^2} z + \frac{1 + \mu}{4(1 + ae_m)^2} \int_0^z e_m(z') dz' \right], \quad (7)$$

где

$$\theta_m(z) = \frac{e_m}{2} \left[1 + \frac{2 + ae_m}{2(1 + ae_m)^2} z \right], \quad \theta^*(z) = 1 + \frac{1 + \mu}{4} \int_0^z e_m(z') dz'$$

— длительность импульса.

Из выражений (6), (7) получаем уравнение для определения амплитуды $e_m(z)$:

$$4ae_m^3 + [2(1 - 2a) + (1 + \mu)z]e_m^2 - 2 = 0. \quad (8)$$

Асимптотические решения этого уравнения имеют вид: $e_m = 1$ при $(1 + \mu)z \ll 1$, $a \ll 1$ и $e_m = 1 - (1 + \mu)z/4\gamma_0$ при $a \gg 1$. На рис. 1 и 2 приведены формы возмущения $e(z, \theta)$ и зависимости его амплитуды $e_m(z)$ и координаты $\theta_m(z)$ от z при $\mu = 1.5$ и $a = 10$. Видно, что с ростом z треугольное симметричное возмущение (4) искажается несимметрично: передний и задний фронты становятся „вогнутыми“, при этом задний фронт сильно затягивается. С ростом z амплитуда $e_m(z)$ возмущения уменьшается, а координата $\theta_m(z)$ и длительность $\theta^*(z)$ — растут, но импульс возмущения I сохраняется:

$$I = E \int_0^{\theta^*} \varepsilon(x, \theta) d\theta = E\varepsilon_0 = \text{const.}$$

При увеличении параметра $a = \gamma_0\varepsilon_0$ гистерезисные потери насыщаются и скорости изменения амплитуды $e_m(z)$ и координаты $\theta_m(z)$ уменьша-

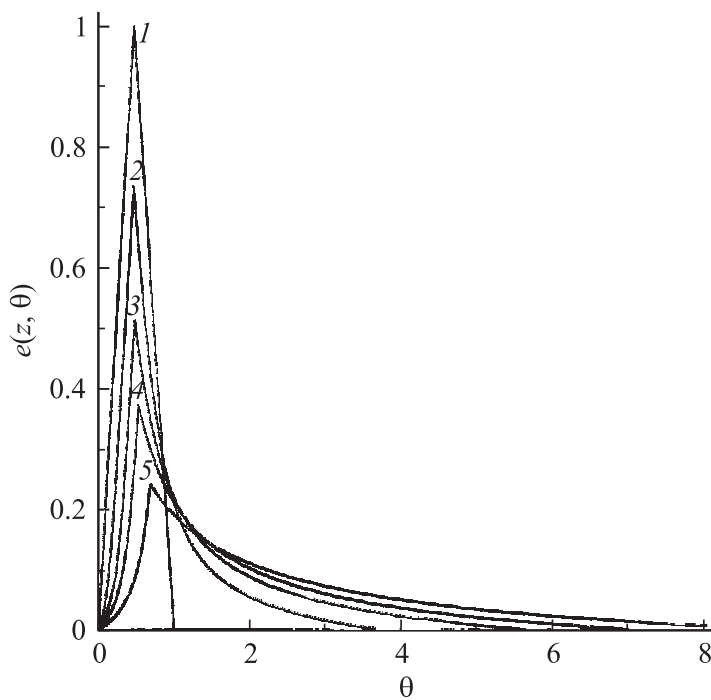


Рис. 1. Форма импульсного возмущения $e(z, \theta)$ при $\mu = 1.5$, $a = 10$ и различных z : 1 — $z = 0$, 2 — $z = 5$, 3 — $z = 10$, 4 — $z = 15$, 5 — $z = 20$.

ются. На рис. 3 приведены зависимости амплитуды ε_m и координаты θ_m от начальной амплитуды ε_0 при $y = 3 \cdot 10^5$ и при различных значениях параметра γ_0 . При $\gamma_0 \varepsilon_0 \ll 1$ в начале $\varepsilon_m = \varepsilon_0$, а затем зависимость ε_m от ε_0 становится нелинейной (линии 1, 2), что связано с ростом гистерезисных потерь. При $\gamma_0 \varepsilon_0 > 1$, когда гистерезисные потери насыщаются, зависимость ε_m от ε_0 стремится к линейной: $\varepsilon_m = [1 - (1 + \mu)y/4\gamma_0]\varepsilon_0$ (линии 3, 4). Зависимости θ_m от ε_0 ведут себя аналогично: при малых значениях $\gamma_0 \varepsilon_0$ имеет место сильная зависимость θ_m от ε_0 , а при больших — слабая. Отметим, что в гистерезисной среде без насыщения нелинейных потерь ($\gamma_0 = 0$) форма возмущения (4) будет треугольной,

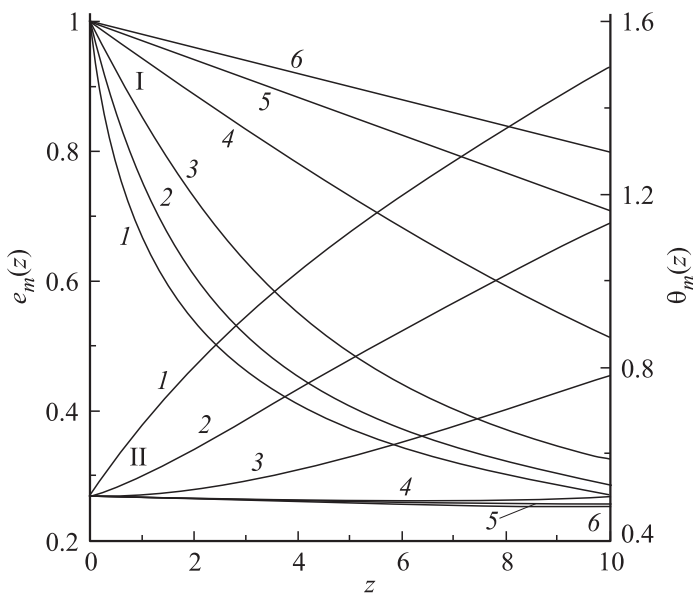


Рис. 2. Зависимость амплитуды $e_m(z)$ (I) и координаты $\theta_m(z)$ (II) от z при $\mu = 1.5$: 1 — $a = 0$, 2 — $a = 1$, 3 — $a = 3$, 4 — $a = 10$, 5 — $a = 20$, 6 — $a = 30$.

но, вообще говоря, несимметричной:

$$e(z, \theta) = 2 \begin{cases} \frac{\theta}{1+z}, & \dot{e}(z, \theta) > 0, \quad 0 \leq \theta \leq \theta_m(z); \\ \frac{\sqrt{1 + (1+\mu)z/2} - \theta}{1+\mu z}, & \dot{e}(z, \theta) < 0, \quad \theta_m(z) \leq \theta \leq \theta^*(z), \end{cases}$$

где $\theta_m(z) = e_m(z)(1+z)/2$, $\theta^*(z) = \sqrt{1 + (1+\mu)z/2}$, $e_m(z) = [1 + (1+\mu)z/2]^{-1/2}$.

До прохождения возмущения смещение и деформация среды равны нулю. После прохождения возмущения деформация среды также будет равна нулю, но ее смещение U будет ненулевым: $U = -\varepsilon_0 C_0 T/2 < 0$. Это связано с тем, что для того, чтобы создать однополярное возмущение (4) необходимо сместить среду на величину $U = -\varepsilon_0 C_0 T/2$.

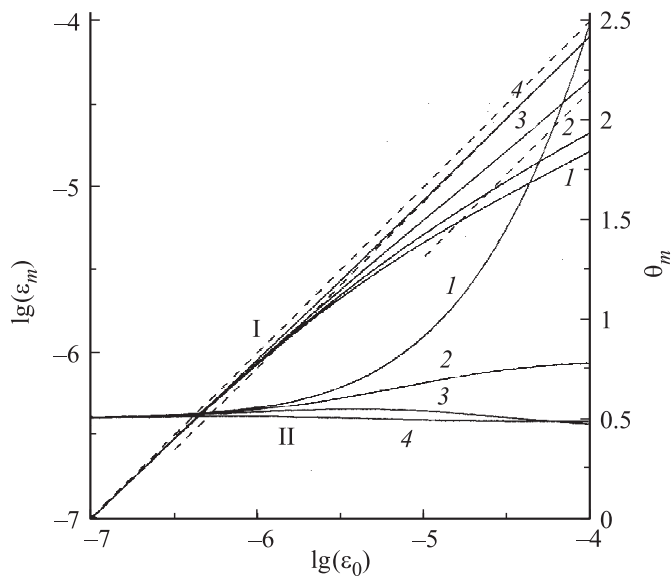


Рис. 3. Зависимости амплитуды ε_m (I) и координаты θ_m (II) от ε_0 при $\mu = 1.5$, $\gamma = 10^5$ и различных значениях параметра γ_0 : 1 — $\gamma_0 = 0$, 2 — $\gamma_0 = 10^5$, 3 — $\gamma_0 = 3 \cdot 10^5$, 4 — $\gamma_0 = 10^6$. Пунктирные линии соответствуют линейным зависимостям ε_m от ε_0 .

Установленные закономерности нелинейного распространения однополярных возмущений в гистерезисных средах могут быть использованы для получения предварительных оценок при проведении соответствующих экспериментов с целью определения параметров нелинейности таких сред и их нелинейной акустической диагностики.

Список литературы

- [1] Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука, 2000. 273 с.
- [2] Порубов А.В. Локализация нелинейных волн деформации. М.: Физматлит, 2009. 208 с.
- [3] Назаров В.Е. // Акуст. журн. 1997. Т. 43. № 2. С. 81–85.
- [4] Gusev V. // JASA. 2000. V. 107. N 6. P. 3047–3058.
- [5] Назаров В.Е., Радостин А.В., Островский Л.А., Соустова И.А. // Акуст. журн. 2003. Т. 49. № 3. С. 405–415.
- [6] Назаров В.Е., Кияшко С.Б. // ЖТФ. 2014. Т. 84. В. 3. С. 1–7.